Instituto Federal de Educação, Ciência e
Tecnologia da Bahia - Campus Valença
Licenciatura em Matemática

Robson Jesus dos Santos

Método da Série de Potências para Solução de Equações Diferenciais Ordinárias em Torno de Pontos Ordinários

Valença-BA
2023

Robson Jesus dos Santos

Método da Série de Potências para Solução de Equações Diferenciais Ordinárias em Torno de Pontos Ordinários

Trabalho de conclusão de curso apresentado, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática junto ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia - Campus Valença.

Orientadora: Prof. Ma. Ana Carolina Moura Teixeira

Valença-BA
2023

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO SISTEMA DE BIBLIOTECAS DO IFBA, COM OS DADOS FORNECIDOS PELO(A) AUTOR(A)

S237m Santos, Robson Jesus dos

Método da Série de Potências para solução de Equações Diferenciais Ordinárias em Torno de Pontos Ordinários: / Robson Jesus dos Santos; orientadora Ana Carolina Moura Teixeira -- Valença: IFBA, 2023.

106f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) -- Instituto Federal da Bahia, 2023.

1. Equações Diferenciais. 2. Soluções de EDO. 3. Série de Potência. 4. Método da Série de Potência. I. Teixeira, Ana Carolina Moura, orient. II. TÍTULO.

CDD:515.35

INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Bahia

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA BAHIA
Rua Vereador Romeu Agrário Martins, s/n - Bairro Tento - CEP 45400-000 - Valença - BA - www.portal.ifba.edu.br

Robson Jesus dos Santos

Método da Série de Potência para Solução de Equações Diferenciais Ordinárias em Torno de Pontos Ordinários

Monografia apresentada à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia, Campus Valença, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Trabalho de Conclusão de Curso aprovado pela banca examinadora em 07/12/2023.

BANCA EXAMINADORA

____
Profa. Ms. Ana Carolina Moura Teixeira (Orientadora)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

____
Prof. Dr. Diogo Soares Dórea da Silva
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

____
Profa. Esp. Ruth da Silva Araújo
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

Em 11 de novembro de 2023.

---

sei! assinatura eletrônica — Documento assinado eletronicamente por **Diogo Soares Dorea da Silva**, **Professor Efetivo**, em 08/12/2023, às 23:42, conforme decreto nº 8.539/2015.

---

sei! assinatura eletrônica — Documento assinado eletronicamente por **RUTH DA SILVA ARAUJO**, **Professor Efetivo**, em 11/12/2023, às 10:58, conforme decreto nº 8.539/2015.

---

sei! assinatura eletrônica — Documento assinado eletronicamente por **ANA CAROLINA MOURA TEIXEIRA**, **Professor Efetivo**, em 11/12/2023, às 11:02, conforme decreto nº 8.539/2015.

23280.001374/2022-62 3234956v2

Folha de Aprovação

Autor: Robson Jesus dos Santos

Título: Método da Série de Potências para Solução de Equações Diferenciais Ordinárias em Torno de Pontos Ordinários

Banca Examinadora:

Prof. Ma. Ana Carolina Moura Teixeira (Orientadora)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia
Assinatura: ______________________________

Prof. Dr. Diogo Soares Dórea da Silva
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia
Assinatura: ______________________________

Prof. Esp. Ruth da Silva Araújo
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia
Assinatura: ______________________________

Valença-BA, 07 de Dezembro de 2023.

Estas páginas serão consideradas corruptoras e delirantes.

João Ubaldo Ribeiro

"Dedico este trabalho de conclusão de curso à minha querida avó Maria de Lourdes (in memoriam), cuja presença foi essencial na minha vida."

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por me conceder força e sabedoria durante todo esse percurso acadêmico. À minha querida mãe, Ana Maria, pela inabalável fé em meu potencial e pelo constante apoio ao longo dessa jornada. Sua presença foi e é fundamental. À minha família, em especial à minha dedicada tia Iracema, pelo encorajamento, orientações valiosas e por acreditar incondicionalmente em mim, e ao meu pai Antonio dos Santos pelo apoio durante essa jornada.

Agradeço profundamente à minha querida amiga Randra por todo o apoio e disponibilidade que demonstrou ao longo dessa jornada. Sua presença constante, palavras encorajadoras e generosidade foram fundamentais para que eu pudesse superar desafios e alcançar meus objetivos acadêmicos. Sua disposição em me ajudar, seja com conselhos, revisões de trabalhos ou simplesmente oferecendo seu ombro amigo nos momentos mais difíceis, fez toda a diferença. Saiba que cada gesto, por menor que parecesse, foi imensamente valorizado por mim. Ter uma amiga tão incrível como você ao meu lado durante essa jornada foi um privilégio inestimável.

Não posso deixar de agradecer à minha amiga e irmã que a vida me deu, Flaviane (ou como a chamo carinhosamente, Bergamota). Sua presença foi um verdadeiro alicerce emocional para mim. Nos momentos de dúvida e cansaço, era reconfortante saber que podia contar com você. Sua compreensão e apoio constante foram um grande impulso para minha confiança e determinação. Você é uma amiga e companheira de curso excepcional, e sou profundamente grato por ter tido a honra de compartilhar essa jornada contigo. Tenho certeza de que as lições aprendidas e as memórias criadas serão tesouros que levarei para o resto da vida. Muito obrigado por tudo o que fez por mim! Espero que possamos continuar trilhando caminhos de sucesso juntos, mesmo que em diferentes trajetórias profissionais. Saiba que sua amizade é um presente que guardarei sempre com carinho no coração.

A minha profunda gratidão à minha amiga peculiar Tiele Reis por todos os momentos maravilhosos que compartilhamos na faculdade. Sua amizade foi uma luz brilhante nos meus dias mais sombrios, e sua dedicação em me defender sempre foi um grande apoio.

Gostaria de expressar minha sincera gratidão a todos os meus amigos que estiveram presentes, seja de forma direta ou indireta, ao longo desta jornada, em especial: Elmo Silva, Râneson Jonathan, Mariana Serqueira, Lucas da Hora, Luã Nogueira, Marília Silva e Jair Lopes. Além disso, quero estender meus profundos agradecimentos aos amigos e colegas que conheci durante o curso, a saber: Thais Matias, Daniele Negrão, Iasmim Araújo, Sávio Negrão, Ana Santiago, Maria Vitória, Brena Reis, Karoline Santos, Zuleide e Everson Conceição.

Esta conquista é dedicada aos meus estimados professores, não apenas por terem acreditado no meu potencial, mas também pelo apoio, dedicação e por serem fontes de inspiração para mim.

De maneira muito especial, quero expressar minha profunda gratidão à professora Ruth pela confiança que depositou em mim e pela humildade que sempre demonstrou. Suas qualidades como educadora não apenas enriqueceram meu aprendizado, mas também inspiraram um profundo respeito e admiração.

Ao professor Diogo, gratidão por sua disponibilidade em participar da minha banca. Sua generosidade ao dedicar seu tempo e conhecimento foi um gesto que valorizo imensamente. Além disso, quero destacar sua habilidade de elevar a autoestima dos seus alunos. Sua inteligência e sabedoria são fontes de inspiração para mim. Agradeço por compartilhar seu vasto conhecimento e por ser um exemplo de excelência no ensino.

Gostaria de expressar minha profunda gratidão à professora Ana Carolina por ter aceitado me orientar. Sua generosidade, autoestima, confiança e inteligência têm sido uma fonte inestimável de apoio e inspiração para mim. Sua orientação vai muito além do conhecimento acadêmico, pois também reflete sua dedicação em guiar e encorajar seus alunos. Sinto-me verdadeiramente privilegiado por ter você como minha orientadora, e sei que sua influência continuará a moldar não apenas minha trajetória acadêmica, mas também minha jornada na vida.

Por fim, expresso minha profunda gratidão ao professor Ney pelo apoio fornecido por meio da casa estudantil disponibilizada aos estudantes da cidade de Itaparica. Ademais, muito obrigado a todos que, de alguma forma, contribuíram para que eu pudesse chegar até aqui.

Resumo

As equações diferenciais fazem parte de uma teoria bastante significativa na Matemática, tanto devido à sua natureza intrínseca, que engloba uma ampla gama de conceitos, quanto pela sua extensa aplicabilidade em diversas áreas do conhecimento. Embora existam vários métodos sistemáticos para determinar soluções de equações diferenciais, ainda assim, enfrentamos consideráveis desafios ao resolver certos tipos específicos delas. Assim, o objetivo deste estudo é introduzir o Método da Série de Potências para Soluções de Equações Diferenciais Ordinárias em torno de Pontos Ordinários, o que não é comum nos cursos iniciais dos Cálculos Diferencial e Integral. Isso foi realizado por meio de uma pesquisa bibliográfica, na qual foram consultadas as principais fontes utilizadas nos cursos de Equações Diferenciais de graduação. Inicialmente, foram explorados conceitos fundamentais relacionados às equações diferenciais, incluindo a discussão sobre a existência e unicidade de soluções, bem como a obtenção da solução geral para equações diferenciais lineares, tanto homogêneas quanto não homogêneas. Além disso, foi revisada a teoria essencial das séries numéricas e das séries de potências para dar continuidade a este trabalho. Posteriormente, foi apresentado o Método da Série de Potências para Solução de Equações Diferenciais Ordinárias em Torno de Pontos Ordinários e por fim aplicamos o método para obter a solução da Equação de Legendre. A partir do desenvolvimento deste trabalho, pode-se concluir que, mesmo havendo a garantia da existência de soluções para uma dada equação diferencial, nem sempre é possível expressá-la em termos de funções elementares, ou seja, funções polinomiais, racionais, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas. Isso destaca a importância do estudo do método da série de potências.

Palavras-chave: Equações Diferenciais. Soluções de EDO. Série de Potência. Método da Série de Potência.

Abstract

Differential equations are part of a very significant theory in Mathematics, both due to their intrinsic nature, which encompasses a wide range of concepts, and their extensive applicability in different areas of knowledge. Although there are several systematic methods for determining solutions to differential equations, we still face considerable challenges in solving certain specific types of them. Thus, the objective of this study is to introduce the Power Serie Method for Solutions of Ordinary Differential Equations around Ordinary Points, which is not common in initial courses in Differential and Integral Calculus. This was carried out through bibliographical research, in which the main sources used in undergraduate Differential Equations courses were consulted. Initially, fundamental concepts related to differential equations were explored, including the discussion on the existence and uniqueness of solutions, as well as obtaining the general solution for linear differential equations, both homogeneous and non-homogeneous. Furthermore, the essential theory of numerical series and power series was revised to continue this work. Subsequently, the Power Serie Method for Solving Ordinary Differential Equations Around Ordinary Points was presented and finally we applied the method to obtain the solution of Legendre's Equation. From the development of this work, it can be concluded that, even though there is a guarantee of the existence of solutions for a given differential equation, it is not always possible to express it in terms of elementary functions, that is, polynomial, rational, trigonometric functions, exponential and logarithmic. This highlights the importance of studying the power serie method.

Keywords: Differential Equations. EDE Solutions. Power Serie. Power Serie Method.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O termo equação diferencial sugere a resolução de um tipo de equação que envolve derivadas. Ela surge no século XVII, a partir da gênese dos Cálculos Diferencial e Integral, cuja criação é associada a Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). O campo de estudo das equações diferenciais figura um importante segmento da Matemática, pois estas equações formulam ou descrevem inúmeros problemas do mundo real em termos matemáticos, por conta disso muitos matemáticos dedicaram-se ao estudo dessas equações.

Os irmãos Jakob Bernoulli (1654-1795) e Johann Bernoulli (1667-1748) contribuíram significativamente para o estudo das equações diferenciais. Eles foram pioneiros no desenvolvimento de técnicas e métodos para a resolução de equações diferenciais e fizeram avanços importantes nessa área.

Jakob, em seu trabalho "Ars Conjectandi" publicado em 1713, introduziu o conceito de equações diferenciais de primeira ordem e as soluções exatas para algumas classes específicas dessas equações. Além disso, desenvolveu técnicas para resolver equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes constantes. Essas contribuições foram fundamentais para o desenvolvimento posterior da Teoria das Equações Diferenciais.

O seu irmão também fez importantes contribuições para o estudo das equações diferenciais. Johann trabalhou extensivamente com equações diferenciais não lineares e desenvolveu técnicas para resolver equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes variáveis. Além do mais, contribuiu para o desenvolvimento da teoria das equações diferenciais parciais.

Leonhard Euler (1707-1783), considerado o maior matemático do século XVIII, emergiu como um dos principais estudiosos na Teoria das Equações Diferenciais. Ele desenvolveu técnicas sistemáticas para resolver uma ampla gama de equações diferenciais ordinárias e parciais, incluindo equações lineares e não lineares. É atribuído a Euler o método da separação de variáveis, bem como o desenvolvimento de técnicas para resolver equações diferenciais por meio da expansão em série de potências. Ele mostrou que as soluções de muitas equações diferenciais podem ser expressas como séries infinitas e utilizou as propriedades das séries para encontrar soluções aproximadas ou exatas para essas equações. Além disso, desenvolveu o método dos coeficientes a determinar para resolver equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes constantes.

Esses são apenas alguns dos métodos de resolução de equações diferenciais atribuídos a Euler. Sua abordagem sistemática para resolver equações diferenciais e sua ênfase no desenvolvimento de métodos gerais e técnicas analíticas tiveram um impacto significativo na teoria e na prática das equações diferenciais. Seu trabalho estabeleceu as bases para o estudo e o avanço posterior dessa área da Matemática.

Durante o século XIX, matemáticos como Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) e Augustin Cauchy (1789-1857) avançaram ainda mais no estudo das equações diferenciais. Lagrange desenvolveu a teoria das equações diferenciais parciais e introduziu o conceito de funções lagrangianas. Cauchy fez importantes contribuições para a teoria da solução de equações diferenciais.

No século XX, a Teoria das Equações Diferenciais foi ampliada e aprofundada. Henri Poincaré (1854-1912) contribuiu para a Teoria dos Sistemas Dinâmicos e estudou a estabilidade e o caos em equações diferenciais. Métodos numéricos também foram desenvolvidos para resolver equações diferenciais que não têm soluções analíticas exatas, ou seja, soluções que não podem ser expressas por meio de funções elementares: funções polinomiais, funções racionais, funções trigonométricas, funções exponenciais e funções logarítmicas. Além disso, se iniciou o estudo mais abstrato sobre a existência e unicidade de soluções.

Devido a sua aplicabilidade, as equações diferenciais se fazem presentes em diversas áreas do conhecimento científico, como na Física, nas Engenharias, na Economia, na Saúde e Ciências Sociais Aplicadas, entre outras áreas. Na Física, por exemplo, as equações diferenciais são utilizadas na formulação da lei do movimento de Newton que descreve o movimento de um objeto sob a influência de forças. Elas também são usadas para descrever fenômenos como a difusão de calor, a propagação de ondas e o comportamento de sistemas quânticos. Além da Física, as equações diferenciais podem ser observadas nas Engenharias para descrever o comportamento de circuitos elétricos, sistemas de controle, processos de transferência de calor e massa, dinâmica de fluidos, mecânica estrutural e muitos outros fenômenos encontrados nesse ramo. Já na Economia as equações diferenciais são usadas para modelar e analisar fenômenos econômicos. Por exemplo, elas são usadas para descrever o comportamento das taxas de juros, a dinâmica da inflação e o crescimento econômico. Essas são apenas algumas das muitas aplicações das equações diferenciais.

Apesar de existir diversos métodos sistemáticos para encontrar soluções de uma equação diferencial, há, ainda, imensa dificuldade em solucionar certos tipos de equações diferenciais. Nesse sentido, esta monografia tem o objetivo de investigar o método da série de potências, como um procedimento alternativo para solucionar as equações diferenciais. Daremos ênfase às equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes variáveis, por conta das dificuldades encontradas para determinar a solução dessa classe de equações.

O presente trabalho foi segmentado em capítulos, abordando conceitos essenciais para o seu desenvolvimento, bem como a temática central: o método da série de potências. Os capítulos dois a cinco são dedicados à parte teórica necessária.

No segundo capítulo, faremos uma introdução às equações diferenciais, apresentando algumas terminologia e definições básicas.

No terceiro capítulo, trataremos de estudar a teoria subjacente às equações diferenciais lineares de ordem n. Analisaremos quais condições devem ser cumpridas para que uma equação diferencial admita solução única. Ademais, serão apresentados métodos para encontrar a solução geral dessas equações.

No quarto capítulo, daremos uma pausa no estudo das equações diferenciais para nos concentrarmos nas séries numéricas. Especificamente, será estudado o conceito de convergência e divergência, bem como os testes para determinar quando uma série converge ou não. Utilizaremos esses conceitos para abordar as séries de potências, visando representar funções por meio de expansões em série, e também explorar o conceito de derivadas de séries.

No quinto capítulo, iremos nos dedicar ao estudo do método da série de potências. Além disso, estudaremos a Equação de Legendre, que aparece em várias áreas da Matemática e da Física, particularmente em problemas que envolvem simetria esférica.

A fim de alcançar o objetivo geral desse trabalho, utilizamos como metodologia a pesquisa bibliográfica. Sobre essa metodologia, Boccato alega que

> A pesquisa bibliográfica busca a resolução de um problema (hipótese) por meio de referenciais teóricos publicados, analisando e discutindo as várias contribuições científicas. Esse tipo de pesquisa trará subsídios para o conhecimento sobre o que foi pesquisado, como e sob que enfoque e/ou perspectivas foi tratado o assunto apresentado na literatura científica (BOCCATO, 2006, p. 266).

Desse modo, a pesquisa bibliográfica é de suma importância, inclusive para outros tipos de pesquisa, haja vista que possibilita o pesquisador conhecer o que há produzido sobre o tema até o momento de sua pesquisa.

As principais obras consultadas na elaboração deste trabalho foram: Apostol (1988, Volume 1), Boyce e Diprima (2011), Guidorizzi (2013, Volume 4),Ince (1956), Leithold (1994, Volume 2), Lima (2014, Volume 1), Yartey e Ribeiro (2017), Zill e Cullen (2001, Volume 1).

É importante destacar que devido à extensa aplicabilidade das equações diferenciais nas áreas das Ciências e das Engenharias, este estudo se faz relevante. Além disso, traremos uma abordagem de fácil compreensão e riqueza de detalhes dos conteúdos estudados, porquanto esta monografia pode auxiliar os alunos que cursam a disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias ou em disciplinas que esse campo se faz presente em sua ementa.

Capítulo 2

Introdução às Equações Diferenciais

Este capítulo será o nosso ponto de partida no estudo das equações diferenciais. Aqui, trataremos de algumas definições básicas e terminologias necessárias para o desenvolvimento deste trabalho.

2.1 Definições Básicas e Terminologia

Na introdução deste trabalho, vimos, de forma concisa, que uma equação diferencial sugere a resolução de um tipo de equação envolvendo derivadas. Agora, será apresentada ao leitor uma definição matemática rigorosa de equação diferencial.

Definição 2.1. Uma equação que contém derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada equação diferencial (ED).

Em outras palavras, uma equação diferencial é uma relação que envolve uma função desconhecida, ou seja, uma "função incógnita", e suas derivadas ou diferenciais.

Exemplo 2.1.

$$f'(x) = f(x),$$

$$y''(x) + y(x) = 0,$$

$$y^{(3)}(x) + (sen\ t)y''(x) + 5xy(x) = 0,$$

$$x^2ydy + (y^2 - x)dx = 0,$$

$$\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} = x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t},$$

são exemplos de equações diferenciais.

Observe que podemos utilizar as seguintes notações para expressar a função incógnita e suas n-ésimas derivadas em uma equação diferencial:

$$f(x), f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x),$$

$$y, y', y'', \ldots, y^{(n)},$$

e a notação atribuída a Leibniz

$$y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Observação 2.1. É convencionado que os símbolos dx e dy, como aparecem na equação

$$x^2ydy + (y^2 - x)dx = 0,$$

do Exemplo 2.1, é o que se obtém ao multiplicar toda a equação por dx. Assim, não devemos nos preocupar com o significado de cada símbolo mencionado acima.

2.1.1 Classificação

As equações diferenciais são classificadas sob alguns aspectos, como: o tipo (ordinária ou parcial), a ordem e a linearidade (linear ou não-linear).

Definição 2.2. Uma equação diferencial é dita ordinária quando a função incógnita depende apenas de uma variável independente. Neste caso, as derivadas que aparecem na equação diferencial são apenas derivadas ordinárias simples.

Exemplo 2.2. As equações diferenciais

$$\begin{aligned} y' - 5y &= 1, \\ \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} &= x, \\ \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 6y &= 0, \end{aligned}$$

são ordinárias.

Definição 2.3. Uma equação diferencial é dita parcial quando a função incógnita depende de mais de uma variável independente. Neste caso, as derivadas que aparecem na equação diferencial serão derivadas parciais.

Exemplo 2.3. As equações

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

são parciais.

Definição 2.4. A ordem de uma equação diferencial é a ordem da mais alta derivada.

Exemplo 2.4. As equações diferenciais

$$\frac{dy}{dx} - 5y = 1,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 6y = 0,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = xe^x,$$

são ordinárias de primeira, segunda e terceira ordem, respectivamente.

Exemplo 2.5. As equações diferenciais

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u,$$

$$\alpha^2\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial u^2}{\partial t^2} = 0,$$

são parciais de primeira e quarta ordem, respectivamente.

A partir de agora, as definições que se seguirão neste trabalho serão todas relacionadas às equações diferenciais ordinárias de ordem n, que simbolicamente denotaremos da seguinte maneira:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0. \tag{2.1}$$

Quando não houver possibilidade de equívocos, iremos nos referir à equação (2.1), por "equação diferencial" ou simplesmente "equação".

Definição 2.5. Uma equação diferencial é dita linear, quando pudermos escrevê-la na seguinte forma:

$$P_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + P_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_1(x)\frac{dy}{dx} + P_0(x)y = Q(x).$$

Caso contrário, a equação é dita não-linear.

Note que na Definição 2.5, a potência de cada termo envolvendo a função incógnita e as suas derivadas é igual a 1. Além disso, cada coeficiente é uma função que depende somente de uma variável independente, neste caso x.

Exemplo 2.6. As equações diferenciais

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0,$$

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} - x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + 5y = e^x,$$

são ordinárias lineares de primeira, segunda e terceira ordens, respectivamente.

Exemplo 2.7. As equações diferenciais

$$y\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = x,$$

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} - y^2 = 0,$$

são ordinárias não-lineares de segunda e terceira ordens, respectivamente.

2.2 Solução de uma Equação Diferencial

Ao estudarmos as equações diferenciais, nos deparamos com o seguinte problema: dada uma equação, por exemplo, do tipo

$$y' = y, \tag{2.2}$$

definida em um subconjunto dos números reais, encontre pelo menos uma função $\varphi(x) = y$ de modo que satisfaça a equação dada. Podemos observar que a equação (2.2) tem como uma solução a função exponencial $\varphi_1(x) = e^x$. De fato, calculando a derivada primeira da função $\varphi_1(x)$, obtemos:

$$\varphi_1'(x) = e^x.$$

Agora, substituindo $\varphi_1(x)$ e $\varphi_1'(x)$ na equação (2.2), teremos a seguinte identidade:

$$e^x = e^x.$$

Por outro lado, a função $\varphi_2(x) = 2e^x$ também é solução da equação (2.2). Com efeito,

$$\varphi_2'(x) = 2e^x.$$

Substituindo na equação (2.2), teremos a identidade:

$$2e^x = 2e^x.$$

De modo geral, a equação (2.2) admite como solução a família de funções $\varphi(x) = ke^x$, com k uma constante real. Podemos concluir que uma dada equação diferencial pode possuir um número infinito de soluções distintas.

