INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA BAHIA
CAMPUS VALENÇA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ANCELMO DO ROSÁRIO MALTEZ

MATEMÁTICA E MÚSICA: ANÁLISES, CONTEXTOS E PADRÕES EM ESCALAS MUSICAIS E SEQUÊNCIAS

Valença – BA
2024

ANCELMO DO ROSARIO MALTEZ

MATEMÁTICA E MÚSICA: ANÁLISES, CONTEXTOS E PADRÕES EM ESCALAS MUSICAIS E SEQUÊNCIAS

Monografia apresentada à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia, *Campus* Valença, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Joezito Costa dos Santos Júnior.

Valença - BA

2024

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO SISTEMA DE BIBLIOTECAS DO IFBA, COM OS DADOS FORNECIDOS PELO(A) AUTOR(A)

M261m Maltez, Ancelmo do Rosário

Matemática e música: análises, contextos e padrões em escalas Musicais e sequências / Ancelmo do Rosário Maltez; orientador Joezito Costa dos Santos Júnior -- Valença : IFBA, 2024.

78f p.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) -- Instituto Federal da Bahia, 2024.

1. Escala Musical. 2. Contextualização. 3. Matemática e música. 4. Aprendizagem da matemática-modelagem matemática. 5. Abordagem. I. Santos Júnior, Joezito Costa dos, orient. II. TÍTULO.

CDD: 511.4

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA BAHIA
Rua Vereador Romeu Agrário Martins, s/n - Bairro Tento - CEP 45400-000 - Valença - BA - www.portal.ifba.edu.br

Ancelmo do Rosário Maltez

Matemática e Música: Análises, Contextos e Padrões em Escalas Musicais e Sequências

Monografia apresentada à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia, Campus Valença, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Trabalho de Conclusão de Curso aprovado pela banca examinadora em 24/09/2024.

BANCA EXAMINADORA

____
Prof. Me. Joezito Costa dos Santos Júnior (Orientador)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

____
Prof. Me. Davis Magalhães de Freitas
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

____
Prof. Dr. Diogo Soares Dórea da Silva
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

Em 27 de setembro de 2024.

Documento assinado eletronicamente por **Joezito Costa dos Santos Júnior**, **Professor Efetivo**, em 27/09/2024, às 20:55, conforme decreto nº 8.539/2015.

Documento assinado eletronicamente por **Davis Magalhães de Freitas**, **Professor Efetivo**, em 27/09/2024, às 20:59, conforme decreto nº 8.539/2015.

Documento assinado eletronicamente por **Diogo Soares Dorea da Silva**, **Professor Efetivo**, em 27/09/2024, às 21:10, conforme decreto nº 8.539/2015.

A autenticidade do documento pode ser conferida no site http://sei.ifba.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&acao_origem=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0 informando o código verificador **3756712** e o código CRC **61D5E547**.

23280.001374/2022-62 3756712v4

DEDICATÓRIA

"Aos meus pais, D. Leonice do Rosário Maltez e Sr. Francelino Maltez, ao meu saudoso avô, Nelson Maltez, ao meu filho, Ângelo Miguel dos Santos Maltez e outros amores".

AGRADECIMENTOS

A Deus, a todas as pessoas que torceram para que esse ciclo fosse concluído, aos professores da graduação, Ana Carolina, Davis Magalhães, Diego Coutinho, Diogo Dórea, Edmilson Borges, Genny Ayres, Joezito Costa, Lígia Taciana, Lilian Silva, Marcelo Lino, Márcia Gonçalves, Márcia Rebeca, Patrícia Argôlo, Roque Lyrio, Ruth Silva, Wilson J. Ohl.

Ao colega e amigo João Matheus Santos Assis, um dos estudantes mais admirados por todos, inclusive os professores. Um ser humano ímpar, muito habilidoso com os números e sempre com os pés no chão.

Aos colegas da terra, Aldair Conceição dos Santos, Jeferson Luis Ribeiro e Vanessa Neves.