Definição 2.6. Uma solução explícita ou simplesmente uma solução para uma equação diferencial (2.1) é uma função $y = \varphi(x)$, definida em algum intervalo I, que possui pelo menos n derivadas contínuas em I e que satisfaz a equação diferencial (2.1). Isto é,

$$F\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)\right) = 0.$$

Quando não houver possibilidade de confusão em relação à variável da solução, escreveremos apenas φ em vez de $\varphi(x)$.

Exemplo 2.8. Verifique se a função

$$\varphi(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{k}{x}, \tag{2.3}$$

sendo k uma constante real, é uma solução da equação diferencial

$$xy' + y = x^2, \tag{2.4}$$

em um intervalo $I \subseteq \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Solução: Observe que podemos escrever a equação (2.4) da seguinte forma:

$$F(x, y, y') = xy' + y - x^2 = 0. \tag{2.5}$$

Sendo

$$\varphi(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{k}{x},$$

então a sua derivada primeira é:

$$\varphi'(x) = \frac{2x}{3} - \frac{k}{x^2}.$$

Substituindo na equação (2.5), temos:

$$\begin{aligned} F(x, \varphi, \varphi') &= x\left(\frac{2x}{3} - \frac{k}{x^2}\right) + \left(\frac{x^2}{3} + \frac{k}{x}\right) - x^2 \\ &= \frac{2x^2}{3} - \frac{kx}{x^2} + \frac{x^2}{3} + \frac{k}{x} - x^2 \\ &= \frac{3x^2}{3} - \frac{k}{x} + \frac{k}{x} - x^2 \\ &= x^2 - \frac{k}{x} + \frac{k}{x} - x^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, a função (2.3) é uma solução para a equação (2.4), pois satisfaz a equação.

Em uma equação diferencial, também podemos obter uma solução na forma implícita, ou seja, como uma relação do tipo $\phi(x, y) = 0$.

Definição 2.7. A expressão $\phi(x, y)$ é dita solução implícita da equação diferencial (2.1) se esta dá origem a pelo menos uma função $\varphi(x)$ definida em um intervalo I, tal que $\varphi(x)$ é uma solução explícita da equação diferencial (2.1) no intervalo I.

Para ilustrar a definição anterior, vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 2.9. Mostre que a relação $x^2 + y^2 - k = 0$, sendo $k > 1$ uma constante real, é solução na forma implícita da equação diferencial $F(x, y, y') = yy' + x = 0$, no intervalo $(-1, 1)$.

Solução: Note que, da relação $x^2 + y^2 - k = 0$, obtém-se as seguintes funções:

$$\varphi_1(x) = \sqrt{k - x^2} \qquad \text{e} \qquad \varphi_2(x) = -\sqrt{k - x^2},$$

definidas em $(-1, 1)$. Calculando a derivada primeira da função φ_1, obtemos

$$\varphi_1'(x) = \frac{-x}{\sqrt{k - x^2}}.$$

Substituindo a função φ_1 e a sua derivada primeira na equação diferencial dada, temos:

$$F\left(x, \varphi_1(x), \varphi_1'(x)\right) = \left(\sqrt{k - x^2}\right) \cdot \left(\frac{-x}{\sqrt{k - x^2}}\right) + x = 0.$$

A demonstração para φ_2 é análoga.

Isso mostra que a relação $x^2 + y^2 - k = 0$, $k > 1$, satisfaz a equação diferencial $yy' = -x$, sendo, portanto, uma família de soluções.

Dos Exemplos 2.8 e 2.9, pode-se observar que se considerarmos uma constante específica, então obteremos uma solução particular da equação diferencial. Além disso, se uma solução compreende n constantes reais quaisquer $k_1, k_2, \ldots, k_n$, então ela é uma família a n-parâmetros de soluções da equação diferencial. Nos exemplos mencionados, temos uma família a 1-parâmetro de soluções.

2.2.1 Solução Geral

A seguir, iremos enunciar o lema conhecido como método da integração sucessiva, que irá nos ajudar a resolver alguns tipos de equações diferenciais integrando-as sucessivamente. Este será o primeiro método apresentado para resolver equações diferenciais.

Lema 2.1. Se uma equação diferencial ordinária de ordem n é da forma

$$\frac{d^n y}{dx^n} = G(x), \tag{2.6}$$

então, sua solução é obtida de maneira direta por integrações sucessivas.

Demonstração. A prova é feita integrando ambos os membros da equação (2.6) um número n de vezes. ∎

Exemplo 2.10. Encontre a solução da equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} = cos(x) + 2x$.

Solução: Primeiramente, vemos que a equação diferencial é da forma da equação (2.6). Desse modo, podemos utilizar o Lema 2.1. Integrando a equação em ambos os membros, obtém-se:

$$\begin{aligned} y &= \int (cos(x) + 2x)dx \\ y &= sen(x) + x^2 + k, \end{aligned}$$

$k \in \mathbb{R}$. Portanto, $y = sen(x) + x^2 + k$, com k uma constante real, é a solução geral da equação diferencial.

Exemplo 2.11. Encontre a solução da equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 20x^3 - \frac{1}{x^2}.$$

Solução: Como a equação diferencial é da forma da equação (2.6), podemos utilizar o Lema 2.1. Integrando, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \int \left(20x^3 - \frac{1}{x^2}\right) dx \\ \frac{dy}{dx} &= 20 \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{1}{x} + k_1 \\ \frac{dy}{dx} &= 5x^4 + \frac{1}{x} + k_1, \end{aligned}$$

$k_1 \in \mathbb{R}$. Agora, integrando novamente, temos:

$$\begin{aligned} y &= \int \left(5x^4 + \frac{1}{x} + k_1\right) dx \\ y &= 5 \cdot \frac{x^5}{5} + ln|x| + k_1x + k_2 \\ y &= x^5 + ln|x| + k_1x + k_2, \end{aligned}$$

$k_2 \in \mathbb{R}$. Portanto, $y = x^5 + ln|x| + k_1x + k_2$, com k_1, k_2 constantes reais, é a solução da equação diferencial.

Nos Exemplos 2.10 e 2.11, as soluções encontradas possuem, respectivamente, uma constante k e duas constantes k_1 e k_2, que chamamos de parâmetros. Com isso, definiremos o conceito de solução geral de uma equação diferencial ordinária de ordem n.

Definição 2.8. A solução geral de uma equação do tipo (2.1) é uma família a n-parâmetros de soluções que contém todas as soluções da equação (2.1) em um intervalo I.

Exemplo 2.12. Segue do Exemplo 2.10, que $y = sen(x) + x^2 + k$ é uma família a 1-parâmetro de soluções. Já do Exemplo 2.11, segue que $y = x^5 + ln|x| + k_1x + k_2$ é uma família a 2-parâmetros de soluções.

Capítulo 3

Equações Diferenciais Lineares de Ordem n

Dedicamos este capítulo ao estudo das equações diferenciais lineares de ordem n. Inicialmente, iremos estudar a teoria subjacente às equações lineares, analisaremos quais condições devem ser cumpridas para que a equação diferencial admita uma única solução num intervalo I. No restante deste capítulo, estudaremos métodos para encontrar a solução geral para uma equação linear com coeficientes constantes. Salientamos que grande parte dos teoremas serão enunciados para o caso $n = 2$, bem como suas demonstrações. No entanto, faremos uma generalização dos mesmos sem demonstrá-los.

3.1 Teoria Preliminar

A princípio, iremos nos ater à teoria geral sobre as equações diferenciais lineares de ordem n, relembrando conceitos estudados no capítulo anterior e introduzindo novos conceitos para este tipo de equação.

Vimos, na Definição 2.5, que uma equação diferencial linear de ordem n é toda equação diferencial que pode ser expressa da seguinte maneira:

$$P_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + P_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_1(x)\frac{dy}{dx} + P_0(x)y = Q(x). \tag{3.1}$$

Para realizar o estudo da equação (3.1), supomos $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_{n-1}(x), P_n(x)$ e $Q(x)$ contínuas em um intervalo aberto I. Além disso, supõe-se que $P_n(x)$ é diferente da função identicamente nula, para todo x em I. Por conta disso, a equação diferencial (3.1) pode ser reescrita, dividindo-a por $P_n(x)$, como:

$$\frac{d^ny}{dx^n} + p_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_0(x)y = q(x), \tag{3.2}$$

com:

$$p_{n-1}(x) = \frac{P_{n-1}(x)}{P_n(x)}, \cdots, p_1(x) = \frac{P_1(x)}{P_n(x)}, p_0(x) = \frac{P_0(x)}{P_n(x)} \text{ e } q(x) = \frac{Q(x)}{P_n(x)}.$$

Em particular, se $n = 2$, a equação diferencial (3.2) é reduzida à expressão:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_0(x)y = q(x). \tag{3.3}$$

No caso em que a função $q(x)$ é identicamente nula, a equação (3.2) é dita homogênea. Do contrário a equação é dita não homogênea. Além disso, quando os seus coeficientes forem constantes, a equação (3.2) é designada equação diferencial linear de ordem n com coeficientes constantes. Caso contrário, é designada equação diferencial de ordem n com coeficientes variáveis.

Exemplo 3.1. A equação diferencial

$$y'' = 2xyy' + e^{-x}$$

é de ordem 2, porém não linear por conta do termo $2xyy'$.

Exemplo 3.2. A equação diferencial

$$2y'' + 3y' - 5y = 0$$

é linear de ordem 2, homogênea, com coeficientes constantes.

Exemplo 3.3. A equação diferencial

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + cos(x)\frac{dy}{dx} + x^3y = e^x$$

é linear de ordem 2, não homogênea, com coeficientes variáveis.

Exemplo 3.4. A função $\varphi(x) = e^x$ definida no intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ é uma solução da equação

$$y'' - \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}y = 0.$$

Solução: Com efeito,

$$\varphi(x) = \varphi'(x) = \varphi''(x) = e^x.$$

Substituindo $\varphi(x), \varphi'(x)$ e $\varphi''(x)$ na equação dada, obtém-se:

$$e^x - \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^x = e^x - e^x = 0.$$

Logo, $\varphi(x) = e^x$ satisfaz a equação diferencial e, portanto, é uma solução para equação.

Exemplo 3.5. A função $\varphi(x) = x^3$, definida no intervalo aberto $I = (0, +\infty)$, é solução da equação diferencial

$$y'' = \frac{1}{9x^3}(y')^2 + \frac{5}{x^2}y.$$

Solução: Com efeito,

$$\varphi(x) = x^3 \Rightarrow \varphi'(x) = 3x^2 \Rightarrow \varphi''(x) = 6x.$$

Substituindo $\varphi(x), \varphi'(x)$ e $\varphi''(x)$ na equação dada, obtém-se a identidade:

$$\begin{aligned} \frac{1}{9x^3}(\varphi')^2 + \frac{5}{x^2}\varphi &= \frac{1}{9x^3}\left(3x^2\right)^2 + \frac{5}{x^2} \cdot x^3 \\ &= \frac{1}{9x^3} \cdot 9x^4 + 5x \\ &= x + 5x \\ &= 6x = \varphi''(x). \end{aligned}$$

Logo, $\varphi(x) = x^3$ satisfaz a equação diferencial e, portanto, é uma solução para equação.

3.1.1 Problema de Valor Inicial

Ao resolvermos um problema envolvendo equações diferenciais, podemos impor condições especiais relativas à função incógnita e suas soluções. Esse problema é conhecido como Problema de Valor Inicial.

Definição 3.1. Um Problema de Valor Inicial (PVI) de uma equação diferencial linear de ordem n, correspondente à equação (3.2), se refere às condições

$$\begin{cases} y(x_0) &= y_0 \\ \frac{dy}{dx}(x_0) &= y_0' \\ \vdots & \\ \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}(x_0) &= y_0^{(n-1)}, \end{cases} \tag{3.4}$$

com x_0, y_0 e $y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ valores previamente conhecidos.

Uma solução para este PVI é uma solução da equação (3.2), satisfazendo as condições iniciais impostas.

Exemplo 3.6. Verifique se a função $\varphi(x) = 9e^{-2x} - 7e^{-3x}$ é solução para o PVI:

$$\begin{cases} y'' + 5y' + 6y &= 0 \\ y(0) &= 2 \\ y'(0) &= 3. \end{cases}$$

Solução: Com efeito,

$$\varphi(x) = 9e^{-2x} - 7e^{-3x} \Rightarrow \varphi'(x) = -18e^{-2x} + 21e^{-3x} \Rightarrow \varphi''(x) = 36e^{-2x} - 63e^{-3x}.$$

Substituindo $\varphi(x), \varphi'(x)$ e $\varphi''(x)$ na equação dada

$$y'' + 5y' + 6y = 0,$$

obtém-se a identidade:

$$\begin{aligned}
\varphi'' + 5\varphi' + 6\varphi &= 36e^{-2x} - 63e^{-3x} + 5(-18e^{-2x} + 21e^{-3x}) + 6(9e^{-2x} - 7e^{-3x}) \\
&= 36e^{-2x} - 63e^{-3x} - 90e^{-2x} + 105e^{-3x} + 54e^{-2x} - 42e^{-3x} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo, a função dada é solução geral para a equação diferencial $y'' + 5y' + 6y = 0$. Agora, vamos verificar se a função φ atende as condições iniciais impostas. De fato,

$$\begin{aligned}
\varphi(0) &= 9e^{-2\cdot 0} - 7e^{-3\cdot 0} \\
\varphi(0) &= 9e^{0} - 7e^{0} \\
\varphi(0) &= 2
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\varphi'(0) &= -18e^{-2\cdot 0} + 21e^{-3\cdot 0} \\
\varphi'(0) &= -18e^{0} + 21e^{0} \\
\varphi'(0) &= 3.
\end{aligned}$$

Portanto, a função φ é solução para o PVI.

Exemplo 3.7. Encontre a solução para a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -e^{-x} + sen(4x)$$

satisfazendo as condições iniciais $y(0) = 2$ e $y'(0) = 0$.

Solução: Utilizando o Lema 2.1, teremos:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \int (-e^{-x} + sen(4x))dx \\
\frac{dy}{dx} &= e^{-x} - \frac{1}{4}cos(4x) + k_1.
\end{aligned}$$

Utilizando novamente o lema anterior, obtemos:

$$\begin{aligned}
y &= \int \left(e^{-x} - \frac{1}{4}cos(4x) + k_1 \right) dx \\
y &= -e^{-x} - \frac{1}{16}sen(4x) + k_1x + k_2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$y = -e^{-x} - \frac{1}{16}sen(4x) + k_1x + k_2$$

é uma família a 2-parâmetros de soluções para a equação diferencial dada. Aplicamos as condições iniciais para encontrar os valores k_1 e k_2.

- Para $y(0) = 2$ tem-se:

$$\begin{aligned} -e^{-0} - \frac{1}{16}sen(4\cdot 0) + k_1 \cdot 0 + k_2 &= 2 \\ -1 + k_2 &= 2 \\ k_2 &= 3. \end{aligned}$$

- Para $y'(0) = 0$ tem-se:

$$\begin{aligned} e^{0} - \frac{1}{4}cos(4\cdot 0) + k_1 &= 0 \\ 1 - \frac{1}{4} + k_1 &= 0 \\ k_1 &= -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Sendo assim, a solução para o PVI é:

$$y = -e^{-x} - \frac{1}{16}sen(4x) - \frac{3}{4}x + 3.$$

3.1.2 Existência e Unicidade de Solução

O teorema a seguir estabelece condições suficientes para que exista uma única solução para a equação diferencial (3.2), satisfazendo as condições iniciais (3.4).

Teorema 3.1 (Existência e Unicidade). Se as funções $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_{n-1}(x)$ e $q(x)$ são todas contínuas[1] e diferenciáveis em um certo intervalo aberto I, então existe somente uma função $\varphi(x) = y$ que satisfaz (3.2) no intervalo I com as condições iniciais (3.4).

Demonstração. A prova com todos os detalhes pode ser encontrada em Ince (1956, p.78). ■

Vejamos alguns exemplos da aplicação do Teorema da Existência e Unicidade.

Exemplo 3.8. Verifique se a função $\varphi(x) = 3e^{2x} + e^{-2x} - 3x$ é uma solução para o problema de valor inicial

$$y'' - 4y = 12x,\ y(0) = 4,\ y'(0) = 1.$$

Caso afirmativo, mostre que $\varphi(x)$ é a única solução do PVI.

Solução: Com efeito,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 3e^{2x} + e^{-2x} - 3x, \\ \varphi'(x) &= 6e^{2x} - 2e^{-2x} - 3, \\ \varphi''(x) &= 12e^{2x} + 4e^{-2x}. \end{aligned}$$

[1] Ver a Definição 5.1.

Substituindo a função e a sua derivada segunda na equação diferencial dada, obteremos a seguinte identidade:

$$\begin{aligned}\varphi'' - 4\varphi &= 12e^{2x} + 4e^{-2x} - 4(3e^{2x} + e^{-2x} - 3x)\\ &= 12e^{2x} + 4e^{-2x} - 12e^{2x} - 4e^{-2x} + 12x\\ &= 12x.\end{aligned}$$

Logo, a função $\varphi(x)$ satisfaz a equação diferencial e, portanto, é uma solução da equação. Agora, basta verificar se a solução para equação diferencial dada satisfaz os valores iniciais mencionados.

Temos que:

$$\varphi(0) = 3e^{2.\cdot 0} + e^{-2\cdot 0} - 3\cdot 0 = 4$$

e

$$\varphi'(0) = 6e^{2\cdot 0} - 2e^{-2\cdot} - 3 = 1.$$

Portanto, $\varphi(x)$ é uma solução para o problema de valor inicial.

Agora, mostraremos a unicidade da solução. Note que a equação é linear, os seus coeficientes, $p_0(x) = -4, p_1(x) = 0$ e a função $q(x) = 12x$ são contínuos e diferenciáveis para qualquer x em algum intervalo I. Temos também que $p_2(x) = 1 \neq 0$, para todo I contendo $x = 0$. Logo, pelo Teorema 3.1, a função $\varphi(x)$ é a única solução para o problema de valor inicial.

Exemplo 3.9. Mostre que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} 3y''' + 5y'' - y' + 7y = 0\\ y(1) = 0\\ y'(1) = 0\\ y''(1) = 0\end{cases}$$

possui única solução em algum intervalo I contendo $x = 1$.

Solução: De fato, verifica-se que os coeficientes da equação diferencial e a função $q(x) = 0$ (função identicamente nula) são todos contínuos e diferenciáveis. Pelo Teorema 3.1, existe uma única solução em algum intervalo I contendo $x = 1$.

Exemplo 3.10. Mostre que o problema de valor inicial,

$$\begin{cases} y'' + \dfrac{1}{x}y' + xy = \dfrac{1}{x^2}\\ y(2) = 0\\ y'(2) = 0\\ y''(2) = 0,\end{cases}$$

em que as funções $p_1(x) = \dfrac{1}{x}$, $p_0(x) = x$ e $q(x) = \dfrac{1}{x^2}$ estão bem definidas no domínio $[1, 5]$, tem uma única solução.

Solução: De fato, as funções $p_1(x) = \frac{1}{x}$, $p_0 = x$ e $q(x) = \frac{1}{x^2}$ são todas contínuas em seu domínio e $2 \in [1, 5]$. Logo, pelo Teorema 3.1, existe apenas uma única solução para o problema de valor inicial definida no intervalo $[1, 5]$.

O exemplo a seguir trata-se de uma situação em que o Teorema da Existência e Unicidade não pode ser aplicado.

Exemplo 3.11. Verifique a unicidade da solução da equação diferencial

$$x^2y'' - 4xy' + (x^2 + 6)y = 0,$$

satisfazendo as condições iniciais $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$.

Solução: A princípio, iremos dividir a equação dada pelo termo x^2, obtendo:

$$y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{(x^2 + 6)}{x^2}y = 0. \tag{3.5}$$

Note que as condições iniciais são calculadas em $x = 0$ e que as funções $p_1(x) = -\frac{4}{x}$ e $p_0 = \frac{(x^2 + 6)}{x^2}$ não estão bem definidas em $x = 0$. Logo, o Teorema 3.1 não se aplica. No entanto, pode-se notar que para qualquer valor de $x \neq 0$ em um intervalo I tal que $0 \notin I$, o Teorema 3.1 garante a existência e unicidade de solução para a equação diferencial dada, satisfazendo as condições iniciais impostas.

Vejamos exemplos de problemas de valor inicial sem nenhuma solução e com infinitas soluções, respectivamente.

Exemplo 3.12. O problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' &= \frac{1}{x} \\ y(0) &= 0, \end{cases}$$

não admite solução. Com efeito, utilizando o Lema (2.1), a solução da equação diferencial é:

$$y(x) = \int \frac{1}{x} = dx = ln|x| + k,$$

$k \in \mathbb{R}$, a qual não está definida em $x = 0$. Portanto, ela não pode satisfazer a condição inicial imposta, ou seja, $y(0) = 0$.

Exemplo 3.13. O problema de valor inicial

$$\begin{cases} xy' &= 2y \\ y(0) &= 0, \end{cases}$$

possui infinitas soluções. Com efeito, a solução da equação diferencial é:

$$y(x) = kx^2,$$

com $k \in \mathbb{R}$, a qual satisfaz a condição inicial $y(0) = 0$ para todo $k \in \mathbb{R}$.

Observação 3.1. A continuidade das funções $p_i(x)$, com $i = 0, \ldots, n$, $q(x)$, bem como a hipótese $p_n(x) \neq 0$ para qualquer x no intervalo I, são de suma importância para que possamos aplicar o Teorema 3.1. Caso contrário, não podemos fazer nenhum tipo de afirmação sobre a existência e unicidade da solução de um dado problema de valor inicial, pois a sua solução pode não ser única ou até mesmo não existir.

3.1.3 Dependência e Independência Linear

As definições apresentadas a seguir são de grande importância no estudo das equações diferenciais lineares.

Definição 3.2. Se $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ são n funções definidas para quaisquer valores de x, em algum intervalo I, e $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ são constantes reais, a expressão

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \cdots + \alpha_n\varphi_n(x)$$

designa-se combinação linear das n funções dadas.

Definição 3.3. Dizemos que um conjunto de n funções $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ é linearmente dependente em um intervalo I, se existem constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ não todas nulas, tais que:

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \cdots + \alpha_n\varphi_n(x) = 0.$$

Do contrário, diremos que o conjunto das n funções é linearmente independente.

Exemplo 3.14. Mostre que as funções $\varphi_1(x) = sen(2x)$ e $\varphi_2(x) = sen(x)cos(x)$ são linearmente dependentes para quaisquer x reais.

Solução: Buscamos $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\alpha_1 sen(2x) + \alpha_2 sen(x)cos(x) \;=\; 0. \tag{3.6}$$

Como $sen(2x) = 2sen(x)cos(x)$, temos:

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 sen(x)cos(x) + \alpha_2 sen(x)cos(x) &= 0 \\ (2\alpha_1 + \alpha_2)sen(x)cos(x) &= 0. \end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ \alpha_2 &= -2\alpha_1. \end{aligned}$$

Logo, existem constantes α_1 e α_2, não todas nulas, de modo que vale a equação (3.6), para todo x real. Em particular, $\alpha_1 = \dfrac{1}{2}$ e $\alpha_2 = -1$ satisfazem a equação (3.6).

Exemplo 3.15. Mostre que as funções $\varphi_1(x) = x^2$ e $\varphi_2(x) = x|x|$ são linearmente independentes para quaisquer x reais.

Solução: Suponhamos que $\varphi_1(x) = x^2$ e $\varphi_2(x) = x|x|$ são linearmente dependentes. Logo, pela Definição 3.3, temos que existem constantes α_1, α_2 não todas nulas, tais que

$$\alpha_1 x^2 + \alpha_2 x|x| = 0.$$

Tomando $x = 1$ e $x = -1$, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \alpha_1 & + & \alpha_2 & = & 0 \\ \alpha_1 & - & \alpha_2 & = & 0. \end{cases}$$

Resolvendo-o, concluímos que $\alpha_1 = 0 = \alpha_2$, o que contradiz a nossa suposição. Portanto, $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ são linearmente independentes, para quaisquer x reais.

O próximo resultado fornece-nos um simples critério para determinar se um conjunto de funções é linearmente dependente ou linearmente independente. No entanto, antes introduziremos o conceito de wronskiano de um conjunto de funções, necessário para o critério.

Definição 3.4. Seja $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ um conjunto de n funções, cada uma diferenciável pelo menos $n-1$ vezes, em algum intervalo I. O determinante

$$W(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \ldots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \ldots & \varphi_n'(x) \\ \varphi_1''(x) & \varphi_2''(x) & \ldots & \varphi_n''(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

é dito wronskiano deste conjunto de n funções.

Teorema 3.2. Se as funções $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ são linearmente dependentes em um intervalo I, então o seu wronskiano é igual a zero para quaisquer x em I. Isto é,

$$W(\varphi_1(x), \varphi_2(x)) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Demonstração: Suponha que as funções φ_1 e φ_2 são linearmente dependentes em I. Logo, para quaisquer x em I tem-se, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_1(x) = \alpha \varphi_2(x).$$

Por outro lado, o wronskiano das funções φ_1 e φ_2 é dado por:

$$W(\varphi_1(x), \varphi_2(x)) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix}.$$

Como $\varphi_1(x) = \alpha\varphi_2(x)$, segue que

$$\begin{aligned} W\left(\varphi_1(x), \varphi_2(x)\right) &= \begin{vmatrix} \alpha\varphi_2(x) & \varphi_2(x) \\ \alpha\varphi_2'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix} \\ &= \alpha\varphi_2(x)\varphi_2'(x) - \alpha\varphi_2'(x)\varphi_2(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, $W\left(\varphi_1(x), \varphi_2(x)\right) = 0$. ■

Observação 3.2. O Teorema 3.2 pode ser generalizado da seguinte maneira: se as funções $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ são linearmente dependentes em um intervalo I, então o seu wronskiano é igual a zero para quaisquer x em I. Isto é,

$$W\left(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)\right) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \ldots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \ldots & \varphi_n'(x) \\ \varphi_1''(x) & \varphi_2''(x) & \ldots & \varphi_n''(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Corolário 3.1. Se $W\left(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)\right) \neq 0$ para algum x em I, então o conjunto das n funções $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ é linearmente independente em I.

Demonstração. Observe que o Corolário 3.1 é uma contrapositiva da generalização do Teorema 3.2. ■

Observação 3.3. A recíproca do Teorema 3.2, bem como a recíproca do Corolário 3.1, não são verdadeiras. De fato, as funções $\varphi(x) = x^3$ e $\varphi_2(x) = |x|^3$ são linearmente independentes, mas seu wronskiano é nulo.

Exemplo 3.16. As funções $\varphi_1(x) = sen^2(x)$ e $\varphi_2(x) = 1 - cos(2x)$ são linearmente dependentes no conjunto dos números reais, pelo Teorema 3.2,

$$W\left(sen^2(x), 1 - cos(2x)\right) = 0.$$

De fato, calculando o wronskiano das funções dadas, obtém-se:

$$
\begin{aligned}
W\left(sen^2(x), 1-cos(2x)\right) &= \begin{vmatrix} sen^2(x) & 1-cos(2x) \\ 2sen(x)cos(x) & 2sen(2x) \end{vmatrix} \\
&= 2sen^2(x)sen(2x) - 2sen(x)cos(x) + 2sen(x)cos(x)cos(2x) \\
&= 2sen^2(x)sen(2x) - sen(2x) + sen(2x)cos(2x) \\
&= sen(2x)(2sen^2(x) - 1 + cos(2x)) \\
&= sen(2x)(2sen^2(x) - 1 + cos^2(x) - sen^2(x)) \\
&= sen(2x)(sen^2(x) + cos^2(x) - 1) \\
&= sen(2x)(1-1) \\
&= sen(2x)\cdot 0 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Observação 3.4. Aqui, fizemos uso das seguintes relações trigonométricas:

$$sen(2x) = 2sen(x)cos(x), \quad cos(2x) = cos^2(x) - sen^2(x) \quad \text{e} \quad sen^2(x) + cos^2(x) = 1.$$

Exemplo 3.17. As funções $\varphi_1(x) = e^x$, $\varphi_2(x) = e^{-x}$ e $\varphi_3(x) = e^{4x}$ são linearmente independentes em qualquer intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$.

Solução: De fato,

$$
\begin{aligned}
W\left(e^x, e^{-x}, e^{4x}\right) &= \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & e^{4x} \\ e^x & -e^{-x} & 4e^{4x} \\ e^x & e^{-x} & 16e^{4x} \end{vmatrix} \\
&= -16e^{4x} + 4e^{4x} + e^{4x} - (-e^{4x} + 4e^{4x} + 16e^{4x}) \\
&= -30e^{4x}.
\end{aligned}
$$

Como o resultado obtido não se anula para nenhum valor de x em I, então, pelo Corolário 3.1, as funções $\varphi_1(x) = e^x$, $\varphi_2(x) = e^{-x}$ e $\varphi_3(x) = e^{4x}$ são linearmente independentes em I.

3.2 Solução Geral para Equações Diferenciais Lineares Homogêneas

Nessa seção, estamos motivados a encontrar a solução geral para a equação diferencial linear homogênea de ordem n

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_0(x)y = 0. \tag{3.7}$$

Iniciaremos a nossa procura enunciando o Teorema do Princípio da Superposição.

3.2.1 Princípio da Superposição

O teorema a seguir estabelece que a combinação linear de soluções de uma equação diferencial também será uma solução para a equação.

Teorema 3.3 (**Princípio da Superposição**)**.** Sejam $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$, soluções para a equação diferencial

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0, \tag{3.8}$$

em um intervalo I. Então, a combinação linear

$$\varphi = \alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x),$$

em que α_1 e α_2 são constantes arbitrárias, também é uma solução para a equação diferencial no intervalo I.

Demonstração. Considere $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ soluções para a equação diferencial

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0.$$

Isto é,

$$\varphi_1''(x) + p_1(x)\varphi_1'(x) + p_0(x)\varphi_1(x) = 0, \tag{3.9}$$

e

$$\varphi_2''(x) + p_1(x)\varphi_2'(x) + p_0(x)\varphi_2(x) = 0. \tag{3.10}$$

Suponhamos $\varphi = \alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x)$, e substituindo na equação homogênea, temos:

$$\begin{aligned}
& (\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2)'' + p_1(x)(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2)' + p_0(x)(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) \\
= \; & \alpha_1\varphi_1'' + \alpha_2\varphi_2'' + p_1(x)(\alpha_1\varphi_1' + \alpha_2\varphi_2') + p_0(x)(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) \\
= \; & \alpha_1 \underbrace{(\varphi_1'' + p_1(x)\varphi_1' + p_0(x)\varphi_1)}_{0 \text{ de } (3.9)} + \alpha_2 \underbrace{(\varphi_2'' + p_1(x)\varphi_2' + p_0(x)\varphi_2)}_{0 \text{ de } (3.10)} \\
= \; & \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 \\
= \; & 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $\varphi = \alpha_1\varphi_1(x) + \alpha\varphi_2(x)$ é uma solução para a equação diferencial. ■

Observação 3.5. O Teorema 3.3 pode ser generalizado da seguinte maneira: sejam $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$, soluções para a equação diferencial (3.7) em um intervalo I. Então, a combinação linear

$$\varphi = \alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \cdots + \alpha_n\varphi_n(x),$$

em que α_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, são constantes arbitrárias, também é uma solução para a equação diferencial no intervalo I.

Corolário 3.2. Um múltiplo $\varphi = \alpha_1\varphi_1(x)$, de uma solução $\varphi_1(x)$ da equação diferencial (3.7), é também uma solução da equação. A equação diferencial (3.7) sempre possui a solução trivial.

Demonstração. Considere a combinação linear

$$\varphi = \alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \cdots + \alpha_n\varphi_n(x),$$

uma solução para a equação diferencial em um intervalo I. Tomando $\alpha_i = 0$, $i = 2, 3, \ldots, n$, segue que $\varphi = \alpha_1\varphi_1$. Em particular, se $\alpha_i = 0$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, tem-se que $\varphi = 0$. ■

Exemplo 3.18. As funções

$$\varphi_1(t) = t^2 \text{ e } \varphi_2(t) = t^{-1}$$

são duas soluções para a equação diferencial

$$t^2y'' - 2y = 0$$

para $t > 0$. Portanto, pelo princípio da superposição, a combinação linear

$$\varphi(t) = \alpha_1t^2 + \alpha_2t^{-1}$$

é também uma solução para quaisquer α_1 e α_2.

Exemplo 3.19. A função $\varphi(x) = x^2$ é uma solução para a equação diferencial

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$$

no intervalo $(0, \infty)$. Portanto, pelo Corolário 3.2, $\varphi(x) = \alpha x^2$ é também uma solução da equação para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Em particular, se $\alpha = 0$, então $\varphi(x) = 0$ é solução da equação.

3.2.2 Soluções Linearmente Independentes

O próximo resultado estabelece uma condição necessária e suficiente para independência linear de um conjunto de soluções em algum intervalo I, de uma equação diferencial linear homogênea.

Teorema 3.4. Considere um conjunto com duas soluções φ_1, φ_2 para uma equação diferencial (3.8) em um intervalo I. Então, o conjunto de soluções é linearmente independente em I se,

$$W(\varphi_1, \varphi_2)(x) \neq 0$$

para quaisquer x em I.

Demonstração. Se $W(\varphi_1, \varphi_2)(x) \neq 0$, para todo x em I, segue de imediato do Corolário 3.1 que φ_1 e φ_2 são linearmente independentes. ■

Observação 3.6. O Teorema anterior pode ser generalizado da seguinte maneira: considere um conjunto com n soluções $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ para uma equação diferencial (3.7) em um intervalo I. Então, o conjunto de soluções é linearmente independente em I se,

$$W(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)(x) \neq 0$$

para quaisquer x em I.

A partir do resultado anterior, pode-se concluir que, quando $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, são n soluções para a equação diferencial (3.7) em um intervalo I, o wronskiano é identicamente nulo ou nunca se anula no intervalo.

O próximo resultado é extremamente importante, uma vez que ele nos fornece um algoritmo para determinar o wronskiano de uma equação diferencial.

Teorema 3.5 (Fórmula de Abel). Sejam $p_0(x)$ e $p_1(x)$ funções contínuas em um intervalo aberto I. Se $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ são soluções da equação diferencial (3.8), então o wronskiano $W(\varphi_1, \varphi_2)(x)$ é obtido pela fórmula:

$$W(\varphi_1, \varphi_n)(x) = k \cdot e^{-\int p_1(x)dx},$$

com k uma constante.

Demonstração. Pela definição,

$$W = \varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2. \tag{3.11}$$

Derivando a expressão (3.11), obtemos

$$\begin{aligned} W' &= \varphi_1'\varphi_2' + \varphi_1\varphi_2'' - \varphi_1''\varphi_2 - \varphi_1'\varphi_2' \\ W' &= \varphi_1\varphi_2'' - \varphi_1''\varphi_2. \end{aligned}$$

Como φ_1 e φ_2 são soluções da equação diferencial, segue que

$$\varphi_1'' + p_1(x)\varphi_1' + p_0(x)\varphi_1 = 0$$

e

$$\varphi_2'' + p_1(x)\varphi_2' + p_0(x)\varphi_2 = 0.$$

Daí,

$$\varphi_1'' = -p_1(x)\varphi_1' - p_0(x)\varphi_1$$

e

$$\varphi_2'' = -p_1(x)\varphi_2' - p_0(x)\varphi_2.$$

Substituindo φ_1'' e φ_2'' em W', obtemos:

$$W' = \varphi_1(-p_1(x)\varphi_2' - p_0(x)\varphi_2) - \varphi_2(-p_1(x)\varphi_1' - p_0(x)\varphi_1).$$

Desenvolvendo e pondo $p_1(x)$ e $p_0(x)$ em evidência na equação anterior, temos:

$$\begin{aligned} W' &= -p_1(x)\varphi_1\varphi_2' - p_0(x)\varphi_1\varphi_2 + p_1(x)\varphi_2\varphi_1' + p_0(x)\varphi_2\varphi_1 \\ W' &= -p_1(x)\varphi_1\varphi_2' + p_1(x)\varphi_2\varphi_1' \\ W' &= -p_1(x)(\varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2) \\ W' &= -p_1(x)W. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Utilizando a notação de Leibniz, escrevemos (3.12) da seguinte maneira:

$$\frac{dW}{dx} = -p_1(x)W \Rightarrow \frac{dW}{W} = -p_1(x)dx. \tag{3.13}$$

Resolvendo a equação diferencial para o wronskiano W, temos:

$$\begin{aligned} \int \frac{dW}{W} &= -\int p_1(x)dx \\ ln|W| &= -\int p_1(x)dx + k_1 \\ W(x) &= k \cdot e^{-\int p_1(x)dx}, \end{aligned}$$

em que $k = e^{k_1}$. ■

Observação 3.7. Para resolver a equação diferencial (3.13) utilizamos o Método da Separação de Variáveis, proveniente do estudo das equações diferenciais de primeira ordem. Mais detalhes podem ser encontrados em Yartey e Ribeiro (2017).

Observação 3.8. O Teorema anterior pode ser generalizado da seguinte maneira: sejam $p_0(x), \ldots, p_{n-1}(x)$ funções contínuas em um intervalo aberto I. Se $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ são soluções da equação diferencial (3.7), então o wronskiano $W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(x)$ é obtido pela fórmula:

$$W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(x) = k \cdot e^{-\int p_{n-1}(x)dx},$$

com k uma constante.

Exemplo 3.20. Calcule o wronskiano das duas soluções da equação diferencial

$$x^2y'' - xy' + (cos^2(x) + e^{sen(x)})y = 0, \;\; x > 0.$$

Solução: Como $x > 0$, dividindo a equação diferencial por x^2, podemos expressa-lá na forma:

$$y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}(cos^2(x) + e^{sen(x)})y = 0.$$

Daí $p_1(x) = -\dfrac{1}{x}$. Logo, pela Fórmula de Abel, tem-se

$$\begin{aligned} W &= k \cdot e^{-\int p_1(x)dx} \\ W &= k \cdot e^{\int \frac{1}{x}dx} \\ W &= k \cdot e^{ln(x)dx} \\ W &= kx. \end{aligned}$$

3.2.3 Conjunto Fundamental de Soluções e Solução Geral

Definição 3.5. Um conjunto $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ de n soluções linearmente independentes para a equação diferencial (3.7), em um intervalo I, é dito conjunto fundamental de soluções em I.

O teorema, a seguir, é uma resposta para o questionamento sobre a existência de um conjunto fundamental de soluções.

Teorema 3.6. Existe um conjunto fundamental de soluções para a equação (3.7), em um intervalo real I.

Demonstração. A prova com todos os detalhes pode ser encontrada em Zill e Cullen (2001, Volume 1, p.157). ■

Vejamos, agora, a definição de solução geral para uma equação diferencial linear homogênea de ordem n (3.7).

Definição 3.6. Sejam $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ n soluções linearmente independentes para a equação diferencial (3.7) em um intervalo I. A solução geral para esta equação em I é expressa por:

$$\varphi = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \cdots + \alpha_n\varphi_n,$$

em que α_i, com $i = 1, 2, \ldots, n$, são constantes arbitrárias.

Em outras palavras, a solução geral de uma equação diferencial (3.7) é a combinação linear de funções de um conjunto fundamental de soluções.

Teorema 3.7 (Teorema da Solução Geral). Se p_1 e p_0 são funções contínuas no intervalo aberto I e se $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ são duas soluções da equação diferencial (3.8) satisfazendo

$$W(\varphi_1, \varphi_2)(x_0) \neq 0$$

para algum ponto $x_0 \in I$, então qualquer outra solução de (3.8) no intervalo I pode ser escrita unicamente da forma

$$\varphi(x) = \alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x).$$

Demonstração. Sejam $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ duas soluções da equação diferencial (3.8) no intervalo I e seja Φ uma outra solução em I. Escolha um ponto x_0. Pelo Teorema 3.1 sabemos que existe uma e só uma solução $\varphi(x)$ da equação (3.8) tal que

$$\begin{cases} \varphi(x_0) &= \Phi(x_0) \\ \varphi'(x_0) &= \Phi'(x_0). \end{cases} \tag{3.14}$$

Portanto, se pudermos mostrar que a solução da forma

$$\varphi(x) = \alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x)$$

satisfaz as condições iniciais (3.14), então teremos que

$$\Phi(x) = \alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x)$$

é combinação linear de $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$. Logo, queremos mostrar que é possível escolher constantes α_1 e α_2 tais que:

$$\begin{cases} \alpha_1\varphi_1(x_0) + \alpha_2\varphi_2(x_0) & = & \varphi(x_0) \\ \alpha_1\varphi_1'(x_0) + \alpha_2\varphi_2'(x_0) & = & \varphi'(x_0) \end{cases}$$

Solucionando o sistema anterior para encontrar os valores das constantes α_1 e α_2 por meio do Método de Cramer, obtemos:

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} \varphi(x_0) & \varphi_2(x_0) \\ \varphi'(x_0) & \varphi_2'(x_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_1(x_0) & \varphi_2(x_0) \\ \varphi_1'(x_0) & \varphi_2'(x_0) \end{vmatrix}} \quad \text{e} \quad \alpha_2 = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_1(x_0) & \varphi(x_0) \\ \varphi_1'(x_0) & \varphi'(x_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_1(x_0) & \varphi_2(x_0) \\ \varphi_1'(x_0) & \varphi_2'(x_0) \end{vmatrix}}.$$

Note que a solução do sistema é viável quando α_1 e α_2 são as incógnitas, sob a condição de que:

$$W(\varphi_1(x), \varphi_2(x)) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x_0) & \varphi_2(x_0) \\ \varphi_1'(x_0) & \varphi_2'(x_0) \end{vmatrix} = \varphi_1(x_0)\varphi_2'(x_0) - \varphi_1'(x_0)\varphi_2(x_0) \neq 0.$$

Assim, é sempre possível representar qualquer solução da equação diferencial (3.8) como uma combinação linear de $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$, contanto que o determinante $W(\varphi_1(x), \varphi_2(x))$ seja diferente de zero. ■

Observação 3.9. O Teorema 3.7 pode ser estendido para um conjunto de n soluções da equação diferencial (3.7).

Vejamos alguns exemplos envolvendo a definição de conjunto fundamental de soluções e de solução geral.

Exemplo 3.21. Seja a equação diferencial

$$y'' - 9y = 0,$$

que possui como soluções as funções $\varphi_1(x) = e^{3x}$ e $\varphi_2(x) = e^{-3x}$ no intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. Mostre que as soluções da equação formam um conjunto fundamental e forme sua solução geral.

Solução: De fato,

$$\begin{aligned}
W\left(e^{3x}, e^{-3x}\right)(x) &= \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} \\
&= e^{3x} \cdot (-3e^{-3x}) - (e^{-3x} \cdot 3e^{3x}) \\
&= -3e^{-3x+3x} - 3e^{-3x+3x} \\
&= -3e^{0} - 3e^{0} \\
&= -3 - 3 \\
&= -6 \neq 0.
\end{aligned}$$

Portanto, as soluções formam um conjunto fundamental. Já a solução geral para a equação diferencial dada num intervalo I é

$$\varphi(x) = \alpha_1 e^{3x} + \alpha_2 e^{-3x},$$

com α_1 e α_2 constantes arbitrárias.

Exemplo 3.22. Mostrar que as soluções $\varphi_1(x) = cos(x)$ e $\varphi_2(x) = sen(x)$ da equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0,$$

num intervalo I, formam um conjunto fundamental. Escreva a sua solução geral.

Solução: De fato, como

$$\begin{aligned}
W\left(cos(x), sen(x)\right) &= \begin{vmatrix} cos(x) & sen(x) \\ -sen(x) & cos(x) \end{vmatrix} \\
&= cos(x) \cdot cos(x) - [sen(x) \cdot (-sen(x))] \\
&= cos^2(x) + sen^2(x) \\
&= 1 \neq 0.
\end{aligned}$$

Concluímos que as soluções formam um conjunto fundamental. Já a solução geral para a equação diferencial dada no intervalo I é

$$\varphi(x) = \alpha_1 cos(x) + \alpha_2 sen(x),$$

com α_1 e α_2 constantes arbitrárias.

Observação 3.10. Um conjunto fundamental de soluções gera o espaço vetorial de soluções para uma equação diferencial linear homogênea.

Observação 3.11. O número de funções que compõem o conjunto fundamental de soluções é igual à ordem da equação diferencial.

3.3 Equações Lineares Homogêneas com Coeficientes Constantes

Será mostrado, nessa seção, que uma equação linear homogênea com coeficientes constantes

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0, \tag{3.15}$$

em que $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ são constantes, tem solução geral na forma explícita, bem como uma maneira sistemática para determinar a solução geral dessa classe de equações diferenciais.

Pela natureza da equação (3.15), é de se conjecturar que qualquer função φ em um intervalo I, solução da equação diferencial, tenha a propriedade de suas derivadas serem múltiplas da própria função φ. Nesse sentido, devemos encontrar uma função que goze dessa propriedade. Isto é,

$$\frac{d^n \varphi(x)}{dx^n} = \alpha_n \varphi(x). \tag{3.16}$$

Considerando a função

$$\varphi(x) = e^{\lambda x},$$

temos que a propriedade (3.16) se verifica, pois:

$$\frac{d^n \varphi(x)}{dx^n} = \frac{d^n}{dx^n}(e^{\lambda x}) = \lambda^n e^{\lambda x} = \lambda^n \varphi(x) = \alpha_n \varphi(x),$$

com $\alpha_n = \lambda^n$. Assim, é natural supor que as soluções que procuramos para a equação (3.15) tenham a seguinte forma:

$$\varphi(x) = e^{\lambda x},$$

em que $\lambda \in \mathbb{C}$, donde para um determinado valor de λ, temos:

$$\varphi(x) = e^{\lambda x} \Rightarrow \frac{d\varphi}{dx} = \lambda e^{\lambda x} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \frac{d^{n-1}\varphi}{dx^{n-1}} = \lambda^{n-1} e^{\lambda x} \Rightarrow \frac{d^n \varphi}{dx^n} = \lambda^n e^{\lambda x}.$$

Substituindo as respectivas derivadas da função φ e a própria função na equação diferencial (3.15), obtém-se:

$$a_n \lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1} \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \cdots + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} = 0.$$

Pondo o termo $e^{\lambda x}$ em evidência na equação anterior, segue:

$$e^{\lambda x}(a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0) = 0.$$

Note que o produto acima é igual a zero, logo pelo menos um dos fatores desse produto é igual a zero. Por outro lado, a exponencial nunca se anula, portanto para qualquer valor x em um intervalo I, tem-se:

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0. \tag{3.17}$$

Observação 3.12. O polinômio de grau n

$$P(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

é chamado de polinômio característico associado à equação diferencial (3.15). Já a equação algébrica (3.17), é chamada de equação característica associada. Note que o grau do polinômio característico coincide com a ordem da equação diferencial linear homogênea com coeficientes constantes.