A dupla dos feras, Alex Yoshio e Maurício da Silva, grandes pessoas. Aos demais colegas de curso e da faculdade, tais como: Adriana Almeida, Alexandre Visco, Caique Campos, Cristiane Sousa, Denilson Cruz, Elto Silva, Érica Nascimento, Felipe Allan, Germano Músico, Hildácio Maquile, Israel Santana, Ivanei de Jesus, Joerbert Sena, José Carlos, Kaique Martins, Maiane Nascimento, Maisa Filgueiras, Marinelson Oliveira, Maraíza Rosas, Maria Antônia, Maria Amparo, Mathias Assis, Michele Barros, Nadson Castro, Nilton Júnior, Rafael Marques, Rosane Pereira, Solange Santos, Taíze Cardoso, Tales Tales.

.

- Aos colaboradores, Sr. Manoel e Isaias, representando toda sua equipe.
- Aos colaboradores da biblioteca, representados por Izabel.
- Aos colaboradores da GRA, representados por Ferraz.
- Aos saudosos colegas e amigos, que Deus lhes dê luz no plano em que estiverem: Dulcinéia de Jesus, Genival dos Santos, Taires Pinto.
- Aos professores primários, Nazaré Luzia da Silva e Nancy Moreira Mota.
- Ao amigo, Eduardo Ferreira, um dos colegas mais inteligentes que já tive.
- Aos professores e amigos: Ângela Marlúcia, Antônio M. Neres, Cristina Leão, Délia Muricy, Dijani Andrade, Edson Castro, Rodrigo Sarará,Venâncio da Luz.
- Aos meus saudosos avós, Pau - de - Penca e D. Duda.
- Muito Grato a todos e todas!!!!!!!

"A arte de combinar os sons também é a arte de manifestar os dons. A música revela o mais íntimo sentimento que traduz a essência de cada ser. Portanto, não se mensura o quão profundo é a sua complexidade.''

Autor: Ô Neto Di Nelson.

RESUMO

O presente trabalho versa sobre matemática e música, mais especificamente em relação aos padrões pertencentes à escala musical, intervalos, tempos das figuras, e sequências. Trata-se de um trabalho interdisciplinar o qual objetiva sobretudo propor maneiras de estudar alguns objetos de conhecimentos abordados nos ensinos médio e superior. O desenvolvimento do mesmo deu-se a partir de pesquisas em livros, artigos, monografias, dissertações e etc. Assim, ao abordar o filósofo Pitágoras como um dos principais estudiosos responsáveis pelo desenvolvimento da escala musical a partir de um instrumento chamado monocórdio, o trabalho sugere algumas análises e possíveis contextualizações acerca dessas duas áreas do conhecimento objetivando contribuir com os caminhos metodológicos e difundir as possibilidades de diálogo entre ambas as áreas do conhecimento. Em se tratando do contexto matemático envolvido, há abordagens e análises sobre série harmônica, congruência modular, combinatória, matemática indiana e uma proposta de sequência didática sobre progressão geométrica. Tudo isso relacionado à escala musical, intervalos, tempos das figuras, compassos e etc. Portanto, também é possível afirmar que uma das ideias do trabalho é discutir a abrangência do tema, visando compreendê-lo de modo a perceber até que ponto é possível conectá-lo a partir de uma abordagem lógica, histórica e cultural, dentro das diversas possibilidades do ensino e aprendizagem da matemática sob diferentes perspectivas.

Palavras - Chave: Contextualização; Análise; Abordagem; Escala Musical; Abrangência.

ABSTRACT

This work deals with mathematics and music, more specifically in relation to patterns belonging to the musical scale, intervals, times of figures, and sequences. It is an interdisciplinary work which objectively provides ways to study some objects of knowledge covered in secondary and higher education. Its development was based on research in books, articles, monographs, dissertations, etc. Thus, by approaching the philosopher Pythagoras as one of the main scholars responsible for the development of the musical scale based on an instrument called monochord, the work suggests some analyzes and possible contextualizations about these two areas of knowledge aiming to contributing to the methodological and spreading the possibilities of dialogue between both areas of knowledge. When it comes to the mathematical context involved, there are approaches and analyzes on harmonic series, modular congruence, combinatorics, Indian mathematics and a proposal for a didactic sequence on geometric progression. All of this related to the musical scale, intervals, times of the figures, measures, etc. Therefore, it is also possible to state that one of the ideas of the work is to discuss the scope of the theme, involving it in order to understand the extent to which it is possible to connect it from a logical, historical and cultural approach, within the different possibilities of the teaching and learning mathematics from different perspectives.