Exemplo 3.23. A equação

$$y''' - 7y'' + 15y' - 9y = 0$$

é uma equação diferencial linear com coeficientes constantes. O polinômio de grau 3

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 15\lambda - 9$$

é o polinômio característico associado e a equação algébrica

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 15\lambda - 9 = 0$$

é a equação característica associada.

Em resumo, as n raízes[2] da equação característica determinam as n soluções da equação diferencial (3.15). No que concerne à equação característica, podem ocorrer quatro situações: suas raízes são reais e distintas ou suas raízes são reais com multiplicidade ou algumas de suas raízes são complexas não reais distintas ou algumas de suas raízes complexas não reais com multiplicidade. A seguir analisaremos cada caso.

Caso 1: A equação característica associada admite raízes reais e distintas

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, n raízes reais distintas. Então

$$\varphi_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \varphi_2(x) = e^{\lambda_2 x}, \ldots, \varphi_{n-1}(x) = e^{\lambda_{n-1} x}, \varphi_n(x) = e^{\lambda_n x}$$

são n soluções distintas da equação diferencial (3.15).

É possível provar, calculando o wronskiano, que

$$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_{n-1} x}, e^{\lambda_n x}$$

são soluções linearmente independentes, portanto constituindo um conjunto fundamental de soluções.

Desse fato, conclui-se que

$$\varphi(x) = \alpha_1 e^{\lambda_1 x} + \alpha_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + \alpha_{n-1} e^{\lambda_{n-1} x} + \alpha_n e^{\lambda_n x}$$

é a solução geral da equação diferencial linear homogênea de coeficientes constantes (3.15).

[2]Segue do Teorema Fundamental da Álgebra que um polinômio de grau n, definido no conjunto dos números complexos, possui n raízes.

Exemplo 3.24. Determine a solução geral da equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0.$$

Solução: Temos

- Polinômio característico associado: $P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$;
- Equação característica associada: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$.

Para determinar a solução da equação diferencial dada, devemos encontrar as raízes da equação característica associada

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Utilizando o método da soma e do produto das raízes, obtém-se as seguintes raízes:

$$\lambda_1 = 1 \text{ e } \lambda_2 = 2.$$

Tratando-se de duas raízes reais e distintas, tem-se

$$\varphi_1(x) = e^{1x} \quad \text{e} \quad \varphi_2(x) = e^{2x}$$

duas soluções linearmente independentes da equação diferencial. Portanto, essas duas soluções consistem em um conjunto fundamental de soluções. Logo, a solução geral da equação dada é:

$$\varphi(x) = \alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{2x}, \text{ com } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 3.25. Encontre a solução para o PVI

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y & = & 0 \\ y(0) & = & -1 \\ \dfrac{dy}{dx}(0) & = & 0. \end{cases}$$

Solução: Calculando α_1 e α_2 de modo que

$$y(0) = -1 \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dx}(0) = 0,$$

temos

$$\begin{aligned} y(0) = -1 \quad &\Rightarrow \quad \alpha_1 e^{1\cdot 0} + \alpha_2 e^{2\cdot 0} = -1 \\ &\Rightarrow \quad \alpha_1 + \alpha_2 = -1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx}(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \alpha_1 e^{1\cdot 0} + 2\alpha_2 e^{2\cdot 0} = 0 \\ &\Rightarrow \quad \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0. \end{aligned}$$

Assim, obtém-se o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = -1 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0, \end{cases}$$

cuja solução é:

$$\alpha_1 = -2 \quad \text{e} \quad \alpha_2 = 1.$$

Assim, impondo as condições dadas, teremos a solução para o problema de valor inicial

$$y = -2e^x + e^{2x}.$$

Exemplo 3.26. Ache a solução geral da equação diferencial

$$y''' - 4y'' + y' + 6y = 0,$$

sabendo que $\varphi_1(x) = e^{-x}$ é uma de suas soluções.

Solução: Temos

- Polinômio característico associado: $P(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6$;
- Equação característica associada: $\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6 = 0$.

Com efeito, $\lambda_1 = -1$ é uma raiz da equação característica. Aplicando o dispositivo prático de Briot-Ruffini, obtém-se a seguinte fatoração:

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6 = (\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3).$$

Logo, as raízes da equação característica associada são os números reais e distintos

$$\lambda_1 = -1, \;\; \lambda_2 = 2 \quad \text{e} \quad \lambda_3 = 3.$$

As funções

$$\varphi_1(x) = e^{-x}, \;\; \varphi_2(x) = e^{2x} \quad \text{e} \quad \varphi_3(x) = e^{3x}$$

formam um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial. Sua solução geral é:

$$\varphi(x) = \alpha_1 e^{-x} + \alpha_2 e^{2x} + \alpha_3 e^{3x}, \text{ com } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}.$$

Caso 2: A equação característica associada admite raízes reais com multiplicidade

Suponhamos que λ é raiz real da equação característica associada (3.17) com multiplicidade k. Com essa raiz iremos construir k soluções linearmente independentes da equação diferencial (3.15) do seguinte modo:

$$\varphi_1(x) = e^{\lambda x}, \;\; \varphi_2(x) = xe^{\lambda x}, \;\; \varphi_3(x) = x^2 e^{\lambda x}, \;\; \ldots, \;\; \varphi_k(x) = x^{k-1} e^{\lambda x}.$$

A construção da solução geral é feita com todas as raízes da equação característica associada, inclusive as que não possuem multiplicidade. Desse modo, a solução geral escreve-se

$$\varphi(x) = \alpha_1 e^{\lambda x} + \alpha_2 x e^{\lambda x} + \alpha_3 x^2 e^{\lambda x} + \cdots + \alpha_k x^{k-1} e^{\lambda x} + \alpha_{k+1} e^{m_{k+1} x} + \cdots + \alpha_n e^{m_n x},$$

em que $m_{k+1}, m_{k+2}, \ldots, m_n$, são as demais raízes do polinômio.

Vejamos alguns exemplo de como determinar a solução geral no caso de raízes com multiplicidade.

Exemplo 3.27. Encontre a solução geral da equação diferencial

$$y''' - 4y'' - 3y' + 18y = 0,$$

sabendo que $\varphi_1(x) = e^{-2x}$ é uma solução.

Solução: Temos:

- Polinômio característico associado: $P(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 - 3\lambda + 18$;
- Equação característica associada: $\lambda^3 - 4\lambda^2 - 3\lambda + 18 = 0$.

Como $\lambda_1 = e^{-2x}$ é uma solução da equação diferencial, pode-se concluir que uma das raízes da equação característica associada é $\lambda_1 = -2$. Com isso, as demais raízes podem ser determinadas utilizando o dispositivo prático de Briot-Ruffini, obtendo-se $\lambda_2 = 3$ como raiz real de multiplicidade 2. Logo, as raízes da equação característica são:

$$\lambda_1 = -2 \text{ e } \lambda_2 = 3 \text{ (multiplicidade 2).}$$

Assim, as funções

$$\varphi_1(x) = e^{-2x}, \ \ \varphi_2(x) = e^{3x} \quad \text{e} \quad \varphi_3(x) = xe^{3x}$$

constituem um conjunto fundamental de soluções. Portanto, a solução geral da equação diferencial é:

$$\varphi(x) = \alpha_1 e^{-2x} + \alpha_2 e^{3x} + \alpha_3 x e^{3x}, \text{ com } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 3.28. Encontre a solução geral da equação diferencial

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 5\frac{d^3y}{dx^3} + 6\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} - 8y = 0,$$

sabendo que e^{-x} e e^{2x} são soluções.

Solução: Agindo de maneira análoga ao exemplo anterior, temos:

- Polinômio característico associado: $P(\lambda) = \lambda^4 - 5\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda - 8$;
- Equação característica associada: $\lambda^4 - 5\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda - 8 = 0$.

Sendo e^{-x} e e^{2x} soluções, então $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2$ são raízes da equação característica associada. Aplicando o método de Briot-Ruffini, conclui-se que as raízes da equação característica associada são:

$$\lambda_1 = -1 \text{ e } \lambda_2 = 2 \text{ (multiplicidade 3)}.$$

Assim, as funções

$$\varphi_1(x) = e^{-x}, \ \ \varphi_2(x) = e^{2x}, \ \ \varphi_3(x) = xe^{2x} \quad \text{e} \quad \varphi_4(x) = x^2e^{2x}$$

constituem um conjunto fundamental de soluções. Portanto, a solução geral da equação diferencial é

$$\varphi(x) = \alpha_1e^{-x} + \alpha_2e^{2x} + \alpha_3xe^{2x} + \alpha_4x^2e^{2x}, \text{ com } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}.$$

Caso 3: A equação característica associada admite raízes complexas não reais distintas

Começaremos a nossa análise recordando alguns resultados essenciais acerca dos números complexos para o nosso estudo.

Lema 3.1. Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, números complexos. Sendo $\overline{z} = a - bi$ e $\overline{w} = c - di$ seus conjugados, respectivamente, então:

(i) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$;

(ii) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$;

(iii) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

Demonstração. A prova com todos os detalhes pode ser encontrada em Iezzi e Hazza (2013, Volume 6, p.6). ■

Teorema 3.8. Seja

$$P(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n$$

um polinômio com coeficientes reais. Se $z = a + bi$ é uma raiz complexa de $P(t)$, então $\overline{z} = a - bi$ também é uma raiz do polinômio.

Demonstração. Seja

$$P(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n.$$

Supondo $P(z) = 0$, então:

$$\begin{aligned}
P(\bar{t}) &= a_0 + a_1\bar{t} + a_2(\bar{t})^2 + \cdots + a_n(\bar{t})^n \\
&= a_0 + a_1\bar{t} + a_2\overline{t^2} + \cdots + a_n\overline{t^n} \\
&= \overline{a_0} + \overline{a_1}\bar{t} + \overline{a_2}\overline{t^2} + \cdots + \overline{a_n}\overline{t^n} \\
&= \overline{a_0} + \overline{a_1}\bar{t} + \overline{a_2}\overline{t^2} + \cdots + \overline{a_n}\overline{t^n} \\
&= \overline{a_0} + \overline{a_1 t} + \overline{a_2 t^2} + \cdots + \overline{a_n t^n} \\
&= \overline{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n} \\
&= \overline{P(t)} \\
&= \bar{0} \\
&= 0 = P(\bar{z}).
\end{aligned}$$

■

Em outras palavas, se um polinômio com coeficientes reais admitir um número complexo como raiz, então o conjugado deste número será uma outra raiz para o polinômio em questão.

Agora, suponhamos que a equação característica associada (3.17) tenha raiz complexa $z = \beta + \theta i$, com multiplicidade $k = 1$. Pelo Teorema 3.8, já que os coeficientes da equação (3.17) são números reais, $\bar{z} = \beta - \theta i$ é uma outra raiz da equação característica. Assim, a solução geral da equação diferencial (3.15) que origina-se de z e $\bar{z}$ é:

$$\varphi(x) = c_1 e^{(\beta+\theta i)x} + c_2 e^{(\beta-\theta i)x} = e^{\beta x}(c_1 e^{i\theta x} + c_2 e^{-i\theta x}),$$

com β, θ, c_1 e c_2 constantes reais.

Observação 3.13. Um par de raízes complexas conjugadas gera um par de soluções linearmente independentes.

É conveniente, no entanto, expressar a solução geral que obtemos por meio de funções reais ao invés de funções complexas. Para tanto, recorreremos à fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} = cos(\theta) + isen(\theta),$$

em que θ é um número real não nulo. Segue da fórmula de Euler que

$$\begin{aligned}
e^{\beta x}(c_1 e^{i\theta x} + c_2 e^{-i\theta x}) &= e^{\beta x}[c_1(cos(\theta x) + isen(\theta x)) + c_2(cos(\theta x) - isen(\theta x))] \\
&= e^{\beta x}[(c_1 + c_2)cos(\theta x) + i(c_1 - c_2)sen(\theta x)].
\end{aligned}$$

Como c_1 e c_2 são constantes complexas arbitrárias, então tomando

$$c_1 = c_2 = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad c_1 = c_2 = -\frac{i}{2},$$

respectivamente, obtemos duas soluções para a equação diferencial (3.15):

$$\varphi_1 = e^{\beta x} cos(\theta x) \quad \text{e} \quad \varphi_2 = e^{\beta x} sen(\theta x).$$

Temos que φ_1 e φ_2 são funções linearmente independentes. De fato, se θ e β são números reais, $\theta \neq 0$, calculando o wronskiano, temos:

$$\begin{aligned} W(\varphi_1, \varphi_2) &= \begin{vmatrix} e^{\beta x} cos(\theta x) & e^{\beta x} sen(\theta x) \\ -\theta e^{\beta x} sen(\theta x) + \beta e^{\beta x} cos(\theta x) & \theta e^{\beta x} cos(\theta x) + \beta e^{\beta x} sen(\theta x) \end{vmatrix} \\ &= \theta e^{2\beta x} [cos^2(\theta x) + sen^2(\theta x)] \\ &= \theta e^{2\beta x} \neq 0. \end{aligned}$$

As funções acima, portanto, constituem um conjunto fundamental de soluções. Logo, a solução geral da equação diferencial (3.15), que corresponde às raízes complexas conjugadas distintas é:

$$\varphi(x) = e^{\beta x} [\alpha_1 cos(\theta x) + \alpha_2 sen(\theta x)].$$

Observação 3.14. Sem perda de generalidade, é comum assumir que $\theta > 0$.

Exemplo 3.29. Determine a solução geral da equação diferencial

$$y'' + y = 0; \quad x > 0.$$

Solução: Temos

- Polinômio característico associado: $P(\lambda) = \lambda^2 + 1$;
- Equação característica associada: $\lambda^2 + 1 = 0$.

Com efeito, as raízes da equação característica associada são:

$$\lambda_1 = 0 + i \text{ e } \lambda_2 = 0 - i.$$

Logo, $\beta = 0$ e $\theta = 1$ (Observação 3.14). Isto posto, um respectivo conjunto fundamental de soluções é

$$\varphi_1(x) = cos(x), \ \ \varphi_2(x) = sen(x).$$

A solução geral da equação diferencial é, portanto,

$$\varphi(x) = e^{0x}(\alpha_1 cos(x) + \alpha_2 sen(x)) = \alpha_1 cos(x) + \alpha_2 sen(x), \text{ com } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Os próximos exemplos ilustram como formar a solução geral da equação diferencial (3.15), quando parte da solução não corresponde a raízes complexas conjugadas.

Exemplo 3.30. Determine a solução geral da equação diferencial

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 0; \quad x > 0.$$

Solução: Temos

- Polinômio característico associado: $P(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda$;
- Equação característica associada: $\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda = 0$.

Com efeito, as raízes da equação característica associada são:

$$\lambda_1 = 0, \ \ \lambda_2 = -1 + i \ \ \text{e} \ \ \lambda_3 = -1 - i.$$

Logo, $\beta = -1$ e $\theta = 1$ (Observação 3.14). Isto posto, um respectivo conjunto fundamental de soluções é

$$\varphi_1 = e^{0x}, \ \ \varphi_2(x) = e^{-x}cos(x) \ \ \text{e} \ \ \varphi_3(x) = e^{-x}sen(x).$$

A solução geral da equação diferencial é, portanto,

$$\varphi(x) = \alpha_1 + e^{-x}(\alpha_2 cos(x) + \alpha_3 sen(x)), \ \text{com} \ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 3.31. Determine a solução geral da equação diferencial

$$\frac{d^4y}{dx^4} - y = 0.$$

Solução: Temos

- Polinômio característico associado: $P(\lambda) = \lambda^4 - 1$;
- Equação característica associada: $\lambda^4 - 1 = 0$.

Com efeito, as raízes da equação característica associada são:

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \ \ \lambda_3 = 0 + i \ \ \text{e} \ \ \lambda_3 = 0 - i.$$

Logo, $\beta = 0$ e $\theta = 1$ (Observação 3.14). Isto posto, um respectivo conjunto fundamental de soluções é

$$\varphi_1 = e^{-x}, \ \ \varphi_2 = e^{x}, \ \ \varphi_3(x) = cos(x) \ \ \text{e} \ \ \varphi_4(x) = sen(x).$$

A solução geral da equação diferencial é, portanto,

$$\varphi(x) = \alpha_1 e^{-x} + \alpha_2 e^{x} + \alpha_3 cos(x) + \alpha_4 sen(x), \ \text{com} \ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}.$$

Caso 4: A equação característica associada admite raízes complexas com multiplicidade

Vejamos o caso em que parte da solução geral origina-se de raízes complexas conjugadas com multiplicidade k. Consideremos a equação diferencial linear homogênea de ordem n com coeficientes constantes (3.15). Supondo que a sua equação característica associada possui raízes complexas conjugadas de multiplicidade k, então parte da solução geral correspondente a essas raízes é:

$$e^{\beta x}\left[\left(\alpha_1+\alpha_2 x+\cdots+\alpha_k x^{k-1}\right) cos(\theta x)+\left(\alpha_{k+1}+\alpha_{k+2} x+\cdots+\alpha_{2k} x^{k-1}\right) sen(\theta x)\right],$$

com β, θ e $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}$ números reais.

Para ilustrar o método vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 3.32. Determine a solução geral da equação diferencial

$$\frac{d^4 y}{dx^4}-4\frac{d^3 y}{dx^3}+14\frac{d^2 y}{dx^2}-20\frac{dy}{dx}+25y=0,$$

sabendo que $\lambda_1=1+2i$ é uma raiz da equação característica associada.

Solução: Temos:

- Polinômio característico associado: $P(\lambda)=\lambda^4-4\lambda^3+14\lambda^2-20\lambda+25$;
- Equação característica associada: $\lambda^4-4\lambda^3+14\lambda^2-20\lambda+25=0$.

Como $\lambda_1=1+2i$ é raiz da equação característica associada, segue, pelo Teorema 3.8, que $\lambda_2=1-2i$ também é uma raiz da equação característica. Aplicando o método prático de Briot-Ruffini, obtém-se a fatoração:

$$\begin{aligned}\lambda^4-4\lambda^3+14\lambda^2-20\lambda+25 &= [(\lambda-(1+2i)]\,[\lambda-(1-2i)](\lambda^2-2\lambda+5)\\ &= [(\lambda-1)^2+4](\lambda^2-2\lambda+5)\\ &= [(\lambda-1)^2+4]^2=0.\end{aligned}$$

Com efeito, as raízes da equação característica associada são:

$$\lambda_1=1+2i \text{ e } \lambda_2=1-2i,$$

ambas com multiplicidade $k=2$. Portanto, a solução geral da equação diferencial

$$\varphi(x)=e^x[(\alpha_1+\alpha_2 x)cos(2x)+(\alpha_3+\alpha_4 x)sen(2x)], \text{ com } \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\in\mathbb{R}.$$

3.4 Solução Geral para Equações Diferenciais Lineares não Homogêneas

Consideremos agora alguns resultados acerca das equações diferenciais lineares não homogêneas

$$\frac{d^n y}{dx^n}+p_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+p_1(x)\frac{dy}{dx}+p_0(x)y=q(x). \qquad (3.18)$$

Definição 3.7. Qualquer função φ_p, independente de parâmetros, satisfazendo a equação diferencial (3.18), é chamada de solução particular da equação diferencial.

Exemplo 3.33. Verifique se a função $\varphi(x) = 3$ é uma solução particular para a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 27,$$

para qualquer x real.

Solução: Com efeito, $\dfrac{d^2\varphi}{dx^2} = 0$, para todo x real. Agora, substituindo $\dfrac{d^2\varphi}{dx^2}$ e $\varphi(x)$ na equação diferencial dada, temos:

$$0 + 9 \cdot 3 = 27.$$

Portanto, $y_p = 3$ é uma solução particular da equação diferencial dada.

Exemplo 3.34. Verifique se a função $\varphi(x) = x^3 - x$ é uma solução particular para a equação diferencial

$$x^2y'' + 2xy' - 8y = 4x^3 + 6x,$$

para qualquer x real.

Solução: Com efeito,

$$\varphi'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow \varphi''(x) = 6x.$$

Daí,

$$\begin{aligned} x^2 \cdot 6x + 2x(3x^2 - 1) - 8(x^3 - x) &= 6x^3 + 6x^3 - 2x - 8x^3 + 8x \\ &= 12x^3 - 8x^3 + 8x - 2x \\ &= 4x^3 + 6x. \end{aligned}$$

Portanto, $y_p = x^3 - x$ é uma solução particular para a equação dada.

Teorema 3.9. Sejam $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ soluções da equação diferencial (3.7) em um intervalo I e seja φ_p uma solução particular de (3.18). Então,

$$\varphi = \alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \cdots + \alpha_n\varphi_n(x) + \varphi_p(x)$$

também será uma solução da equação (3.18) em I, para quaisquer constates $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

O Teorema 3.9 exprime que uma combinação linear formada pelas funções de um conjunto fundamental de soluções de uma equação diferencial homogênea e uma função que é solução particular de uma equação diferencial não homogênea associada à uma homogênea continua sendo solução da equação não homogênea. Este resultado é de grande relevância e irá nos permitir, juntamente com o próximo teorema, definir o conceito de solução geral para a equação (3.18).

Teorema 3.10. Sejam φ_p uma solução particular dada para a equação (3.18) em um intervalo I e $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ um conjunto fundamental de soluções da equação associada (3.7). Então, para qualquer solução $\Phi(x)$ da equação diferencial linear não homogênea, pode-se encontrar constantes $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ tais que:

$$\Phi = \beta_1\varphi_1(x) + \beta_2\varphi_2(x) + \cdots + \beta_n\varphi_n(x) + \varphi_p(x).$$

Demonstração. A prova com todos os detalhes pode ser encontrada em Zill e Cullen (2001, Volume 1, p.159). ■

Definição 3.8. Sejam φ_p uma solução particular para a equação diferencial (3.18) em um intervalo I e

$$\varphi_c(x) = \alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_1\varphi_2(x) + \cdots + \alpha_n\varphi_n(x),$$

a solução geral para a equação homogênea associada (3.7) em I. A solução geral para a equação diferencial linear não homogênea em I é definida por:

$$\varphi(x) = \varphi_c(x) + \varphi_p(x).$$

Observação 3.15. A combinação linear φ_c é chamada de função complementar. É comum utilizarmos a notação φ_h para representar a função complementar.

Em outros termos, a solução geral da equação (3.18) é dada por:

$$\varphi(x) = \varphi_c(x) + \varphi_p(x).$$

Exemplo 3.35. Por substituição, verificamos que

$$y_p = -\frac{1}{2}x - \frac{11}{12}$$

é uma solução particular para a equação diferencial

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 3x.$$

No entanto, para escrevermos a solução geral da equação diferencial dada devemos resolver a equação diferencial homogênea associada a ela, ou seja,

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$$

Temos:

- Polinômio característico associado: $P(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$;
- Equação característica associada: $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$.