Keywords: Contextualization, Analysis, Approach, Musical Scale, Scope.

LISTA DE ILUSITRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Ao longo da História o ensino da Matemática tem sido bastante discutido por diversos profissionais da educação. Discute-se, dentre outras coisas, sobre maneiras que possibilitem o aluno criar suas próprias estratégias para resolver determinados problemas, que, por sua vez, podem ou não, apresentar-se como desafiadores. Nesse sentido, torna-se relevante ações pedagógicas de cunho interdisciplinar, onde estudantes e professores possam interagir para dirimir dúvidas e trocar sugestões. Posto isso, como forma de pensar nessas possibilidades, indo de encontro ao "isolamento" dos conhecimentos, alguns pensadores defendem o seguinte:

> A Modelagem Matemática no ensino de Matemática se constitui importante aliado do professor para tornar os estudantes mais criativos, participativos, proporcionando maior liberdade de ação e fazendo com que a aprendizagem ocorra, através da exploração de situações em que a realidade do aluno esteja inserida (BRAUTIGAM, 2001, p. 65).

Historicamente, a interdisciplinaridade começou se destacar na década de 1960, e esse termo surge como:

> [...] solução para o problema de fragmentação do conhecimento, da perda de visão de conjunto da realidade e de resultados eficazes diante dos problemas. Para alcançar seus objetivos, ela não pode ser deduzida a uma simples colaboração ou intercâmbio entre pesquisadores e professores. Ela envolve desde os aspectos lógicos e epistemológicos do conhecimento até a aplicação de conhecimento de uma disciplina em outra. Sua missão é a de conservar e mediar as contradições do conhecimento nas esferas pedagógico - epistemológicas e políticas socioinstitucionais (PAVIANI, 2004, p. 17).

Apesar dessas ideias já estarem presentes em muitos debates educacionais, não é muito comum percebê-las na prática. Ainda é muito perceptível, em todos os níveis do ensino, a continuidade de uma pauta educacional histórica, baseada em cada área do ensino.

A ideia de promover abordagens de cunho dialógico deve ter como um de seus objetivos convidar os estudantes e professores a uma reflexão sobre o que se aprende e o que se ensina. Assim, é possível que haja um melhoramento e maior significado durante o processo ensino aprendizagem, em consonância com a formação do indivíduo. Portanto, pode-se refletir sobre o seguinte:

> compreender é apreender o significado; apreender o significado de um objeto ou de um acontecimento é vê-lo em suas relações com outros objetos ou acontecimentos; os significados constituem, pois, feixes de relações; as relações entretecem-se, articulam-se em teias, em redes, construídas socialmente e individualmente, e em permanente estado de atualização; em ambos os níveis-individual e social - a idéia de conhecer assemelha-se à de enredar, (MACHADO 1994, p. 21)

Em 2018 o Projeto Político Pedagógico do curso de Licenciatura em Matemática no Instituto Federal da Bahia, Campus - Valença, teve sua estrutura modificada. Disciplinas como Introdução a Matemática, por exemplo, tiveram sua carga horária diminuída, abrindo espaço para a construção de novas ementas, possibilitando uma reorganização do curso, e tendo como objetivo formar licenciados em Matemática para atuar na educação básica, nos anos finais do ensino fundamental e ensino médio, com uma sólida base científica e metodológica que possibilitará a vivência crítica da realidade educacional e a experimentação de novas propostas que considerem a evolução da educação, da ciência e da tecnologia. É nesse sentido que as propostas apresentadas pelo ensino da Matemática são de grande relevância, abrangendo diversas pesquisas no âmbito metodológico, envolvendo outras áreas do conhecimento, como a música e a tecnologia, por exemplo, e ampliando as possibilidades de pensar a Matemática de forma contextualizada.

Segundo Marin *et al*., (2010, p. 13-20) o rompimento de métodos clássicos auxilia na superação de práticas embasadas no pensamento tradicionalista de ensino. Nessa linha de pensamento, os parâmetros curriculares nacionais mencionam o seguinte:

> O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é **o potencial** de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência. (BRASIL1999, p.255).

Assim, alguns questionamentos a respeito do ensino da Matemática devem ser colocados em xeque: **1 -** Será que o professor de Matemática precisa de conhecimentos de outras disciplinas para realizar aulas contextualizadas? **2 -** De que forma os cursos de formação de professores podem auxiliar nesse processo? **3 -** Será que a Música, tendo em vista sua vasta disseminação e inserção cultural em diversos povos, pode minimizar as dificuldades no processo de ensino e aprendizagem de determinados conteúdos matemáticos aproximando e suscitando no aluno a vontade conhecê-los? **4 -** De que forma os discentes do curso de Licenciatura em Matemática absorvem uma proposta de modelagem envolvendo Matemática e Música? Essas perguntas auxiliam o direcionamento deste trabalho, visando analisar possibilidades de aplicações e contextualizações abordadas em aulas de Matemática, sobretudo, do ensino superior, com o intuito de propor e refletir sobre possíveis caminhos metodológicos que podem ser utilizados no contexto de ensino e aprendizagem, podendo inclusive auxiliar o próprio licenciando em sua prática.

Assim, o presente trabalho, além de sugerir algumas contextualizações e exercícios sobre temas, como: sequências, série harmônica, congruência modular, combinatória e matemática indiana, todos correlacionados à música, mais especificamente com a escala musical, seus intervalos e padrões afins, o mesmo também apresenta uma proposta de sequência didática sobre progressão geométrica e as escalas pitagórica e cromática. Nesse sentido, faz-se a seguinte pergunta: é possível que as relações de estudos envolvendo escala musical e sequências possam contribuir para auxiliar a compreensão metodológica do licenciando e a prática do professor de Matemática a partir do Ensino Médio?

OBJETIVOS:

OBJETIVO GERAL

Analisar se algumas relações envolvendo escalas, padrões musicais e sequências podem contribuir para auxiliar a metodologia do professor tanto no ensino médio quanto na Licenciatura em Matemática.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Pesquisar sobre Matemática e música.
- Relacionar os números inteiros com a escala pitagórica.
- Estabelecer relações entre figuras musicais, intervalos e acordes.
- Realizar estudos sobre sequências e séries.
- Verificar e comparar abordagens sobre Progressões Matemáticas.
- Investigar possíveis relações sobre ciclos em sequências e escalas.
- Confeccionar uma proposta de sequência didática.

1 METODOLOGIA

O presente trabalho trata-se de uma pesquisa bibliográfica, desenvolvida a partir de análises em artigos, monografias, dissertações, livros etc. A maior parte das consultas foi realizada em sites, como: Scielo e Google Acadêmico. Portanto, conforme destacado por Gil (2002, p. 41):

> Estas pesquisas têm como objetivo proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a constituir hipóteses. Pode-se dizer que estas pesquisas têm como objetivo principal o aprimoramento de ideias ou a descoberta de intuições. Seu planejamento é, portanto, bastante flexível, de modo que possibilite a consideração dos mais variados aspectos relativos ao fato estudado.

Assim, ao abordar o tema com ênfase na contextualização de ideias para práticas metodológicas, houve a necessidade de fazer leituras sobre a base teórica da música e da matemática, seus conceitos iniciais, história e desenvolvimento a partir de teóricos importantes para ambas as áreas do conhecimento. Além disso fez-se necessário estudar algumas peculiaridades das escalas musicais, sobretudo no que tange à escala utilizada no âmbito da cultura ocidental, bem como algumas características físicas do som, baseada na literatura de Bohumil Med, principalmente a obra: Teoria da Música, 5ª edição.

As relações matemáticas que também foram consultadas em livros e outras obras acadêmicas apresentaram-se, sobretudo, de forma hipotética. Daí a necessidade de análises cuidadosas, visto que apesar de já existirem trabalhos versando sobre o tema, na maioria das vezes não houve um canal direto voltado para a presente abordagem. Diante disso, fez-se necessário estudar livros, como: Análise Combinatória e Probabilidade, 9ª edição, bem como Conexões com a Física, 2ª edição. Ambos, respectivamente, dos autores, Augusto César Morgado e Glória Martini. Outra fonte importante foram os escritos de Maria Luiza de Matos Priolli, com ênfase para a obra intitulada por: Princípios Básicos da Música para a Juventude, 54ª edição, que também ajudou fortalecer hipóteses teórico-musicais essenciais durante a pesquisa.