Com efeito, $\lambda_1 = 1$ é uma raiz da equação característica. Aplicando o dispositivo prático de Briot-Ruffini, obtém-se a seguinte fatoração:

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3).$$

Logo, as raízes da equação característica associada são os números reais e distintos

$$\lambda_1 = 1, \ \ \lambda_2 = 2 \ \ \text{e} \ \ \lambda_3 = 3.$$

As funções

$$\varphi_1(x) = e^x, \ \ \varphi_2(x) = e^{2x} \ \ \text{e} \ \ \varphi_3(x) = e^{3x}$$

formam um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial homogênea associada. Sua solução geral é

$$\varphi_c = \alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{2x} + \alpha_3 e^{3x}.$$

Portanto, a solução geral da equação diferencial não homogênea será:

$$\varphi = \alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{2x} + \alpha_3 e^{3x} - \frac{1}{2}x - \frac{11}{12}, \ \text{com } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}.$$

Na próxima seção, estudaremos o método dos coeficientes a determinar para finalizar a teoria necessária acerca das equações diferenciais.

3.5 Equações Lineares não Homogêneas com Coeficientes Constantes

Consideremos a equação diferencial linear não homogênea de ordem n com coeficientes constantes:

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = q(x), \tag{3.19}$$

em que $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ são constantes. Sua solução geral é expressa por:

$$\varphi(x) = \varphi_c + \varphi_p,$$

em que φ_c é a solução geral da equação diferencial homogênea associada e φ_p é uma solução particular da equação (3.19).

Na Seção 3.3, estudamos uma maneira sistemática para encontrar a solução geral de uma equação diferencial homogênea com coeficientes constantes. Agora, voltaremos a nossa atenção na busca de uma abordagem sistemática para encontramos uma solução particular qualquer para a equação diferencial (3.19) e com isso possamos determinar a sua solução gral.

3.5.1 Método dos Coeficientes a Determinar

O método dos coeficientes a determinar é uma abordagem sistemática para determinarmos uma solução particular φ_p da equação diferencial (3.19).

Considere o polinômio de grau m:

$$P_m(x) = c_m x^m + \cdots + c_1 x + c_0.$$

Nas situações a seguir, sempre existe solução particular quando $q(x)$ está na forma indicada.

Caso 1: Quando $q(x) = P_m(x)$

Admitiremos como solução particular a função

$$\varphi_p = A_m x^m + \cdots + A_2 x^2 + A_1 x^1 + A_0,$$

com $A_m, \ldots, A_2, A1, A_0$ constantes reais.

Observação 3.16. Se $\lambda = 0$ é uma raiz de multiplicidade k da equação característica associada, então:

$$\varphi_p = x^k \left(A_m x^m + \cdots + A_2 x^2 + A_1 x^1 + A_0\right).$$

Exemplo 3.36. Determine a solução geral da equação diferencial

$$y'' - 5y' + 6y = 2x^2 - 1. \tag{3.20}$$

Solução:

Passo 1: Determinar a solução geral da equação diferencial homogênea associada:

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Temos:

- Polinômio característico associado: $P(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$;
- Equação característica associada: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$.

Com efeito, as raízes da equação característica associada são:

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 3.$$

Assim, as funções

$$\varphi_1(x) = e^{2x} \quad \text{e} \quad \varphi_2(x) = e^{3x}$$

constituem um conjunto fundamental de soluções. Portanto, a solução geral da equação diferencial homogênea associada é:

$$\varphi_c(x) = \alpha_1 e^{2x} + \alpha_2 e^{3x};\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Passo 2: Determinar uma solução particular da equação diferencial não homogênea dada.

Dado que $q(x) = 2x^2 - 1$ e $\lambda = 0$ não é raiz da equação característica associada, assumimos a solução particular na seguinte forma:

$$\varphi_p = Ax^2 + Bx + C.$$

Para determinar as constantes A, B e C, substituímos φ_p e suas respectivas derivadas na equação (3.20):

$$\varphi_p = Ax^2 + Bx + C \Rightarrow \varphi_p' = 2Ax + B \Rightarrow \varphi_p'' = 2A.$$

Ao substituirmos na equação, temos:

$$\begin{aligned} 2A - 5(2Ax + B) + 6(Ax^2 + Bx + C) &= 2x^2 - 1 \\ 2A - 10Ax - 5B + 6Ax^2 + 6Bx + 6C &= 2x^2 - 1 \\ 6Ax^2 + (6B - 10A)x + (2A - 5B + 6C) &= 2x^2 - 1. \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes, segue:

$$\begin{cases} 6A & & & = 2 \\ -10A & + \ 6B & & = 0 \\ 2A & - \ 5B & + \ 6C & = -1. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de equações lineares, obtemos:

$$A = \frac{1}{3}, \ \ B = \frac{5}{9} \ \ \text{e} \ \ C = \frac{5}{27}.$$

Portanto,

$$\varphi_p = \frac{x^2}{3} + \frac{5x}{9} + \frac{5}{27}.$$

A solução geral da equação diferencial não homogênea de coeficientes constantes dada é:

$$\varphi = \alpha_1 e^{2x} + \alpha_2 e^{3x} + \frac{x^2}{3} + \frac{5x}{9} + \frac{5}{27}; \ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 3.37. Determine a solução geral da equação diferencial

$$y''' - 4y' = 1 - 3x. \tag{3.21}$$

Solução: De maneira análoga ao exemplo anterior:

Passo 1: Determinar a solução geral da equação diferencial homogênea associada:

$$y''' - 4y' = 0.$$

Temos

- Polinômio característico associado: $P(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda$;

- Equação característica associada: $\lambda^3 - 4\lambda = 0$.

Com efeito, as raízes da equação característica associada são:

$$\lambda_1 = 0, \;\; \lambda_2 = -2 \quad \text{e} \quad \lambda_3 = 2.$$

Assim, as funções

$$\varphi_1(x) = 1, \;\; \varphi_2(x) = e^{-2x} \quad \text{e} \quad \varphi_3(x) = e^{2x}$$

constituem um conjunto fundamental de soluções. Portanto, a solução geral da equação diferencial homogênea associada é:

$$\varphi_c(x) = \alpha_1 + \alpha_2 e^{-2x} + \alpha_3 e^{2x}; \;\; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}.$$

Passo 2: Determinar uma solução particular da equação diferencial não homogênea dada.

Dado que $q(x) = 1 - 3x$ e $\lambda_1 = 0$ é raiz da equação característica associada de multiplicidade $k = 1$, assumimos a solução particular:

$$\begin{aligned} \varphi_p &= x(Ax + B) \\ &= Ax^2 + Bx. \end{aligned}$$

Para determinar as constantes A e B, substituímos φ_p e suas respectivas derivadas na equação diferencial (3.21). Logo,

$$\varphi_p = Ax^2 + Bx \Rightarrow \varphi_p' = 2Ax + B \Rightarrow \varphi_p'' = 2A \Rightarrow \varphi_p''' = 0.$$

Ao substituirmos na equação, temos:

$$\begin{aligned} 0 - 4(2Ax + B) &= 1 - 3x \\ -8Ax - 4B &= 1 - 3x. \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes, segue:

$$\begin{cases} -8A = -3 \\ -4B = 1. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de equações lineares, obtemos:

$$A = \frac{3}{8} \quad \text{e} \quad B = -\frac{1}{4}.$$

Portanto,

$$\varphi_p = \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{4}x.$$

A solução geral da equação diferencial não homogênea de coeficientes constantes dada é:

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 e^{-2x} + \alpha_3 e^{2x} + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{4}x; \;\; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}.$$

Caso 2: Quando $q(x) = P_m(x) \cdot e^x$

Admitiremos como solução particular a função

$$\varphi_p = x^k \left(A_m x^m + \cdots + A_1 x + A_0\right) e^{\alpha x},$$

com $A_m, \ldots, A_2, A1, A_0$ constantes reais e $\lambda = \alpha$ raiz da equação característica com multiplicidade k.

Observação 3.17. Em particular, se $q(x) = e^{\alpha x}$, admitiremos a seguinte função como solução particular:

$$\varphi_p = Ae^{\alpha x}.$$

Exemplo 3.38. Determine a solução da equação diferencial linear não homogênea com coeficientes constantes

$$y'' - 7y' + 12y = 3e^{-x}. \tag{3.22}$$

Solução:
Passo 1: Determinar a solução geral da equação diferencial homogênea associada:

$$y'' - 7y' + 12y = 0.$$

Temos

- Polinômio característico associado: $P(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 12$;
- Equação característica associada: $\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$.

Com efeito, as raízes da equação característica associada são:

$$\lambda_1 = 3 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 4.$$

Assim, as funções

$$\varphi_1(x) = e^{3x} \quad \text{e} \quad \varphi_2(x) = e^{4x}$$

constituem um conjunto fundamental de soluções. Portanto, a solução geral da equação diferencial homogênea associada é:

$$\varphi_c(x) = \alpha_1 e^{3x} + \alpha_2 e^{4x}; \ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Passo 2: Determinar uma solução particular da equação diferencial não homogênea dada.

Dado que $q(x) = 3e^{-x}$ e $\alpha = -1$ não é raiz da equação característica associada, assumimos a solução particular na seguinte forma:

$$\varphi_p = Ae^{-x}.$$

Para determinar a constante A, substituímos φ_p e suas respectivas derivadas na equação diferencial (3.22). Com efeito,

$$\varphi_p = Ae^{-x} \Rightarrow \varphi_p' = -Ae^{-x} \Rightarrow \varphi_p'' = Ae^{-x}.$$

Ao substituirmos na equação, temos:

$$\begin{aligned} Ae^{-x} - 7\cdot(-Ae^{-x}) + 12Ae^{-x} &= 3e^{-x} \\ Ae^{-x} + 7Ae^{-x} + 12Ae^{-x} &= 3e^{-x} \\ 20Ae^{-x} &= 3e^{-x}. \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes, segue

$$20A = 3 \Rightarrow A = \frac{3}{20}.$$

Portanto,

$$\varphi_p = \frac{3}{20}e^{-x}.$$

A solução geral da equação diferencial não homogênea com coeficientes constantes dada é:

$$\varphi = \alpha_1 e^{3x} + \alpha_2 e^{4x} + \frac{3}{20}e^{-x};\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 3.39. Determine a solução da equação diferencial linear não homogênea com coeficientes constantes

$$y'' - 7y' + 10y = 8e^{2x}. \tag{3.23}$$

Solução:
Passo 1: Determinar a solução geral da equação diferencial homogênea associada:

$$y'' - 7y' + 10y = 0.$$

Temos

- Polinômio característico associado: $P(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 10$;
- Equação característica associada: $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$.

Com efeito, as raízes da equação característica associada são:

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 5.$$

Assim, as funções

$$\varphi_1(x) = e^{2x} \quad \text{e} \quad \varphi_2(x) = e^{5x}$$

constituem um conjunto fundamental de soluções. Portanto, a solução geral da equação diferencial homogênea associada é:

$$\varphi_c(x) = \alpha_1 e^{2x} + \alpha_2 e^{5x};\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Passo 2: Determinar uma solução particular da equação diferencial não homogênea dada.

Dado que $q(x) = 8e^{2x}$ e $\alpha = 2$ é raiz da equação característica associada com multiplicidade $k = 1$, assumimos a solução particular na seguinte forma:

$$\varphi_p = Axe^{2x}.$$

Para determinar a constante A, substituímos φ_p e suas respectivas derivadas na equação diferencial (3.23). Com efeito,

$$\varphi_p = Axe^{2x} \Rightarrow \varphi_p' = Ae^{2x} + 2Axe^{2x} \Rightarrow \varphi_p'' = 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x}.$$

Substituindo na equação, temos:

$$\begin{aligned} 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x} - 7\left(Ae^{2x} + 2Axe^{2x}\right) + 10Axe^{2x} &= 8e^{2x} \\ 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x} - 7Ae^{2x} - 14Axe^{2x} + 10Axe^{2x} &= 8e^{2x} \\ -3Ae^{2x} &= 8e^{2x}. \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes, segue

$$-3A = 8 \Rightarrow A = -\frac{8}{3}.$$

Portanto,

$$\varphi_p = -\frac{8}{3}xe^{2x}.$$

A solução geral da equação diferencial não homogênea de coeficientes constantes dada é:

$$\varphi = \alpha_1 e^{2x} + \alpha_2 e^{5x} - \frac{8}{3}xe^{2x};\ \ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 3.40. Determine a função complementar φ_c e uma forma adequada para a solução particular φ_p da equação diferencial

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 10xe^x$$

sem avaliar as constantes em φ_p.

Solução:

(i) Determinando a função complementar.

Consideremos a equação diferencial homogênea associada:

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$$

Temos

- Polinômio característico associado: $P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1$;
- Equação característica associada: $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$.

Com efeito,

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3 = 0.$$

Logo, $\lambda = 1$ é raiz da equação característica associada de multiplicidade $k = 3$.

Assim, as funções

$$\varphi_1(x) = e^x, \ \ \varphi_2 = xe^x \ \ \text{e} \ \ \varphi_2(x) = x^2e^x$$

constituem um conjunto fundamental de soluções. Portanto, a solução geral da equação diferencial homogênea associada é:

$$\varphi_c = \alpha_1 e^x + \alpha_2 xe^x + \alpha_3 x^2 e^x; \ \ \alpha_1, \alpha_2, \alpha 3 \in \mathbb{R}.$$

(ii) Determinando a solução particular.

Dado que $q(x) = 10xe^x$ e $\alpha = 1$ é raiz da equação característica associada de multiplicidade 3, assumimos a solução particular na seguinte forma:

$$\varphi_p = x^3(A_1x + A_0)e^x.$$

Caso 3: Quando $\boldsymbol{q(x) = P_m(x)e^x cos(\beta x)}$ ou $\boldsymbol{q(x) = P_m(x)e^x sen(\beta x)}$

Neste caso, admitiremos como solução particular a função:

$$\varphi_p = x^k(A_m x^m + \cdots + A_1x + A_0)e^{\alpha x}cos(\beta x) + x^k(B_m x^m + \cdots + B_1x + B_0)e^{\alpha x}sen(\beta x),$$

onde $\lambda = \alpha \pm \beta i$ é solução da equação característica associada com multiplicidade k.

Exemplo 3.41. Resolver a equação diferencial

$$y'' - 4y' + 3y = 3sen(2x). \tag{3.24}$$

Passo 1: Determinar a solução geral da equação homogênea associada:

$$y'' - 4y' + 3 = 0.$$

Temos

- Polinômio característico associado: $P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3$;
- Equação característica associada: $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$.

Com efeito, as raízes da equação característica associada são:

$$\lambda_1 = 1 \ \ \text{e} \ \ \lambda_2 = 3.$$

Assim, as funções

$$\varphi_1(x) = e^x \ \ \text{e} \ \ \varphi_2(x) = e^{3x}$$

constituem um conjunto fundamental de soluções. Portanto, a solução geral da equação diferencial homogênea associada é:

$$\varphi_c(x) = \alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{3x}; \;\; \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Passo 2: Determinar uma solução particular da equação diferencial não homogênea dada.

Como $q(x) = 3sen(2x)$ e $\lambda = 0 \pm 2i$ não é raiz da equação característica associada, assumimos a solução particular da forma:

$$\varphi_p = Acos(2x) + Bsen(2x).$$

Para determinar as constantes A e B, substituímos φ_p e suas respectivas derivadas na equação diferencial (3.24). Com efeito,

$$\varphi_p' = -2Asen(2x) + 2Bcos(2x) \Rightarrow \varphi_p'' = -4Acos(2x) - 4Bsen(2x).$$

Ao substituirmos na equação e realizando as devidas simplificações, obtemos:

$$(-A - 8B)cos(2x) + (-B + 8A)sen(2x) = 3sen(2x).$$

Comparando os coeficientes, segue

$$\begin{cases} -A & - & 8B & = & 0 \\ 8A & - & B & = & 3. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de equações lineares, obtemos:

$$A = \frac{24}{65} \quad \text{e} \quad B = -\frac{3}{65}.$$

Portanto,

$$\varphi_p = \frac{24}{65}cos(2x) - \frac{3}{65}sen(2x).$$

A solução particular da equação diferencial não homogênea é:

$$\varphi = \alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{3x} + \frac{24}{65}cos(2x) - \frac{3}{65}sen(2x); \;\; \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 3.42. Determine a função complementar $\varphi_c(x)$ e a forma adequada para a solução particular $\varphi_p(x)$ da equação diferencial

$$y^{(7)} - 6y^{(6)} + 10y^{(5)} - 6y^{(4)} + 9y^{(3)} = q(x),$$

em que:

(i) $q(x) = (x^2 + 1)cos(x)$

(ii) $q(x) = x^2 e^{3x} cos(x)$,

sem avaliar as constantes em $\varphi_p(x)$.

Solução: Para determinar $\varphi(x)$ iremos resolver a equação diferencial homogênea:

$$y^7 - 6y^6 + 10y^5 - 6y^4 + 9y^3 = 0.$$

Temos

- Polinômio característico associado: $P(\lambda) = \lambda^7 - 6\lambda^6 + 10\lambda^5 - 6\lambda^4 + 9\lambda^3$;
- Equação característica associada: $\lambda^7 - 6\lambda^6 + 10\lambda^5 - 6\lambda^4 + 9\lambda^3 = 0$.

Com efeito, as raízes da equação característica associada são:

$$\begin{aligned}\lambda^7 - 6\lambda^6 + 10\lambda^5 - 6\lambda^4 + 9\lambda^3 &= \lambda^3(\lambda^4 - 6\lambda^3 + 10\lambda^2 - 6\lambda + 9)\\ &= \lambda^3(\lambda - 3)^2(\lambda^2 + 1).\end{aligned}$$

Logo,

$$\lambda^3(\lambda - 3)^2(\lambda^2 + 1) = 0.$$

Dessa forma, obtêm-se as seguintes raízes da equação característica associada:

$$\lambda_1 = 0, \ \ \lambda_2 = 3 \ \ \text{e} \ \ \lambda_3 = \pm i,$$

com multiplicidades $3, 2$ e 1 respectivamente.

Assim, as funções

$$\varphi_1 = 1, \varphi_2 = x, \varphi_3 = x^2, \varphi_4 = e^{3x}, \varphi_5 = xe^{3x}, \varphi_6 = cos(x) \ \text{e} \ \varphi_7 = sen(x)$$

constituem um conjunto fundamental de soluções. Portanto, a solução geral da equação diferencial homogênea associada é:

$$\varphi_c = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 e^{3x} + \alpha_5 x e^{3x} + \alpha_6 cos(x) + \alpha_7 sen(x); \ \ \alpha_i \in \mathbb{R}, \ \ i = 1, 2, \ldots 7.$$

Agora, iremos determinar as soluções particulares.

(i) Para $q(x) = (x^2 + 1)cos(x)$.

Como $\lambda = 0 \pm i$ é raiz da equação característica associada, assumiremos a solução particular na seguinte forma:

$$\varphi_p = x(A_2x^2 + A_1x + A_0)cos(x) + x(B_2x^2 + B_1x + B_0)sen(x).$$

(ii) Para $q(x) = x^2e^{3x}cos(x)$.

Como $\lambda = 3 \pm i$ não é raiz da equação característica associada, assumiremos a solução particular na seguinte forma:

$$\varphi_p = (A_2x^2 + A_1x + A_0)e^{3x}cos(x) + (B_2x^2 + B_1x + B_0)e^{3x}sen(x).$$

Neste capítulo, abordamos alguns métodos para solucionar equações diferenciais. No entanto, não tratamos do método da variação dos parâmetros, redução de ordem e EDO's exatas. O leitor interessado no tema poderá consultar as obras de Yartey e Ribeiro (2017) ou Zill e Cullen (2001, Volume 1).

Capítulo 4

Séries de Potências

Neste capítulo, faremos uma pausa no estudo das equações diferenciais ordinárias de ordem n e redirecionaremos nosso foco à análise da representação de funções como séries de potências. Em outros termos, estaremos analisando de que maneira as funções podem ser expressas como uma soma infinita de potências de x. A princípio, realizaremos uma rápida recapitulação dos resultados fundamentais relacionados às sequências e séries numéricas infinitas, os quais serão empregados à medida que abordarmos as séries de potências. Ademais, neste capítulo, é definido que $0^0 = 1$.

4.1 Sequências e Séries Numéricas

Iniciaremos esta seção com a exploração das sequências infinitas, uma vez que elas estabeleceram o fundamento para nossa investigação subsequente sobre séries. Para mais detalhes, consultar Guidorizzi (2013, Volume 4), Leithold (1994, Volume 2) ou Lima (2014, Volume 1).

Definição 4.1. Uma sequência ou sucessão de números reais é uma função $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n um número real a_n, denominado n-ésimo termo da sequência.

De maneira menos formal, a definição anterior nos esclarece que uma sequência equivale a uma lista de números reais dispostos em uma ordem específica. Ou seja,

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots.$$

Para indicar uma sequência de termos a_n, escrevemos:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots), \text{ ou } (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, \text{ ou ainda } (a_n).$$

É natural considerar o que acontece à medida que avançamos na sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. À medida que tomamos valores de n cada vez maiores, os termos da sequência se aproximam cada vez mais de um número real? Ou, por outro lado, os termos dessa sequência crescem ou decrescem indefinidamente ou os seus valores não se aproximam de nenhum número real? A resposta para esses questionamentos reside na definição a seguir.

Definição 4.2. Uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dita convergente se existe um número real L, tal que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Por complementaridade, diz-se que uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é divergente se ela não for convergente.

Dessa forma, para valores suficientemente grandes de n, quando uma sequência numérica converge para o número real L, seus termos se aproximam cada vez mais desse valor. No entanto, se a sequência diverge, seus termos não se aproximam de nenhum número real.

A partir de uma sequência de números reais, podemos sempre formar uma nova sequência pela adição sucessiva de seus termos. Sendo assim, dada uma sequência de termos, é possível construir a sequência das "somas parciais". A esta última sequência chamamos de série numérica infinita.

Definição 4.3. Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais e

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

uma nova sequência, denominada reduzidas ou sequência das somas parciais, construída a partir de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. A soma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

é chamada série numérica, ou simplesmente série. A parcela a_n é o n-ésimo termo ou termo geral da série.

De maneira menos rigorosa em termos matemáticos, uma série é uma soma de um número infinito de termos.

Definição 4.4. Dizemos que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

converge ao número real S, se $\lim_{n\to\infty} s_n = S$. Se o limite S não existir, diremos que a série diverge e não tem soma.

O limite S será chamado soma da série. Escrevemos então:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots.$$

Observação 4.1. Às vezes, é conveniente considerar séries do tipo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots,$$

que começam com a_0 em vez de a_1. Esse fato não deve ser objeto de grande preocupação para o nosso estudo, uma vez que a convergência e a divergência de uma série não estão relacionadas aos seus primeiros termos, mas sim ao comportamento dos termos finais, ou seja, ao limite dos seus termos quando n tende para o infinito, como afirma a proposição seguinte.

Proposição 4.1. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são duas séries infinitas que diferem somente pelos seus m primeiros termos (ou seja, $a_k = b_k$ se $k > m$), então ambas convergem ou ambas divergem.

Demonstração. A prova com todos os detalhes pode ser encontrada em Leithold (1994, Volume 2, p.711). ∎

Exemplo 4.1. Vamos considerar a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \tag{4.1}$$

que é divergente, como veremos adiante. Podemos então concluir que a série

$$3 + 5 + 7 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = 3 + 5 + 7 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \tag{4.2}$$

também será divergente. De fato, observe que a série (4.2) difere da série (4.1) somente nos quatro primeiros termos. Portanto, pela Proposição 4.1, podemos afirmar que ela é divergente.

De maneira geral, o estudo de séries concentra-se em determinar sua convergência, ou seja, em identificar se a série é convergente ou não. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 4.2. Vamos supor que tenhamos conhecimento da soma parcial da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ou seja,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{2n}{3n+5}.$$

Temos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} s_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{3n+5}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n\left(3+\frac{5}{n}\right)}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3+\frac{5}{n}}\right)\\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Portanto, a série é convergente e sua soma é igual $\frac{2}{3}$.

Exemplo 4.3. A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1} = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n + \cdots,$$

chamada de série geométrica, é convergente se $|a| < 1$, uma vez que indica a soma dos infinitos termos de uma Progressão Geométrica (PG), com primeiro termo 1 e razão a de módulo menor que 1. Como já sabemos, a soma S da série geométrica é dada por:

$$S = \frac{1}{1-a}.$$

Em contrapartida, quando $|a| \geq 1$, a série geométrica é divergente, conforme evidenciado por Leithold (1994, Volume 2, p.701).

Exemplo 4.4. A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots,$$

conhecida como série telescópica, converge para 1, ou seja, $S = 1$.

De fato, sendo

$$u_k = \frac{1}{k(k+1)},$$

temos, por frações parciais,

$$u_k = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Logo, escrevemos a soma parcial s_n, dos n primeiros somandos, como

$$
\begin{aligned}
s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} \\
&= 1 - \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}
$$

Tomando o limite de s_n para n tendendo ao infinito, temos:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} s_n &= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right).
\end{aligned}
$$

Sendo assim, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$.

Exemplo 4.5. A série de termos alternados

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots,$$

cujo termo geral é $a_n = (-1)^{n+1}$, é divergente, pois as somas parciais s_n valem 0 quando n é par e 1 quando n é ímpar. Portanto, não existe $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

O seguinte teorema estabelece que o limite do termo geral de uma série convergente tende a zero.

Teorema 4.1. Se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série convergente, então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Demonstração. Sejam

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

e

$$s_{n-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}.$$

Então,

$$s_n - s_{n-1} = a_n.$$

Por hipótese, a série é convergente e, portanto, existe o número real L de modo que:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = L.$$

Claramente, tem-se também

$$\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = L,$$

pois podemos retroceder elementos da sequência s_n sem que isso influencie o resultado do limite. Logo,

$$0 = L - L = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

■

Observe que o Teorema 4.1 é uma condição necessária, mas não suficiente, para convergência de séries. Por exemplo, sabemos que a série do Exemplo 4.4 é convergente. Consequentemente, de acordo com teorema citado anteriormente, o limite do termo geral dessa série tende a zero.

Consideremos, agora, a seguinte série conhecida como série harmônica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots.$$

O termo geral desta série tende a zero; no entanto, a série harmônica é divergente. De fato, observe que podemos decompor a série em infinitas parcelas, e cada uma dessas parcelas tem um valor de pelo menos $\frac{1}{2}$. Ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{16}\right)}_{\geq \frac{1}{2}} + \cdots.$$

Note que cada elemento dentro de um par de parênteses é maior ou igual ao último elemento dentro desse mesmo par de parênteses. Portanto, cada agrupamento vale, no mínimo, o produto do último termo pela quantidade de elementos do agrupamento, resultando sempre em $\frac{1}{2}$. Logo, temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = \infty.$$

Isso mostra que a série harmônica é, de fato, divergente, o que nos permite afirmar que a recíproca do Teorema 4.1 não é verdadeira.

Vejamos uma consequência interessante do Teorema 4.1, que nos fornece uma maneira ágil de atestar a divergência de séries.

Corolário 4.1. Se o limite do termo geral de uma série não tende a zero, então a série é divergente.

Demonstração. É uma contrapositiva do Teorema 4.1. ■

Exemplo 4.6. Sabemos que o limite $\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}$ não existe. Logo, pelo Corolário 4.1, segue que a série de termos alternados

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} = 1-1+1-1+1-1+1-1+\cdots$$

é divergente.

4.2 Testes de Convergência e Divergência

Nosso próximo passo é apresentar um conjunto de testes que nos permita compreender a convergência de séries. É comum na literatura começar abordando testes para séries cujos termos são não-negativos, a saber: teste da comparação, teste da comparação no limite e o teste da integral. No entanto, aqui iremos nos concentrar exclusivamente no teste da comparação e no teste de Leibniz. Este último é utilizado para verificar a convergência de séries cujos sinais dos termos são alternados e que cumprem outras hipóteses, antes de avançarmos para testes aplicáveis a séries de termos quaisquer.

4.2.1 Teste da Comparação

Se todos os termos de uma série infinita forem não negativos, a sequência das somas parciais será não-decrescente. Com base nisso, enuncia-se o seguinte lema.

Lema 4.1. Uma série de termos não negativos será convergente se, e somente se, sua sequência de somas parciais tiver um limitante superior.

Demonstração. A prova com todos os detalhes pode ser encontrada em Leithold (1994, Volume 2, p.715). ■

O próximo teorema é conhecido como Teste da Comparação. De certa forma, se tivermos duas séries cujas sequências numéricas que as compõem têm uma sendo maior do que a outra, o critério nos permite "transmitir" informações sobre a convergência ou a divergência dessas séries ao compará-las.

Teorema 4.2 (Teste da Comparação). Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ séries de termos não negativos, com $0 \le a_n \le b_n$. Então, tem-se:

(i) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ for divergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é divergente;

(ii) Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ for convergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

Demonstração. Sejam (s_n) e (t_n) a sequência das somas parciais de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, respectivamente. Ou seja,

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \quad \text{e} \quad t_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n.$$

As sequências (s_n) e (t_n) são crescentes, pois estamos somando termos nulos ou positivos. Além disso,

$$0 \leq a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = s_n \leq t_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

(i) O fato de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ser divergente implica que s_n tende ao infinito. Por outro lado, s_n é menor ou igual a t_n, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ também é divergente.

(ii) Agora suponha que a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ seja convergente. Temos:

$$0 \leq s_n \leq t_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n = T, \;\; T \in \mathbb{R},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Então s_n é crescente e limitada superiormente. Logo, pelo Lema 4.1, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente. ■

A ideia central do Teste da Comparação é comparar uma série dada com outra cuja convergência ou divergência já conhecemos.

Exemplo 4.7. A série harmônica generalizada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha} + \cdots,$$

com α uma constante, é convergente se $\alpha > 1$.

De fato, note que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right)}_{\leq \frac{2}{2^\alpha}} + \underbrace{\left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}\right)}_{\leq \frac{4}{4^\alpha}} + \underbrace{\left(\frac{1}{8^\alpha} + \frac{1}{9^\alpha} + \cdots + \frac{1}{15^\alpha}\right)}_{\leq \frac{8}{8^\alpha}} + \cdots.$$

Portanto, temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq 1 + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{4}{4^\alpha} + \frac{8}{8^\alpha} + \cdots .$$

Observe que a série à direita é uma série geométrica, cujo primeiro termo é 1 e sua razão é $\frac{2}{2^\alpha} < 1$, pois $\alpha > 1$. Sabemos que toda série geométrica com módulo da razão menor do que 1 é convergente. Assim sendo, pelo item (ii) do Teorema 4.2, a série harmônica generalizada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ é convergente para todo $\alpha > 1$.

Exemplo 4.8. A série harmônica generalizada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha} + \cdots ,$$

com α uma constante, é divergente se $0 < \alpha < 1$.

De fato, se $\alpha < 1$, então $n^\alpha < n$. Assim, $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$, para todo n natural. Como a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente, segue, pelo item (i) do Teorema 4.2, que a série harmônica generalizada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ é divergente, para todo $0 < \alpha < 1$.

Exemplo 4.9. Verifique se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$ é convergente ou divergente.

Solução: Note que para todo $n \geq 1$, temos:

$$2^n + 1 > 2^n.$$

Deste modo,

$$\frac{1}{2^n + 1} < \frac{1}{2^n}.$$

Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ é convergente, pois é uma série geométrica de razão $\frac{1}{2}$, pelo item (ii) do Teorema 4.2, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$ também é convergente.

4.2.2 Teste de Convergência para Séries Alternadas

Vejamos, agora, um teorema que nos permite analisar a convergência de séries cujos termos são alternadamente positivos e negativos, ou seja, as séries alternadas.

Teorema 4.3 (Teste de Leibniz). Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência monótona[3] decrescente que tende a zero, então a série alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \cdots$$

é convergente.

Demonstração. A prova com todos os detalhes pode ser encontrada em Leithold (1994, Volume 2, p.728). ■

Vejamos algumas aplicações do Teorema 4.3.

Exemplo 4.10. Prove que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

é convergente.

Solução: De fato, a série dada pode ser escrita como $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$, com $a_n = \frac{1}{n}$, que é uma sequência monótona decrescente, pois

$$a_{n+1} < a_n \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}.$$

Além disso,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0,$$

cumprindo todas as hipóteses do Teorema de Leibniz.

Exemplo 4.11. Verifique as hipóteses do Teorema de Leibniz para a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n = 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots.$$

Em seguida, conclua se é possível analisar a convergência da série utilizando esse teste.

Solução: Como

$$a_{n+1} > a_n \Rightarrow n+1 > n,$$

a sequência $a_n = n$ é crescente. Além disso, a sequência não tende a zero. Portanto, não é possível utilizar o Teorema de Leibniz.

[3] Uma sequência (a_n) é dita monótona quando se tem $a_n \leq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ ou então $a_n \geq a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

4.2.3 Teste da Razão e Teste da Raiz

Vimos alguns testes de convergência para séries com termos não negativos e séries alternadas. No entanto, o que ocorre quando os sinais dos termos sofrem variações irregulares? Vamos explorar dois testes de convergência úteis em situações desse tipo. Para isso, é necessário compreender o conceito de convergência absoluta e convergência condicional.

Definição 4.5. Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é dita absolutamente convergente quando a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é convergente.

Exemplo 4.12. Verifique se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(n)}{n^2}$ é absolutamente convergente.

Solução: Note que, para todo $n \geq 1$,

$$\left|\frac{sen(n)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Sabemos que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

é convergente, pois é a série harmônica generalizada, com $\alpha = 2 > 1$. Pelo Teste da Comparação, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{sen(n)}{n^2}\right|$ é convergente. Logo, pela Definição 4.5, a série dada é absolutamente convergente.

O próximo teorema estabelece que se uma série for absolutamente convergente, então ela também será convergente. Mas antes, iremos enfatizar duas proposições imediatas das séries, as quais surgem a partir das propriedades dos limites de sequências convergentes. Essas propriedades podem ser examinadas em profundidade em Leithold (1994, Volume 2, p.694).

Proposição 4.2. Seja λ um número real dado. Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ for convergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ será convergente e $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Demonstração. Temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \lambda a_n = \lambda \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

■

Proposição 4.3. Se as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ forem convergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ será convergente e

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Demonstração. Temos

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}(a_n+b_n)=\lim_{k\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{k}a_n+\sum_{n=1}^{k}b_n\right).$$

Daí

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}a_n+\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}b_n.$$

Portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n.$$

■

Observação 4.2. A Proposição 4.3 também é válida para a diferença de duas séries convergentes.

Usaremos essas duas proposições para demonstrar o próximo teorema e também ao analisar o método da série de potências.

Teorema 4.4. Se a série $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ for convergente, então $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ também será convergente.

Demonstração. Temos, para todo $n\in\mathbb{N}$,

$$-a_n\leq|a_n|\leq a_n\Rightarrow -a_n+a_n\leq|a_n|+a_n\leq a_n+a_n\Rightarrow 0\leq|a_n|+a_n\leq 2|a_n|.$$

Por hipótese, $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ é convergente. Assim, pela Proposição 4.2, a série $\sum_{n=1}^{\infty}2|a_n|$ é convergente. Portanto, pelo Teste da Comparação, a série $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|+a_n$ também será convergente. Mas $a_n=(|a_n|+a_n)-|a_n|$, então:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+a_n)-\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \tag{4.3}$$

é uma diferença de duas séries convergentes e, portanto, vale a Proposição 4.3. Portanto, série (4.3) é convergente. ■

Não vale a recíproca do Teorema 4.4. Observe que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

é convergente, pois cumpre todas as hipóteses do Teorema de Leibniz. No entanto, essa série não é absolutamente convergente. De fato,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

que é a série harmônica, que como já sabemos, é divergente. Essa série será dita condicionalmente convergente.

Definição 4.6. Uma série convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é dita condicionalmente convergente quando a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é divergente.

O teorema a seguir, chamado Teste da Razão, é muito útil na determinação da convergência absoluta de uma série dada. Adicionalmente, veremos por meio de exemplos que este critério é geralmente conclusivo quando o termo de ordem n na série contém um exponencial ou um fatorial.

Teorema 4.5 (Teste da Razão ou Teste de D'Alembert). Seja a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ com $a_n \neq 0$ para todo n natural. Suponhamos que $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ exista, finito ou infinito. Seja

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Nessas condições, temos:

(i) se $L < 1$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será absolutamente convergente;

(ii) se $L > 1$ ou $L = \infty$ a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será divergente;

(iii) se $L = 1$, nada podemos afirmar.

Demonstração. A prova com todos os detalhes pode ser encontrada em Guidorizzi (2013, Volume 4, p.79). ■

Exemplo 4.13. Verifique se a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{2^n}$ é convergente.

Solução: Sejam $a_n = (-1)^{n+1}\frac{n}{2^n}$ e $a_{n+1} = (-1)^{n+2}\frac{n+1}{2^{n+1}}$, temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^{n+2}(n+1)}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{(-1)^{n+1}n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} \\
&= \frac{1}{2} < 1.
\end{aligned}$$

Logo, a série é absolutamente convergente e, portanto, pelo Teorema 4.4, ela é convergente.

Exemplo 4.14. Prove que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n!}$ é convergente.

Solução: Sendo $a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{2^n}{n!}$ e $a_{n+1} = (-1)^{n+2}\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}$, temos:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{(-1)^{n+1}2^n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}2^{n+1}}{(n+1)n!}\cdot\frac{n!}{(-1)^{n+1}2^n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1} \\
&= 0 < 1.
\end{aligned}
$$

Logo, a série é absolutamente convergente e, portanto, pelo Teorema 4.4, ela é convergente.

Exemplo 4.15. Já sabemos que a série harmônica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ é divergente. No entanto, ao aplicarmos o Teste da Razão, não podemos afirmar nada sobre a convergência ou divergência da série harmônica.

Com efeito,

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\cdot n\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1.
\end{aligned}
$$

O teorema a seguir, conhecido como Teste da Raiz, é útil quando lidamos com potências de ordem n e possui bastante similaridade com o Teste da Razão. Sua demonstração segue uma lógica análoga à do Teste da Razão.

Teorema 4.6 (Teste da Raiz ou Teste de Cauchy). Seja a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ com $a_n \neq 0$ para todo n natural. Suponhamos que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ exista, finito ou infinito. Seja

$$L = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}.$$

Nessas condições, temos:

(i) se $L < 1$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será absolutamente convergente;

(ii) se $L > 1$ ou $L = \infty$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será divergente;

(iii) se $L = 1$, nada podemos afirmar.

Exemplo 4.16. Prove que a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{3^{2n+1}}{n^{2n}}$ é convergente.

Solução: Sendo $a_n = (-1)^n \dfrac{3^{2n+1}}{n^{2n}}$, temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|(-1)^n \frac{3^{2n+1}}{n^{2n}}\right|} \\
&= \lim_{n\to\infty} |\sqrt[n]{(-1)^n}| \cdot \sqrt[n]{\frac{3^{2n+1}}{n^{2n}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3^{2n+1}}{n^{2n}}\right)^{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3^{2+\frac{1}{n}}}{n^2} \\
&= 0 < 1.
\end{aligned}$$

Logo, a série é absolutamente convergente e, portanto, pelo Teorema 4.6, ela é convergente.

Observação 4.3. Note que os Exemplos 4.13, 4.14 e 4.16 podem ser resolvidos utilizando o Teste de Leibniz.

4.3 Séries de Potências

Na seção anterior, analisamos séries que possuíam termos constantes. Agora, abordaremos séries cujos termos são não constantes, conhecidas como séries de potências. Utilizaremos a teoria de convergência de séries numéricas estudadas anteriormente para analisar a convergência das séries de potências.

Definição 4.7. Uma série de potências é uma série do tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n = c_0 + c_1(x - x_0) + \cdots + c_n(x - x_0)^n + \cdots, \tag{4.4}$$

em que c_n são os coeficientes, x_0 é um número real dado e x é uma variável real. Dizemos que essa série foi desenvolvida em torno de x_0.

Observação 4.4. Fica convencionado, neste estudo, que $(x - x_0)^0 = 1$ para todo x_0 real.

O fato de haver a translação $(x - x_0)$ não afetará os resultados que estudaremos. Logo, podemos assumir que $x_0 = 0$. Assim, obtemos o caso particular da série de potências (4.4):

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + \cdots. \tag{4.5}$$

Notemos que para cada valor de x no qual a série (4.5) converge, corresponderá a uma soma específica. Portanto, uma série de potências define uma função f (soma da série de potências), expressa por:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

O domínio abrange todos os valores de x para os quais a série converge, denominado intervalo de convergência.

Nesse sentido, um questionamento relevante sobre séries de potências diz respeito à sua convergência, ou seja, quais valores de x fazem com que a série convirja ou divirja? Vejamos um primeiro exemplo acerca da convergência de uma série de potências.

Exemplo 4.17. Se considerarmos $c_n = 1$ para todo n, a série (4.5) se torna a série geométrica de razão x, ou seja,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + \cdots + x^n + \cdots$$

que já sabemos, pelo Exemplo 4.3, que converge quando $|x| < 1$ e diverge quando $|x| \geq 1$. Portanto, o seu intervalo de convergência será $I = (-1, 1)$. Ademais, a série converge para a soma $S = \dfrac{1}{1-x}$ no seu intervalo de convergência. Logo, a série de potências dada define a função f, tal que $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ e $|x| < 1$.

O teorema subsequente ressalta uma característica fundamental das séries de potências. Ele afirma que o intervalo de convergência de uma série de potências é simétrico.

Teorema 4.7. Se a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ for convergente para $x = x_1$, com $x_1 \neq 0$, então a série convergirá absolutamente para todo x em $I = (-|x_1|, |x_1|)$, ou seja, $|x| < |x_1|$.

Demonstração. Por hipótese, a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ é convergente. Portanto,

$$\lim_{n \to \infty} c_n x_1^n = 0.$$

Logo, se tomarmos $\varepsilon = 1$, existe um natural $p > 0$ tal que para todo $n \geq p$, $|c_n x_1^n| \leq 1$. Como

$$\begin{aligned} |c_n x^n| &= \left| c_n x_1^n \cdot \frac{x^n}{x_1^n} \right| \\ &= |c_n x_1^n| \left| \frac{x}{x_1} \right|^n, \end{aligned}$$

segue que, para todo x e para todo $n \geq p$,

$$|c_n x^n| \leq \left|\frac{x}{x_1}\right|^n.$$

Para $|x| < |x_1|$, a série geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_1}\right|^n$$

de razão $\frac{x}{x_1}$ é convergente. Logo, do Teste da Comparação, a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ é absolutamente convergente para todo x, com $|x| < |x_1|$. ■

Exemplo 4.18. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n}$ converge quando $x = -1$.

De fato, quando $x = -1$, temos a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, que sabemos, pelo Exemplo 4.10, ser convergente. Mas, pelo Teorema 4.7, a série de potências dada converge absolutamente para todo x no intervalo $(-1, 1)$.

Vejamos um corolário do Teorema 4.7.

Corolário 4.2. Se a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ for divergente para $x = x_2$, então a série divergirá para todo x tal que $|x| > |x_2|$.

Demonstração. Suponha que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ seja convergente para algum valor x tal que $|x| > |x_2|$. Segue, pelo Teorema 4.7, que a série deve convergir quando $x = x_2$. No entanto, isso é um absurdo, pois, por hipótese, a série é divergente. Logo, a série de potências dada é divergente para todo valor de x tal que $|x| > |x_2|$. ■

Para ilustrar o Corolário 4.2, vejamos novamente o Exemplo 4.18. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n}$ diverge quando $x = 1$, pois a série dada se reduz à série harmônica, que é divergente. Logo, para todo valor de x tal que $|x| > 1$, a série é divergente.

Em uma série de potências, existem apenas três possibilidades em relação ao intervalo de convergência: ou é degenerado[4], ou é infinito, ou é finito. O teorema a seguir confirma essa afirmação.

[4]Um intervalo é dito degenerado quando os seus extremos coincidem.

Teorema 4.8. Seja a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Existem três possibilidades:

(i) A série converge absolutamente apenas quando $x = 0$;

(ii) A série converge para todo x;

(iii) Existe um número real $R > 0$ tal que a série converge absolutamente para todo x no intervalo $(-R, R)$ e diverge para todo x, com $|x| > R$.

Demonstração. A prova com todos os detalhes pode ser encontrada em Guidorizzi (2013, Volume 4, p.131). ■

Observação 4.5. O número R no caso (iii) do Teorema 4.8 é chamado raio de convergência.

Observação 4.6. Nos extremos $-R$ e R a série de potências poderá divergir ou convergir. É necessário verificá-los.

Veremos que na prática, o intervalo de convergência é necessariamente do tipo:

$$I = \{0\}; \;\; I = \mathbb{R}; \;\; I = (-R, R) \;\text{ ou }\; I = (-R, R] \;\text{ ou }\; I = [-R, R) \;\text{ ou }\; I = [-R, R].$$

Exemplo 4.19. Para a série de potências do Exemplo 4.18, o raio de convergência é $R = 1$, já o intervalo de convergência é $[-1, 1)$. De fato, para $x = -1$, temos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ que já sabemos ser convergente. Já para $x = 1$, temos a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, que vimos ser divergente.

Vamos agora analisar alguns exemplos de aplicação do Teorema 4.8. Ao mesmo tempo, utilizaremos os testes de convergência discutidos na seção anterior, com ênfase nos Testes da Razão e da Raiz.

Exemplo 4.20. Determinar o intervalo de convergência e o raio da série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3 + 1}$.

Solução: Sejam $a_n = \frac{x^n}{n^3 + 1}$ e $a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^3 + 1}$. Aplicando o Teste da Razão, teremos:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)^3+1}}{\frac{x^n}{n^3+1}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^3+1}\cdot\frac{(n^3+1)}{x^n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x(n^3+1)}{(n+1)^3+1}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}|x|\,\frac{(n^3+1)}{(n+1)^3+1} \\
&= |x|\lim_{n\to\infty}\frac{(n^3+1)}{(n+1)^3+1}.
\end{aligned}
$$

Sabe-se que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n^3+1)}{(n+1)^3+1} = 1.$$

Logo,

$$|x|\lim_{n\to\infty}\frac{(n^3+1)}{(n+1)^3+1} = |x|\cdot 1 = |x|.$$

A série de potências será absolutamente convergente se $|x| < 1$, isto é, se $-1 < x < 1$. Verificando a convergência da série em seus extremos, tem-se:

- Quando $x = 1$, a série fica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+1}$, que é absolutamente convergente. De fato, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ é convergente, pois é uma série harmônica generalizada, com $\alpha = 3$. Como
$$\frac{1}{n^3+1} < \frac{1}{n^3}$$
para todo $n \in \mathbb{N}$, segue, do Teste da Comparação, que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+1}$ também é absolutamente convergente.