Para desenvolver a Sequência Didática, foram empregados os princípios de Zabala (1998), os quais serão descritos mais detalhadamente em momento oportuno. Além disso há uma menção à Base Nacional Comum Curricular, com enfoque para as habilidades e competências propostas. Essa sequência poderá ser aproveitada e ajustada conforme as demandas dos estudantes, sob o prisma do professor, principalmente no contexto do ensino médio e da licenciatura.

2. CULTURA: MÚSICA E HISTÓRIA

Neste capítulo será abordada a História da Música sob a perspectiva de culturas e povos diferentes, alguns conhecimentos a respeito da iniciação da escala musical a partir dos experimentos de Pitágoras etc. Também há algumas peculiaridades da Música Popular Brasileira, suas nuances, evolução, alguns artistas e gêneros musicais, bem como aspectos importantes e essenciais para o desenvolvimento da música a partir de cada cultura.

2.1 BREVE HISTÓRICO DA MÚSICA NA ANTIGUIDADE

Para Abdounur (2002), a Matemática e a música possuem laços profundos estudados desde a Antiguidade. Nesse contexto a música esteve ligada a atividades envolvendo religião, política etc, o que de certa forma a deixou em evidência. No entanto, o modo sistematizado da música como as pessoas percebem nos dias de hoje custou a acontecer. Candé (2001, p. 46) afirma que por volta de 40.000 anos atrás, a espécie humana passa a ter uma consciência musical, tendo como referência a própria natureza, a reprodução, imitação dos sons etc. bem como as primeiras civilizações só começaram sistematizar os fenômenos sonoros, distinguindo o canto da linguagem falada, a dança e a música instrumental das expressões gestuais a partir de 9000 a. C.

Segundo Priolli (2013) a arte da música no contexto dos povos antigos tinha diversos aspectos, tais como: solenidades de cunho religiosos e sociais, festejos diversos, banquetes e em alguns casos era utilizada como forma de motivação em batalhas. A autora menciona que a música desses povos possuía características em uníssono[1], enfatizando também que alguns povos, como os egípcios, indianos, chineses e árabes, dentre outros, utilizavam certos tipos de sistemas e padrões. Um desses padrões os quais eram bem difundidos nesse contexto era a escala de sete notas (heptatônica). Assim, para a autora havia ainda uma relação considerável entre os sons produzidos no âmbito cultural desses povos e suas crenças. É importante destacar o seguinte:

> A invenção da escala musical é atribuída à deusa Svaragrama e as 7 notas da escala personificavam as 7 ninfas que acompanhavam a deusa Svaragrama. Dos nomes das 7 ninfas proveio a denominação das sete notas musicais, que é até hoje conservada na terminologia musical indiana. Usavam a notação musical designada por caracteres sânscritos. Era o sânscrito a língua sagrada dos indianos. (PRIOLLI, 2013, p. 113).

[1] Uníssono é o termo que se dá quando dois ou mais sons de mesma altura são produzidos simultaneamente.

Na visão da autora, alguns instrumentos de cordas utilizados no âmbito cultural desses povos, foram: as harpas, o alaúde, a rabeca do poeta (possuía apenas uma corda, e servia para acompanhar as declamações dos poetas). Já os instrumentos de sopro eram as flautas feitas em marfim, osso, madeira, barro etc. Com o passar do tempo, após a descoberta do bronze eles começaram fabricar, além de flautas, trombetas com esse metal. Os instrumentos de percussão eram os tambores de guerra.

A imagem abaixo é de uma harpa de pedais, também conhecida como a harpa de concerto ou sinfônica. É uma harpa grande que possui uma mecânica moderna, projetada principalmente para a música clássica, pode ser utilizada tanto para solos, como para conjuntos de câmara, ou orquestras sinfônicas, com música clássica ou popular, já que possibilita a modulação no momento da execução de peças musicais.

Figura 1: Harpa.