- Quando $x = -1$, a série fica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+1}$ que é absolutamente convergente. De fato, observe que
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^3+1}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+1}$$
a qual sabemos ser convergente.

Portanto, o intervalo de convergência é $I = [-1, 1]$ e o raio de convergência é $R = 1$.

Exemplo 4.21. Determinar o intervalo de convergência e o raio da série de potências $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^n}$.

Solução: Seja $a_n = \dfrac{(x-2)^n}{n^n}$. Aplicando o Teste da Raiz, teremos:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} |\sqrt[n]{a_n}| &= \lim_{n\to\infty} \left| \sqrt[n]{\frac{(x-2)^n}{n^n}} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-2)}{n} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x-2}{n} \right| \\
&= |x-2| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.
\end{aligned}$$

A série de potências será absolutamente convergente para todo x real. Portanto, o intervalo de convergência é $I = (-\infty, \infty)$ e o raio de convergência é $R = \infty$.

O teorema enunciado a seguir nos fornece uma fórmula para o cálculo do raio de convergência de algumas séries de potências e, consequentemente, uma maneira mais prática de determinar o intervalo de convergência da série.

Proposição 4.4. Seja a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, com $c_n \neq 0$. Se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = L$, então o raio de convergência é dado pela fórmula $R = \dfrac{1}{L}$.

Demonstração. Seja $a_n = c_n x^n$. Aplicando o Teste da Razão, temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}x^{n+1}}{c_n x^n} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} |x| \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \\
&= |x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|.
\end{aligned}$$

Pelo Teste da Razão, segue que a série convergirá absolutamente para todo x, tal que,

$$|x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| < 1.$$

Mas, por hipótese,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = L.$$

Logo,

$$|x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| < 1 \Rightarrow |x| \cdot L < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{L} = R.$$

■

Observação 4.7. Como R é um limite e supondo que esse limite existe, finito ou infinito, fica estabelecido que quando $L = 0$, então $R = \infty$, e quando $L = \infty$, então $R = 0$.

Vejamos alguns exemplos de aplicação da Proposição 4.4.

Exemplo 4.22. Vimos que o raio de convergência da série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3+1}$$

é $R = 1$. Sendo $c_n = \dfrac{1}{n^3+1}$, $c_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)^3+1}$ e utilizando a Proposição 4.4, temos:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{n^3+1}{(n+1)^3+1} \right| = 1.$$

Logo, o raio de convergência é $R = \dfrac{1}{1} = 1$.

Exemplo 4.23. Determine o domínio da função f definida por $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$.

Solução: Iremos determinar o seu raio de convergência.

Sendo $c_n = n^n$ e $c_{n+1} = (n+1)^{n+1}$, temos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n \cdot (n+1)}{n^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} (n+1) \frac{(n+1)^n}{n^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} (n+1) \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} (n+1) \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \\
&= e \cdot \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty.
\end{aligned}$$

Assim, resulta que $R = 0$. Portanto, a série converge apenas para $x = 0$. O domínio de f é $\{0\}$, o que significa que tal função só está definida para $x = 0$.

Exemplo 4.24. Determine o domínio da função f definida por $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Solução: Iremos determinar o seu raio de convergência.

Sejam $c_n = \dfrac{1}{n!}$ e $c_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!}$, temos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)} = 0.
\end{aligned}$$

Assim, resulta que $R = \infty$. Portanto, a série converge para todo x. O domínio de f é $\mathbb{R}$.

4.4 Representação de Funções como Séries de Potências

A nossa próxima etapa será estabelecer uma "ponte" entre as funções e suas expressões algébricas através das séries de potências, já que frequentemente é mais conveniente lidar diretamente com as séries do que com as funções que elas representam.

Como vimos anteriormente, a soma de uma série de potências define uma função $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ cujo domínio é o intervalo de convergência da série. Suponha que estejamos interessados em derivar tais funções. O teorema a seguir nos assegura que essas funções são diferenciáveis e que sua derivada pode ser obtida derivando o termo geral da série que a define.

Esse é um resultado de extrema importância, e é para alcançá-lo que estudamos toda a teoria de séries até o momento.

Teorema 4.9 (Derivação termo a termo). Suponha que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ tenha raio de convergência $R > 0$ e I seja o seu intervalo de convergência. Se f é uma função dada por

$$\begin{aligned}
f : I &\to \mathbb{R} \\
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,
\end{aligned}$$

então f é derivável, e portanto contínua, em $(-R, R)$ e sua derivada é obtida derivando a série termo a termo, ou seja,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots.$$

Demonstração. A prova com todos os detalhes pode ser encontrada em Leithold (1994, Volume 2, p.755). ■

De modo geral, a função f admite derivadas de todas as ordens no intervalo $(-R, R)$. Além disso,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \Rightarrow f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} \Rightarrow f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} \Rightarrow \cdots.$$

Exemplo 4.25. Seja uma função f definida pela série de potências $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$.

a) Ache o domínio de f;

b) Encontre a série de potências que define a função f' e determine seu domínio.

Solução:

a) O domínio de f é o intervalo de convergência da série que ela define. Logo, sendo $c_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$ e $c_{n+1} = \dfrac{1}{(n+2)^2}$, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+2)^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+2)^2}. \end{aligned}$$

Note que, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+2)^2} = 1$. Portanto, o raio de convergência da série dada é igual 1. Como o intervalo de convergência é simétrico, a série converge no intervalo $(-1, 1)$. Verificando a convergência nas extremidades do intervalo, segue que:

- Quando $x = 1$, a série fica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$, que é convergente, pois é a série harmônica generalizada com $\alpha = 2$.
- Quando $x = -1$, a série fica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}$, que é absolutamente convergente, pois

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2},$$

que vimos ser convergente.

Portanto, o domínio da função f é o intervalo $I = [-1, 1]$.

b) Temos, pelo Teorema 4.9, que:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{(n+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)}.$$

Ademais, $f'(x)$ existe para todo x no intervalo $(-1, 1)$.

Consideremos agora a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)}$, então:

- Quando $x = 1$, temos a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)}$, que é divergente. De fato, como já vimos,
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$
é a série harmônica, cujo primeiro termo é 1.
- Quando $x = -1$, a série fica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)}$, que é convergente, pois cumpre todas as hipóteses do Teorema de Leibniz.

Portanto, o domínio da função f' para todo x é o intervalo $[-1, 1)$.

Observação 4.8. O fato de a série de potências que define a função f' ter o mesmo raio de convergência que a série que define a função f não implica necessariamente o mesmo intervalo de convergência, o que significa que as funções f e f' podem não ter o mesmo domínio.

Exemplo 4.26. Represente a função $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ como uma série de potências.

Solução: Derivando cada lado da equação

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

obtemos:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}.$$

Podemos trocar n por $n+1$ e escrever a função f como $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$.

Exemplo 4.27. Mostre que para todos os valores reais de x,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots.$$

Solução: Sendo $c_n = \dfrac{1}{n!}$ e $c_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!}$, temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)n!} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)} = 0.
\end{aligned}$$

Logo, $R=\infty$ e, portanto, a série converge absolutamente para todo x real. Assim, seja f uma função definida por:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},$$

cujo domínio é o conjunto dos números reais. Então, pelo Teorema 4.9, para todos os valores reais de x temos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n(n-1)!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.
\end{aligned}$$

Podemos trocar $n-1$ por n e escrevemos a função f' como

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Logo, $f'(x)=f(x)$. Assim sendo, a função f satisfaz a equação diferencial $\dfrac{dy}{dx}=y$, cuja solução geral é $\varphi(x)=ke^x$, com $k\in\mathbb{R}$, como vimos na Seção 2.2. Note que $f(0)=1$; consequentemente, $k=1$, e, portanto, $f(x)=e^x$, como queríamos.

O exemplo anterior sugere que é possível encontrar a solução de uma equação diferencial por meio de uma série de potências. Este tema será abordado no próximo capítulo deste estudo. No entanto, o próximo teorema nos permitirá definir a analiticidade de uma função, que será de grande valia para o desenvolvimento do capítulo posterior.

Teorema 4.10. Seja a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ com raio de convergência R, finito ou infinito. Se

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots,$$

então $c_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Demonstração. Como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots,$$

segue que

$$f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n 0^n = c_0 + c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0^2 + \cdots = c_0.$$

Temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots = c_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n c_n x^{n-1} \\ f''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} = 2 \cdot 1 c_2 + \cdots = 2 \cdot 1 c_2 + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} \end{aligned}$$

e assim por diante, até a derivada de ordem k, isto é,

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) c_n x^{n-k} \\ &= k! c_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) c_n x^{n-k}. \end{aligned}$$

Assim, para todo $k \geq 1$, $f^{(k)}(0) = k! c_k$. Ou seja, para todo n, $f^{(n)}(0) = n! c_n$. Portanto, $c_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$. ■

Do Teorema 4.10, a série de potências que define f pode ser escrita como:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots. \tag{4.6}$$

De modo geral, se considerarmos a função f definida pela série de potências em $(x - x_0)$, ou seja,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n,$$

então a série de potências (4.6) fica:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} x^n = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \cdots. \tag{4.7}$$

A série de potências (4.7) é chamada série de Taylor desenvolvida em torno x_0. Já a série de potências (4.6) é um caso particular da série de Taylor, conhecida como série de Maclaurin.

Exemplo 4.28. Ache a série de Maclaurin da função $f(x) = sen(x)$, para todo x real. Utilize a série encontrada para representar a função $g(x) = cos(x)$ como uma série de Maclaurin.

Solução: Se $f(x) = sen(x)$, então:

$$f'(x) = cos(x) \Rightarrow f''(x) = -sen(x) \Rightarrow f'''(x) = -cos(x) \Rightarrow f^{(4)}(x) = sen(x).$$

Dado que as derivadas se repetem em um ciclo de quatro termos, podemos expressar a série de Maclaurin da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

O próximo passo é mostrar que a série de potências obtida é convergente para todo x real. De fato, sendo $c_n = \dfrac{1}{(2n+1)!}$ e $c_{n+1} = \dfrac{1}{(2n+3)!}$, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(2n+3)!}}{\frac{1}{(2n+1)!}}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+1)!}{(2n+3)!}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+3)(2n+2)} = 0. \end{aligned}$$

Como $R = \dfrac{1}{L}$, concluímos que $R = \infty$. Portanto, a série de Maclaurin obtida é convergente para todo x real. Assim, podemos escrever a função seno como a seguinte série:

$$sen(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Com base na série acima, podemos obter a série de Maclaurin para a função $cos(x)$, para todo x real. Do Teorema 4.9, segue:

$$cos(x) = [sen(x)]' = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots,$$

para todo x real.

Definição 4.8. Uma função f é dita analítica se ela puder ser expressa como uma série de Taylor com raio R, finito ou infinito.

As funções $sen(x)$ e $cos(x)$ são exemplos de funções analíticas, pois podemos representá-las como uma série de Taylor.

Lema 4.2. Se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$, então $c_n = 0$, para todo n natural.

Demonstração. Seja $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Temos, por hipótese, que $f(x) = 0$, para todo x em que a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ seja convergente. Então, as n-ésimas derivadas da função f em $x = 0$ são nulas. Isto é, $f^{(n)}(0) = 0$, para todo $n \geq 1$. Como $c_0 = f(0) = 0$, segue, do Teorema 4.10, que $a_n = 0$, para todo n natural. ∎

O próximo teorema é o cerne para o método da série de potências, que será aplicado na solução de equações diferenciais com coeficientes variáveis. Ele nos afirma que, em uma igualdade de séries convergentes, todos os seus termos são idênticos.

Teorema 4.11 (Princípio da Identidade entre Séries). Sejam $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ e $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ duas séries de potências convergentes. Se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$, então $c_n = d_n$, para todo n natural.

Demonstração. De fato,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (c_n - d_n) x^n = 0.$$

Segue, pelo Lema 4.2, que

$$c_n - d_n = 0 \Rightarrow c_n = d_n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. ∎

Concluímos este capítulo com uma observação crucial sobre o índice de um somatório. Observe que o índice n utilizado é uma variável auxiliar que não tem nenhum significado prático. Portanto, podemos realizar manipulações nessa variável, ou seja, efetuar mudanças no índice conforme for conveniente, como foi feito nos Exemplos 4.26 e 4.27. Esse processo é conhecido como deslocamento de índice do somatório.

Vejamos um exemplo com detalhes. Suponhamos que estejamos interessados em expressar a série de potências

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1) c_n x^{n-2} = 12c_2 x^0 + 20c_3 x + 30c_4 x^2 + \cdots,$$

como uma série em que o termo geral envolve x^n. Podemos realizar um deslocamento de índice. Observe que para efetuar o deslocamento, devemos somar duas unidades a todos os termos de n. Ou seja,

$$\begin{aligned} \sum_{n+2=2}^{\infty} ((n+2)+2)((n+2)+1)c_{n+2}x^{(n+2)-2} &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+4)(n+3)c_{n+2}x^n \\ &= 12c_2x^0 + 20c_3x + 30c_4x^2 + \cdots. \end{aligned}$$

Note que ao realizarmos o deslocamento de índice do somatório, obtemos duas séries idênticas, porém com "roupagens" distintas.

Capítulo 5

Método da Série de Potências

Nosso objetivo, para este capítulo, será conectar a teoria de séries de potências com a teoria acerca das equações diferenciais. Em vista disso, concentraremos nosso estudo no método da série de potências, o qual nos ajudará a obter a solução de uma equação diferencial na forma de uma expansão em série.

Ademais, daremos ênfase às equações diferenciais lineares com coeficientes variáveis, uma vez que muitas dessas equações não podem ser resolvidas com a mesma "facilidade" com a qual resolvemos as equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes.

Em geral, não é razoável esperar que a solução de uma equação diferencial com coeficientes variáveis possa ser expressa em termos das funções elementares, já que estas não constituem um universo suficientemente grande para expressar as soluções dessa classe de equações.

No entanto, vale ressaltar um caso especial de equação diferencial com coeficientes variáveis, designado equação de Cauchy-Euler, cuja solução pode ser sempre expressa em termos das funções elementares. Porém, não iremos nos aprofundar na teoria acerca das equações de Cauchy-Euler; o leitor interessado poderá encontrar detalhes sobre essa classe de equações em (ZILL; CULLEN, 2001, Volume 1).

5.1 A Essência do Método da Série de Potências

O método da série de potências consiste basicamente em supor a existência de uma possível solução na forma de série, em seguida derivar termo a termo essa possível solução a quantidade de vezes que for necessária. Por fim, substituir a série e suas respectivas derivadas na equação diferencial. Com isso, calcula-se os coeficientes da série e, portanto, obtém-se a solução em série de potências para a equação diferencial.

Para compreendermos o funcionamento do método da série de potências, o qual é, por sua vez, simples e intuitivo, consideremos alguns exemplos.

Exemplo 5.1. Encontre a solução da equação diferencial

$$y'' + y = 0 \tag{5.1}$$

na forma de série de potências em torno de $x_0 = 0$.

Solução: Suponhamos que

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{5.2}$$

seja solução para equação diferencial (5.1). Derivando a série (5.2) termo a termo duas vezes, temos:

$$\varphi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \Rightarrow \varphi''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}.$$

Substituindo φ e φ'' na equação (5.1), obtemos a seguinte igualdade:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0. \tag{5.3}$$

Agora, gostaríamos de somar as duas séries em (5.3). Para isso, devemos realizar um deslocamento de índice, ou seja, fazer $n = k + 2$ na primeira série e $n = k$ na segunda. A igualdade (5.3) torna-se

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0.$$

Somando as séries termo a termo, segue que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k+2)(k+1) c_{k+2} + c_k] x^k = 0. \tag{5.4}$$

Portanto, pelo Teorema 4.11, temos:

$$(k+2)(k+1) c_{k+2} + c_k = 0. \tag{5.5}$$

Da equação (5.5), obtemos uma relação de recorrência que determina uma fórmula para c_k. Como $(k+2)(k+1) \neq 0$ para todos os valores de k, podemos escrever a equação (5.5) como:

$$c_{k+2} = \frac{-c_k}{(k+2)(k+1)}.$$

Iterando essa última fórmula, temos:

$$k = 0, \qquad c_2 = \frac{-c_0}{2 \cdot 1}$$

$$k = 1, \qquad c_3 = \frac{-c_1}{3 \cdot 2}$$

$$k = 2, \qquad c_4 = \frac{-c_2}{4 \cdot 3} \Rightarrow c_4 = \frac{c_0}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$k = 3, \qquad c_5 = \frac{-c_3}{5 \cdot 4} \Rightarrow c_5 = \frac{c_1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

e assim sucessivamente.

Observe que os coeficientes de índices pares estão relacionados entre si. Isto é, c_2 está relacionado com c_0, c_4 está relacionado com c_2 e assim por diante. De maneira análoga, os coeficientes de índices ímpares estão relacionados, ou seja, c_3 está relacionado com c_1, c_5 está relacionado com c_3 e assim por diante.

Em vista disso, para os coeficientes c_k cujos índices são pares, temos:

$$c_{2n} = (-1)^n \frac{c_0}{(2n)!}.$$

Por outro lado, para os coeficientes c_k cujos índices são ímpares, temos:

$$c_{2n+1} = (-1)^n \frac{c_1}{(2n+1)!}.$$

Com isso, podemos escrever que a solução geral da equação diferencial (5.1) é dada por:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{c_0}{(2n)!}x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{c_1}{(2n+1)!}x^{2n+1} \\ &= c_0 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + c_1 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}. \end{aligned}$$

Note que as séries que compõem a função φ são aquelas analisadas no Exemplo 4.28. Portanto, podemos afirmar que as séries envolvidas são convergentes. Além disso, conforme a Proposição 4.3, segue-se que a soma das séries é convergente para qualquer valor de x real. Assim, a solução obtida é válida em toda reta real, com c_0 e c_1 constantes arbitrárias. Ademais, segue do Exemplo 3.22 que as séries que compõe a solução encontrada são linearmente independentes e, portanto, formam um conjunto fundamental de soluções.

Exemplo 5.2. Encontre a solução da equação diferencial

$$y' - 2xy = 0 \tag{5.6}$$

na forma de série de potências em torno de $x_0 = 0$.

Solução: Suponhamos que

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{5.7}$$

seja solução para equação diferencial (5.6). Derivando a série (5.7) termo a termo uma vez, temos:

$$\varphi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}.$$

Substituindo φ e φ' na equação (5.6), obtemos a seguinte igualdade:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} - 2x\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0. \tag{5.8}$$

Com o intuito de somar as duas séries, escrevemos (5.8) como:

$$1 \cdot c_1 x^0 + \sum_{n=2}^{\infty} nc_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n x^{n+1} = 0. \tag{5.9}$$

Fazendo $n = k+1$ na primeira série e $n = k-1$ na segunda. A igualdade (5.9) torna-se

$$c_1 + \sum_{k=1}^{\infty}(k+1)c_{k+1}x^k - \sum_{k=1}^{\infty} 2c_{k-1}x^k = 0.$$

Somando as séries termo a termo, segue que:

$$c_1 + \sum_{k=1}^{\infty}[(k+1)c_{k+1} - 2c_{k-1}]x^k = 0. \tag{5.10}$$

Portanto, pelo Teorema 4.11, temos:

$$c_1 = 0 \quad \text{e} \quad (k+1)c_{k+1} - 2c_{k-1} = 0. \tag{5.11}$$

Da equação (5.11), obtemos uma relação de recorrência que determina uma fórmula para c_k. Como $k+1 \neq 0$ para todos os valores de k, podemos escrever a equação (5.11) como:

$$c_{k+1} = \frac{2c_{k-1}}{(k+1)}.$$

Iterando essa última fórmula, temos:

$$k = 1, \qquad c_2 = \frac{2c_0}{2} \Rightarrow c_2 = c_0$$

$$k = 2, \qquad c_3 = \frac{2c_1}{3} \Rightarrow c_3 = 0$$

$$k = 3, \qquad c_4 = \frac{2c_2}{4} \Rightarrow c_4 = \frac{c_0}{2 \cdot 1}$$

$$k = 4, \qquad c_5 = \frac{2c_3}{5} \Rightarrow c_5 = 0$$

$$k = 5, \qquad c_6 = \frac{2c_4}{6} \Rightarrow c_6 = \frac{c_0}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$k = 6, \qquad c_7 = \frac{2c_5}{7} \Rightarrow c_7 = 0$$

$$k = 7, \qquad c_8 = \frac{2c_6}{8} \Rightarrow c_6 = \frac{c_0}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

e assim sucessivamente.

Observe que para os coeficientes c_k cujos índices são pares, temos:

$$c_{2n} = \frac{c_0}{n!}.$$

Por outro lado, para os coeficientes c_k cujo índices são ímpares, temos:

$$c_{2n+1} = 0.$$

Com isso, podemos escrever que a solução geral da equação diferencial (5.6) é dada por:

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_0}{n!} x^{2n} = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}. \tag{5.12}$$

Neste cenário, é incerto se a solução encontrada pode ser aceita, pois não possuímos informações sobre a convergência da série de potência que descreve a solução da equação diferencial (5.6). Dessa forma, devemos estudar a convergência da série em questão.

Sendo $c_n = \dfrac{1}{n!}$ e $c_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!}$, temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{(n+1)n!} \cdot n! \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)} = 0.
\end{aligned}$$

Dessa maneira, o raio da série de potências (5.12) é $R = \infty$ e, portanto, a série é convergente para todo x real. Ademais, pela Proposição 4.2, segue que a série que determina a função φ é convergente. Logo, a solução obtida é válida em toda a reta real.

A próxima seção será destinada a formalizar o método da série de potências de modo a assegurar a existência da solução de uma dada equação diferencial em série de potências sem que nos preocupemos em verificar a convergência da série obtida como solução. Salientamos que o estudo das soluções de equações diferenciais através de séries de potências é dividida em dois casos: soluções em torno de pontos ordinários e soluções em torno de pontos singulares. Aqui, abordaremos exclusivamente o primeiro caso.

5.2 Soluções em Torno de Pontos Ordinários

Iniciaremos essa seção com os conceitos de função contínua em um ponto x_0 e de extensão contínua de uma função, respectivamente.

Definição 5.1 (**Continuidade**)**.** Sejam f uma função e x_0 um ponto do seu domínio. Suponha que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ exista. Nessas condições, uma função f é contínua em x_0, se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Definição 5.2 (**Extensão Contínua**)**.** A extensão contínua de uma função f em um ponto x_0 no qual ela não está definida, mas tem limite finito em x_0, é a função g definida em x_0 dada por:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \neq x_0 \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x), & \text{se } x = x_0. \end{cases}$$

Ou seja, a função g é igual a função f, exceto no ponto x_0.

Por exemplo, a extensão contínua da função $f(x) = \dfrac{sen(x)}{x}$ no ponto $x = 0$ é a função $g(x)$ dada por:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{sen(x)}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen(x)}{x} = 1, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Em posse das Definições (5.1), (5.2) e (4.8), conceituaremos ponto ordinário e ponto singular. Considere a equação diferencial linear de ordem 2:

$$P_2(x)y'' + P_1(x)y' + P_0(x)y = 0, \tag{5.13}$$

com $P_2(x) \neq 0$. Escrevemos então a equação (5.13), como:

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0, \tag{5.14}$$

onde $p_1 = \dfrac{P_1(x)}{P_2(x)}$ e $p_0 = \dfrac{P_0(x)}{P_2(x)}$. Definimos:

Definição 5.3 (**Ponto Ordinário e Ponto Singular**)**.** Um ponto x_0 é dito ponto ordinário ou não-singular da equação diferencial (5.14), se $p_1(x)$ e $p_0(x)$ são funções analíticas nesse ponto ou suas extensões contínuas são analíticas em x_0. Caso contrário, x_0 é dito ponto singular ou uma singularidade dessa equação.