Fonte: https://aharpanordestina.blogspot.com/2015/02/as-harpas-do-mundo.html

A harpa de pedais é descendente das harpas antigas resultante de várias adaptações. Dessa maneira sua estrutura sonora possuía algumas peculiaridades. Barthel (2005: p.72, tradução nossa) escreve:

> O pedal de renforcement aumenta o nível sonoro da harpa. Os crescendi podiam ser obtidos pelo aumento da pressão dos dedos sobre as cordas e pela abertura progressiva das portinholas. O efeito de prolongamento do som fica muito perceptível em escalas e movimentos arpejados: "portinholas fechadas", a duração da ressonância das cordas é bastante curta, as notas sendo mais destacadas, e "portinholas abertas", os sons se prolongam, as notas parecendo mais ligadas.

Davi, um personagem histórico e bíblico, entre outras qualidades, era considerado um harpista talentoso. A harpa é referida como um instrumento angelical, simbolizando a harmonia e o louvor a Deus.

2.2 GUIDO D`AREZZO

Durante a Idade Média a música teve um papel muito importante na vida dos clérigos daquela época. Isso porque os monges dispunham de acesso a bibliotecas dos mosteiros em que podiam estudar sobre os conhecimentos musicais provenientes de civilizações clássicas. Outro aspecto era o entendimento de que a música ajudava na realização de liturgias as quais faziam parte das manifestações religiosas. Gomes (2017, p. 2) comenta que:

> [...] somente a partir do século XI, com o Monge beneditino Guido D´Arezzo (900-1050) que, de fato, elabora-se uma notação musical precisa com a invenção do tetragrama enquanto meio de registrar as alturas sonoras e, portanto, produzir os registros musicais. Sendo assim, com a grafia do som, um novo tipo de documentação surge, de modo que a música passa a ser entendida não somente enquanto som, mas também enquanto registro documental.

Guido D'Arezzo, no seu *Micrologus*, afirmava que "é necessário saber onde uma duração longa ou curta deve ser usada."(Apud Sadie, 1980, p.812). Frade beneditino, teórico e pedagogo musical italiano, desenvolve a ideia das nomenclaturas das notas musicais. A partir do Hino em homenagem a São João Batista ele resolveu extrair as primeiras sílabas de algumas estrofes do cântico por entender que dessa maneira diminuiria as possibilidades de erros, e de interpretação com relação aos estudos envolvendo música, facilitando a compreensão para seus alunos. Daí surgiu a escala com as seguintes terminologias para as notas: Ut; Re; Mi; Fá; Sol; La, conforme tabela abaixo.

Quadro 1: Hino e Tradução.

Hino à S. João Batista.
*Ut **queant laxis** /Resonare **fibris/** Mira **gestorum/** Famuli **tuorum/** Solve **polluti/** Labii **reatum/**Sancte Ioannes*
Para que teus servos possam ressoar claramente a maravilha dos teus feitos, limpe nossos lábios impuros ó São João.”

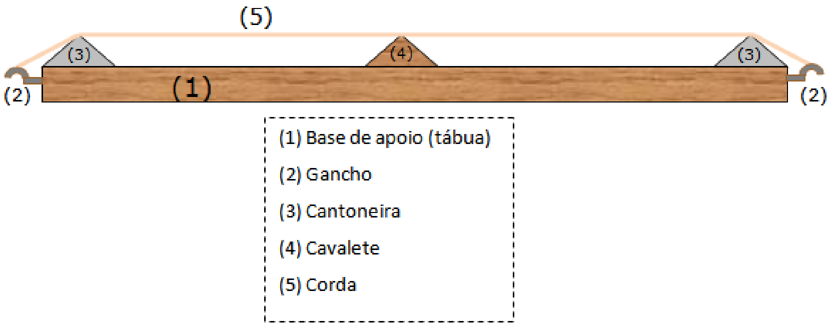
Fonte: https://blogdacapoalfine.wordpress.com/tag/hino-a-sao-joao-batista/

Prioli (2013, p. 126) afirma que “firmou-se para esse sétimo som a sílaba Si, por serem as iniciais das palavras Sancte Johanes”. Ainda segundo a autora, em meados do século XVIII, um músico italiano, Doni, substituiu a sílaba Ut, tão incômoda para o solfejo, pela sílaba Dó, primeira do seu nome.

2.3 A ESCALA DE PITÁGORAS

O filósofo e matemático grego Pitágoras teve grande contribuição no desenvolvimento da escala musical. Em seus experimentos com um monocórdio[2], conforme Figura 1.

Figura 2: Monocórdio.



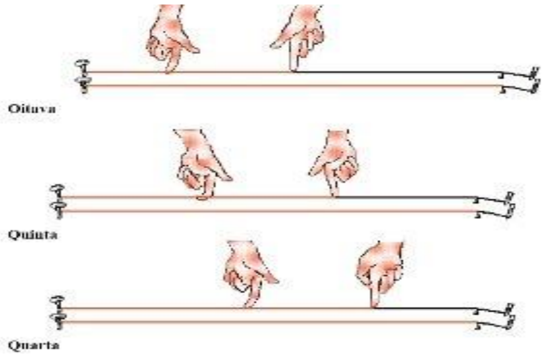
Fonte: https://clubes.obmep.org.br/blog/aplicando-a-matematica-basica-construcao-de-um-monocordio/

Pitágoras percebeu que havia uma relação inversamente proporcional entre o tamanho da corda e a frequência. À medida que o tamanho da corda diminuía o som era modificado, ficando cada vez mais agudo. Ao dividir a corda em sua metade produzia-se uma nota cuja frequência era exatamente o dobro da frequência original, uma nota mais aguda chamada de oitava justa. Continuando os experimentos, Pitágoras fez a divisão da corda inteira por 3/4, resultando na quarta justa, e também fez a divisão da corda inteira em 2/3, obtendo uma frequência de 3/2 acima da nota gerada pela corda inteira, a fundamental. Daí, Pitágoras conseguiu relacionar sons agradáveis, consoantes, e sons desagradáveis, dissonantes, em função da posição em que a parte móvel do objeto dividia a corda inteira. Com esse raciocínio Pitágoras também conseguiu perceber que havia sons agradáveis quando se fazia a divisão de 2/3 da corda solta (o que chamamos de uma quinta), e 3/4 da mesma corda, conhecida no mundo da música como uma quarta, ou seja, ao dividir a corda ao meio ele percebeu que o som era idêntico ao som produzido pela vibração da corda solta. Embora tais experimentos serem sempre atribuídos a Pitágoras, acredita-se que parte desses conhecimentos já eram conhecidos muito antes por diferentes culturas antigas (Fallas, 1992, p. 270 apud ABDOUNUR, 2015, p. 27). É possível visualizar,

[2]O monocórdio é um instrumento composto por uma única corda estendida entre dois cavaletes fixos sobre uma prancha, possuindo ainda, um cavalete móvel colocado sob a corda para dividi-la em duas sessões (ABDOUNUR 2002)

conforme imagem abaixo, que há uma relação entre a diminuição da corda e as consonâncias investigadas por Pitágoras.

Figura 3: Experimentos.



Fonte: https://escutecomigo.wordpress.com/2013/03/31/musica-pitagoras-e-a-matematica/

Para Souza (2012, p. 20) o "[...] experimento estabeleceu uma relação entre intervalos musicais e razões matemáticas entre números inteiros, relação esta que proporcionou a primeira sistematização matemática de uma escala..."

Para Guido D'Arezzo (992 -1050?), a curiosidade de Pitágoras começou quando ele observou, ao passar por uma oficina, sons de martelos em uma bigorna, percebendo que havia sons diferentes produzidos naquela atividade. Daí, Pitágoras aproximou-se e conseguiu perceber que havia uma relação harmônica de acordo com o peso. Ao retirar um deles, que não soava muito bem juntamente com os demais, o filósofo e pesquisador descobriu que os pesos eram os números 12, 9, 8, 6. Obteve-se a partir desses números as razões 1/2 (6/12, oitava), 3/4 (9/12, quarta) e 2/3 (8/12, quinta). Esse estudo contribuiu para que o filósofo formulasse sua teoria musical, contribuindo significativamente para o desenvolvimento da música ocidental.

2.4 A ARTE DA MÚSICA E SEUS GÊNEROS

A música pode ser percebida a partir do ambiente sociocultural das pessoas. Em cada lugar existe um tipo de expressão musical rico em representatividade: a música indígena, afro, sacra, pop e etc. Logo,

> O indivíduo receptivo à música começa a sentir e a compreender, motivado por uma mobilização interior que favorece uma musicalidade ativa, que lhe permite informar suas experiências, extravasar suas emoções e refletir sobre seus interesses e gostos musicais (CIRINO, 2011, p.299).