Vamos considerar alguns exemplos para facilitar a compreensão da definição anterior.

Exemplo 5.3. A equação diferencial linear de ordem 2,

$$y'' + e^x y' + sen(x)y = 0,$$

não possui ponto singular. Em outras palavras, todo ponto $x = x_0$ é um ponto ordinário dessa equação diferencial, inclusive para $x = 0$. De fato, sejam $p_1(x) = e^x$ e $p_0(x) = sen(x)$, temos:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

e

$$sen(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

que já sabemos convergir para todo valor de x real, em particular para $x = 0$. Portanto, a analiticidade está verificada.

Exemplo 5.4. A equação diferencial linear de ordem 2

$$xy'' + sen(x)y = 0$$

possui um ponto ordinário em $x = 0$. Com efeito, escrevemos a equação diferencial dada como:

$$y'' + \frac{sen(x)}{x} y = 0.$$

Sejam $p_1(x) = 0$ e $p_0(x) = \dfrac{sen(x)}{x}$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{sen(x)}{x} &= \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right) \\ &= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Agora, aplicamos o teste da razão na série (5.15), que representa a extensão contínua de $p_0(x)$, para verificar a sua convergência.

Sendo $a_n = (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n+1)!}$ e $a_{n+1} = (-1)^{n+1} \dfrac{x^{2n+2}}{(2n+3)!}$, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{(2n+3)!}}{\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{(-1)^n x^{2n}} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!} \cdot |x^2| \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+3)(2n+2)} \cdot |x^2| = 0 < 1. \end{aligned}$$

A série é absolutamente convergente e, portanto, convergente. Assim, está verificada a analiticidade da função em $x = 0$.

Exemplo 5.5. Os pontos singulares da equação diferencial linear de ordem 2

$$y'' + \frac{x}{x^2+1}y' + \frac{1}{x^2+1}y = 0$$

são as raízes de $x^2 + 1 = 0$, a saber, $x = \pm i$, nos quais $p_1(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ e $p_0(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ não admitem extensão contínua, uma vez que apresentam limites infinitos nesses pontos. Esse exemplo mostra que pontos singulares não são necessariamente reais.

A definição de pontos ordinários e singulares com base no conceito de analiticidade pode tornar a determinação deles complicada em algumas situações. A análise mais formal da teoria das funções analíticas é conduzida em cursos de funções de variáveis complexas. No entanto, não precisamos de uma teoria muito avançada para continuar o nosso estudo, visto que na maioria dos casos estaremos lidando apenas com equações diferencias cujos coeficientes são polinômios. Nesse caso, como consequência da Definição 5.3, há uma maneira simples de determinar se um ponto x_0 é ordinário ou singular.

Observamos a seguinte condição: quando os coeficientes da equação (5.13), ou seja, $P_2(x)$, $P_1(x)$ e $P_0(x)$, são polinômios sem fatores comuns, um ponto x_0 é:

(i) ordinário se $P_2(x_0) \neq 0$;

(ii) singular se $P_2(x_0) = 0$.

Observação 5.1. Note que a condição anterior é necessária e suficiente apenas quando os coeficientes da equação diferencial são polinômios. Caso contrário, não podemos afirmar que um ponto x_0 é ordinário ou singular. Basta observar o Exemplo 5.4, em que $P_2(x)$ não está definido para $x = 0$, mas este ponto é ordinário.

Exemplo 5.6. Os pontos singulares da equação $(x^2 - 1)y'' + 2xy' + 6y = 0$ são as raízes de $x^2 - 1 = 0$, a saber, $x = \pm 1$. Por outro lado, todos os outros pontos são ordinários.

O teorema a seguir estabelece que quando um ponto é ordinário para a equação diferencial (5.14), ela possui duas soluções linearmente independentes representadas por séries de potências. Além disso, o teorema assegura a existência de um intervalo mínimo de convergência.

Teorema 5.1 (Existência de Soluções em Série de Potências). Seja a equação diferencial (5.14). Supondo que $x = x_0$ é ponto ordinário dessa equação, então existem duas soluções linearmente independentes na forma $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$, com raio mínimo de convergência, R_{min}, dado pela distância do ponto x_0 ao ponto singular mais próximo (real ou complexo).

Demonstração. A prova com todos os detalhes pode ser encontrada em Apostol (1988, Volume 1, p.191). ■

Para solucionar uma equação diferencial como a (5.14), seguiremos os mesmos passos apresentados no Exemplo 5.1. Além disso, é conhecido que a solução geral para esse tipo de equação é dada por:

$$\varphi(x) = \alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x).$$

Pode-se mostrar que $\alpha_1 = c_0$ e $\alpha_2 = c_1$, onde c_0 e c_1 são números reais arbitrários. No mais, por uma questão de simplicidade, assumimos que um ponto ordinário está sempre localizado na origem, ou seja, quando $x = 0$, uma vez que, caso contrário, a substituição $t = x - x_0$ transforma o valor $x = x_0$ em $t = 0$.

Exemplo 5.7. Resolva a equação diferencial

$$(x^2 - 4)y'' + 3xy' + y = 0 \tag{5.16}$$

satisfazendo as condições iniciais $y(0) = 4$ e $y'(0) = 1$.

Solução: Observe que os coeficientes da equação são expressos como funções polinomiais, isso implica que são também funções analíticas. Dado que $P_2(x) = x^2 - 4$, temos $P_2(0) = -4 \neq 0$. Isto significa que $x = 0$ é um ponto ordinário da equação. Portanto, o Teorema 5.1 assegura a existência de duas soluções linearmente independentes representadas como séries de potências. Além disso, o raio mínimo de convergência é determinado pela distância entre o ponto ordinário e o ponto singular mais próximo, que neste caso são $x = \pm 2$. Portanto, temos:

$$R_{min} = d(0, \pm 2) = 2.$$

Seja

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{5.17}$$

solução para a equação diferencial (5.16). Derivando a série (5.17) termo a termo duas vezes, temos:

$$\varphi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} \Rightarrow \varphi''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}.$$

Substituindo φ, φ' e φ'' na equação (5.16), obtemos a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned}
(x^2 - 4)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + 3x\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n &= 0 \\
x^2\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 4\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + 3x\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n &= 0 \\
\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} 4n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} 3nc_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n &= 0.
\end{aligned}$$

Deslocando os índices das séries convenientemente, escrevemos a última igualdade da seguinte forma:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)c_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} 4(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k + \sum_{k=0}^{\infty} 3kc_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0.$$

Somando essas séries termo a termo, segue que:

$$\sum_{n=0}^{\infty}[k(k-1)c_k - 4(k+2)(k+1)c_{k+2} + 3kc_k + c_k]x^k = 0.$$

Portanto, pelo Teorema (4.11), temos:

$$k(k-1)c_k - 4(k+2)(k+1)c_{k+2} + 3kc_k + c_k = 0. \tag{5.18}$$

Da equação (5.18) obtemos uma relação de recorrência que determina uma fórmula para c_k. Como $(k+2)(k+1) \neq 0$ para todos os valores de k, podemos escrever a equação (5.18) como:

$$\begin{aligned} c_{k+2} &= \frac{[k(k-1)+3k+1]c_k}{4(k+2)(k+1)} \\ &= \frac{(k+1)^2 c_k}{4(k+2)(k+1)} \\ &= \frac{(k+1)c_k}{4(k+2)}. \end{aligned}$$

Iterando essa última fórmula, temos:

$$\begin{aligned}
&k=0, && c_2 = \frac{c_0}{4\cdot 2} \\
&k=1, && c_3 = \frac{2c_1}{4\cdot 3} \\
&k=2, && c_4 = \frac{3c_2}{4\cdot 4} \Rightarrow c_4 = \frac{3c_0}{4\cdot 4\cdot 4\cdot 2} \\
&k=3, && c_5 = \frac{4c_3}{4\cdot 5} \Rightarrow c_5 = \frac{4\cdot 2c_1}{4\cdot 5\cdot 4\cdot 3} \\
&k=4, && c_6 = \frac{5c_4}{4\cdot 6} \Rightarrow c_6 = \frac{5\cdot 3c_0}{4\cdot 6\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 2} \\
&k=5, && c_7 = \frac{6c_5}{4\cdot 7} \Rightarrow c_7 = \frac{6\cdot 4\cdot 2c_1}{4\cdot 7\cdot 4\cdot 5\cdot 4\cdot 3}
\end{aligned}$$

e assim sucessivamente.

Observe que para os coeficientes c_k cujo índices são pares, temos:

$$c_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 5\cdot 3c_0}{4^n(2n)(2n-2)\cdots 6\cdot 4\cdot 2}, \quad \forall n \geq 1.$$

Por outro lado, para os coeficientes c_k cujos índices são ímpares, temos:

$$c_{2n+1} = \frac{(2n)(2n-2)\cdots 6\cdot 4\cdot 2c_1}{4^n(2n+1)(2n-1)\cdots 7\cdot 5\cdot 3}, \quad \forall n \geq 1.$$

Como a solução da equação diferencial (5.16) é dada pela série (5.17), segue que:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n}x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1}x^{2n+1}\\ &= (c_0 + c_2x^2 + \cdots) + (c_1x + c_3x^3 + \cdots).\end{aligned}$$

No entanto, obtemos uma fórmula para c_n para todo $n \geq 1$. Sendo assim, a solução geral da equação (5.16) fica:

$$\varphi(x) = c_0 + \varphi_1(x) + c_1x + \varphi_2(x),$$

com

$$\varphi_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 5\cdot 3c_0\cdot x^{2n}}{4^n(2n)(2n-2)\cdots 6\cdot 4\cdot 2}$$

e

$$\varphi_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)(2n-2)\cdots 6\cdot 4\cdot 2c_1\cdot x^{2n+1}}{4^n(2n+1)(2n-1)\cdot\cdots 7\cdot 5\cdot 3}.$$

Ademais, $\varphi(0) = c_0 = 4$ e $\varphi'(0) = c_1 = 1$. Portanto, a solução da equação satisfazendo as condições iniciais dadas é:

$$\varphi(x) = 4 + \varphi_1(x) + x + \varphi_2(x).$$

5.3 A Equação de Legendre

Encerramos este capítulo ao abordar, nesta seção, a Equação de Legendre, uma equação diferencial que surge com frequência em aplicações matemáticas, na Física, entre outros campos e que, por isso, vale a pena ser tratada em separado.

Adrien-Marie Legendre (1752-1833) foi um matemático francês cujas contribuições de destaque na Matemática avançada se concentraram na Teoria dos Números e nas funções elípticas. Segundo Eves (2011), ele também é notável na História da Matemática Elementar, principalmente devido à sua obra "Éléments de Géométrie", cujo objetivo era aprimorar pedagogicamente os "Elementos" de Euclides. Ademais, seu nome aparece ligado à equação diferencial

$$(1-x^2)\Theta'' - 2x\Theta' + \lambda(\lambda+1)\Theta = 0, \tag{5.19}$$

em que λ é um natural dado.

A Equação de Legendre (5.19) é originada da equação polar proveniente da Equação de Laplace em coordenadas esféricas, dada por:

$$\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}(\theta)\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \Theta \operatorname{sen}(\theta)\Lambda = 0, \tag{5.20}$$

onde Λ é a constante de separação, após a realização da substituição $x = \cos(\theta)$. Observamos que a equação (5.20) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$sen(\theta)\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + cos(\theta)\frac{d\Theta}{d\theta} + \Theta sen(\theta)\Lambda = 0. \tag{5.21}$$

Ao multiplicarmos a equação (5.21) por $\dfrac{1}{sen(\theta)}$, com $\theta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, obtemos:

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + cotg(\theta)\frac{d\Theta}{d\theta} + \Theta\Lambda = 0. \tag{5.22}$$

Podemos expressar esta equação em termos da variável x utilizando a substituição $x = cos(\theta)$ de modo que:

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta}\frac{d}{dx} = -sen(\theta)\frac{d}{dx}.$$

Para isso, note que:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{d\theta^2} &= \frac{d}{d\theta}\frac{d}{d\theta} \\
&= \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dx}{d\theta}\frac{d}{dx}\right) \\
&= \frac{d}{d\theta}\left(-sen(\theta)\frac{d}{dx}\right) \\
&= -cos(\theta)\frac{d}{dx} - sen(\theta)\frac{d}{d\theta}\frac{d}{dx} \\
&= -cos(\theta)\frac{d}{dx} - sen(\theta)\left(-sen(\theta)\frac{d}{dx}\right)\frac{d}{dx} \\
&= -cos(\theta)\frac{d}{dx} + sen^2(\theta)\frac{d^2}{dx^2}.
\end{aligned}$$

A partir da Relação Fundamental da Trigonometria, expressamos a última igualdade como:

$$\frac{d^2}{d\theta^2} = -cos(\theta)\frac{d}{dx} + (1 - cos^2(\theta))\frac{d^2}{dx^2}. \tag{5.23}$$

Substituindo $cos(\theta)$ por x na igualdade (5.23), temos:

$$\frac{d^2}{d\theta^2} = -x\frac{d}{dx} + (1 - x^2)\frac{d^2}{d\theta^2}. \tag{5.24}$$

Observamos também que:

$$cotg(\theta)\frac{d}{d\theta} = cotg(\theta)\left(-sen(\theta)\frac{d}{dx}\right). \tag{5.25}$$

Dado que $cotg(\theta) = \frac{cos(\theta)}{sen(\theta)}$, podemos reescrever a igualdade (5.25) como:

$$cotg(\theta)\frac{d}{d\theta} = -cos(\theta)\frac{d}{dx}. \tag{5.26}$$

Ao substituir $cos(\theta)$ por x na igualdade (5.26), obtemos:

$$cotg(\theta)\frac{d}{d\theta} = -x\frac{d}{dx}. \tag{5.27}$$

Substituindo as igualdades (5.24) e (5.27) na equação (5.22), obtemos:

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta(x)}{dx^2} - 2x\frac{d\Theta(x)}{dx} + \Lambda\Theta = 0. \tag{5.28}$$

Por conveniência, escrevemos Λ como um número inteiro não negativo multiplicado pelo seu sucessor, ou seja, $\Lambda = \lambda(1+\lambda)$, com λ um inteiro não negativo. Portanto, chegamos à equação (5.19).

A equação de Legendre é de grande importância na Matemática Aplicada, e suas soluções são denominadas funções de Legendre (de ordem λ). Quando $\lambda \geq 0$, a equação possui soluções polinomiais de interesse particular, conhecidas como Polinômios de Legendre.

5.3.1 Solução para a Equação de Legendre

Vamos direcionar nossos esforços para encontrar agora soluções em forma de séries para a equação (5.19) em torno do ponto $x = 0$. Observamos que $P_2(x) = (1-x^2)$, $P_1(x) = -2x$ e $P_0 = \lambda(\lambda+1)$ são polinômios sem fatores comuns. Além disso, $P_2(0) = 1$, o que é diferente de zero. Portanto, $x = 0$ é um ponto ordinário da Equação de Legendre. Assim, o Teorema 5.1 assegura a existência de duas soluções linearmente independentes representadas como séries de potências da forma

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \tag{5.29}$$

com raio mínimo de convergência igual a um, ou seja, $R_{min} = 1$. Substituindo a equação (5.29) e suas respectivas derivadas na Equação de Legendre (5.19) e fazendo $\lambda(\lambda+1)$ igual a a, obtemos:

$$\begin{aligned}
(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + a\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n &= 0 \\
\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - x^2\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + a\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n &= 0 \\
\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2nc_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} ac_n x^n &= 0.
\end{aligned}$$

Ao realizar o deslocamento de índice de maneira conveniente, ou seja, ao fazer $k = n - 2$ no primeiro somatório e nos demais substituindo simplesmente n por k, reescrevemos a última igualdade da seguinte forma:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k - \sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^k - \sum_{k=1}^{\infty}2kc_kx^k + \sum_{k=0}^{\infty}ac_kx^k = 0. \tag{5.30}$$

Observe que o segundo e o terceiro somatório podem ser iniciados com $k = 0$, já que ao fazer isso, entram mais duas parcelas para o segundo somatório e uma parcela para o terceiro somatório, sendo ambas nulas. Ou seja:

$$\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^k = 0 + 0 + 2\cdot 1c_2x^2 + 3\cdot 2c_3x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)c_kx^k \tag{5.31}$$

e

$$\sum_{k=1}^{\infty}2kc_kx^k = 0 + 2\cdot 1c_1x + 2\cdot 2c_2x^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}2kc_kx^k. \tag{5.32}$$

Portanto, reescrevemos a equação (5.30) como:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k - \sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)c_kx^k - \sum_{k=0}^{\infty}2kc_kx^k + \sum_{k=0}^{\infty}ac_kx^k = 0.$$

Ao somarmos as séries anteriores, obtemos:

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(k+2)(k+1)c_{k+2} - k(k-1)c_k - 2kc_k + ac_k]x^k = 0. \tag{5.33}$$

Logo, pelo Teorema 4.11, temos:

$$(k+2)(k+1)c_{k+2} - k(k-1)c_k - 2kc_k + ac_k = 0. \tag{5.34}$$

Dado que $a = \lambda(\lambda+1)$, ao realizar as operações necessárias, chegamos à relação de recorrência para todo $k \geq 0$:

$$c_{k+2} = -\frac{(\lambda-k)(\lambda+k+1)}{(k+2)(k+1)}c_k. \tag{5.35}$$

Iterando essa última fórmula, temos:

$$k=0,\quad c_2=-\frac{\lambda(\lambda+1)c_0}{2!}$$

$$k=1,\quad c_3=-\frac{(\lambda-1)(\lambda+2)c_1}{3!}$$

$$k=2,\quad c_4=-\frac{(\lambda-2)(\lambda+3)c_2}{4\cdot 3}\Rightarrow c_4=\frac{(\lambda-2)\lambda(\lambda+1)(\lambda+3)c_0}{4!}$$

$$k=3,\quad c_5=-\frac{(\lambda-3)(\lambda+4)c_3}{5\cdot 4}\Rightarrow c_5=\frac{(\lambda-3)(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda+4)c_1}{5!}$$

$$k=4,\quad c_6=-\frac{(\lambda-4)(\lambda+5)c_4}{6\cdot 5}\Rightarrow c_6=-\frac{(\lambda-4)(\lambda-2)\lambda(\lambda+1)(\lambda+3)(\lambda+5)c_0}{6!}$$

$$k=5,\quad c_7=-\frac{(\lambda-5)(\lambda+6)c_5}{7\cdot 6}\Rightarrow c_7=-\frac{(\lambda-5)(\lambda-3)(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda+4)(\lambda+6)c_1}{7!}$$

e assim sucessivamente.

Para os coeficientes c_k cujos índices são pares, temos:

$$c_{2n}=(-1)^n\frac{\lambda(\lambda-2)\cdots(\lambda-2n+2)(\lambda+1)(\lambda+3)\cdots(\lambda+2n-1)}{(2n)!}c_0,\ \forall n\geq 1.$$

Analogamente, para os coeficientes c_k cujos índices são ímpares, temos:

$$c_{2n+1}=(-1)^n\frac{(\lambda-1)(\lambda-3)\cdots(\lambda-2n+1)(\lambda+2)(\lambda+4)\cdots(\lambda+2n)}{(2n+1)!}c_1,\ \forall n\geq 1.$$

Por conseguinte, a série que define a solução da Equação de Legendre (5.19) pode escrever-se como:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}c_{2n}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_{2n+1}x^{2n+1}\\ &= (c_0+c_2x^2+\cdots)+(c_1x+c_3x^3+\cdots).\end{aligned}$$

No entanto, obtemos uma fórmula para c_n para todo $n\geq 1$. Sendo assim, a solução geral da Equação de Legendre fica:

$$\varphi(x)=c_0\varphi_1(x)+c_1\varphi_2(x),$$

onde,

$$\varphi_1(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda(\lambda-2)\cdots(\lambda-2n+2)(\lambda+1)(\lambda+3)\cdots(\lambda+2n-1)}{(2n)!}x^{2n},$$

e

$$\varphi_2(x)=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(\lambda-1)(\lambda-3)\cdots(\lambda-2n+1)(\lambda+2)(\lambda+4)\cdots(\lambda+2n)}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Este trabalho centrou-se no estudo do método da série de potências para a solução de equações diferenciais ordinárias em torno de pontos ordinários, tema geralmente não abordado nos cursos de Cálculos Diferencial e Integral. Foi examinada de forma precisa a teoria das equações diferenciais ordinárias lineares de ordem n, assim como a teoria de séries numéricas e séries de potências, a fim de discutirmos o método da série de potências, culminando na resolução da Equação de Legendre.

Ao longo do seu desenvolvimento, tornou-se evidente que, mesmo quando há a garantia da existência de uma solução para uma equação diferencial ordinária, nem sempre é viável expressá-la em termos de funções elementares. Isso ressalta a significativa importância do estudo do método das séries de potências.

Neste trabalho, focamos especificamente no método da série de potências para soluções em torno de pontos ordinários, ou seja, em pontos cujos coeficientes da equação diferencial são analíticos. No entanto, temos a intenção de investigar em pesquisas futuras esse método para soluções em torno de pontos singulares, isto é, em pontos nos quais os coeficientes da equação diferencial não são analíticos, uma vez que existem diversos problemas advindos das aplicações onde a solução procurada está exatamente em torno de um ponto singular e, portanto, a técnica estudada nesta pesquisa não é suficiente.

Além disso, a experiência de abordar este tema certamente teve um impacto positivo em minha formação. Ademais, é esperado que este trabalho possa servir como uma fonte de referência para os alunos interessados em estudar este tema, ou até mesmo como uma base para a elaboração de futuras pesquisas na área.

Referências

APOSTOL, T. M. *Cálculo*: Cálculo com funções de uma variável real com uma introdução à Álgebra linear. Tradução Doutor António Ribeiro Gomes. Rio de Janeiro: Riverté, 1988, Volume 1.

BOCCATO, V. R. C. Metodologia da pesquisa bibliográfica na área odontológica e o artigo científico como forma de comunicação. *Revista de Odontologia da Universidade Cidade de São Paulo*, v. 18, n. 3, p. 265–274, 2006.

BOYCE, W.; DIPRIMA, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Hygino H. Domingues. 5. ed. São Paulo: Editora da Unicamp, 2011.

GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de cálculo*. 5. ed. Rio de Janeiro: Grupo Gen-LTC, 2013, Volume 4.

IEZZI, G.; HAZZA, S. *Fundamentos de Matemática Elementar: Complexos, polinômios e equações*. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013, Volume 6.

INCE, E. L. *Ordinary differential equations*. [S.l.]: Courier Corporation, 1956.

LEITHOLD, L. *Cálculo com Geometria Analítica*. São Paulo: editora Harbra, 1994, Volume 2.

LIMA, E. L. *Curso de análise*. Rio de Janeiro: IMPA, 2014, Volume 1.

YARTEY, J. N. A.; RIBEIRO, S. S. *Tópicos de equações diferenciais ordinárias*. Salvador: Universidade Federal da Bahia - UFBA, Instituto de Matemática e Estatística; Superintendência de Educação, 2017.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. *Equações Diferenciais*. Tradução Antonio Zumpano. 3. ed. São Paulo: Pearson Education, 2001, Volume 1.