Assim, não é difícil perceber que a música, seja ela do gênero samba, chorinho, axé, rock, seresta, arrocha, clássico, forró ou MPB, etc. principalmente em se tratando da cultura popular brasileira, suscita diferentes reações em cada pessoa. Alguns gostam mais de um gênero, outros nem tanto. O que não é difícil notar é que a grande maioria das pessoas ouvem música, cantam, dançam, choram, riem, pulam, gritam e até mesmo silenciam.

No Brasil um dos ritmos mais alegres que fazem parte da cultura musical das pessoas é o chorinho, um gênero que surgiu no século XIX, no Rio de Janeiro, que caracteriza-se, dentre outras coisas, pelo seu ritmo agitado, exigindo habilidade dos músicos na execução dos instrumentos, geralmente escrito em compasso binário, com uma variação enorme de nuances[3]e figuras musicais.

Outro gênero muito difundido na cultura popular brasileira é o samba, que teve presença marcante nas comunidades afro-brasileiras. Os principais elementos destacáveis nesse gênero, além das letras características da vivência de cada região, são o conjunto de instrumentos de percussão: pandeiro, surdo, tamborim e cuíca, por exemplo, além daqueles de cordas, como o violão, cavaquinho[4] e bandolim[5].

A escrita musical tem suas peculiaridades, as partituras para instrumentos de cordas são escritas em forma de cifras, utilizando-se símbolos para representar notas e acordes. No entanto há alguns instrumentos semelhantes, como o violino e o violoncelo, que têm sua música escrita em pautas ou pentagramas com figuras, como semibreve, mínimas, dentre outras.

A maioria dos músicos de orquestras e das filarmônicas leem partituras na íntegra, de acordo com as exigências musicais relacionadas ao próprio gênero clássico musical, mas há gêneros, por exemplo o jazz, o qual dá liberdade ao músico para exercer sua própria criatividade durante a execução de suas melodias, sempre recorrendo aos improvisos. “O termo improvisação em música revela uma predisposição para se criar musicalmente, em tempo real, sem a possibilidade de correções, reportando à ideia de habilidade, experiência, conhecimento musical” (RODRIGUES, 2012, p. 61).

A Bahia é um dos estados brasileiros onde há grande influência musical entre as pessoas. Terra do gênero musical axé, e de grandes nomes da MPB, como: Gilberto Gil, Caetano Veloso, Maria Bethânia, Gal Costa, dentre outros. além do lendário cantor de rock, Raul Seixas.

Um dos maiores eventos culturais do mundo é o carnaval de Salvador, festa realizada todos os anos por diversos artistas, os quais “apresentam-se em cima do trio elétrico”. É importante registrar também que foram os baianos os responsáveis pela criação da “guitarra

[3] Variações que dão sensibilidade.
[4] Instrumento que possui quatro cordas e uma escala de 12 trastes. Suas primeiras versões surgem no século xviii em Portugal, e ao longo do tempo, com o processo de emigração portuguesa ele se inseriu em outros países, como: Brasil e Cabo Verde (país da Africa). O som do cavaquinho é bem agudo.
[5] Surgiu na Itália entre os séculos xvi e xvii.

baiana", um instrumento com dimensões e afinação diferentes da guitarra elétrica. A guitarra baiana é menor e tem afinação em quintas, e a elétrica possui sua afinação em quartas. Um dos principais instrumentistas dessa guitarra é Armandinho Macêdo, exímio músico.

O Projeto Baiano "Neojibá" fundado em 2007 pelo maestro Ricardo Castro, um pianista conceituado, que desde criança já demonstrava seu talento musical, tem um caráter de desenvolvimento social via ensino da música. Os integrantes desse projeto estudam música em vários níveis. A orquestra, por sua vez, apresenta-se em diversos lugares do Brasil e do Mundo, tendo em seu repertório grandes clássicos musicais. A mesma possui seus diversos e imprescindíveis instrumentos de sopro, percussão, cordas e etc. Os principais instrumentos de cordas utilizados nesse contexto são: o violoncelo com suas cordas *(dó; sol; ré; lá)* e também o violino, que tem suas cordas de forma ascendente em intervalos de quintas, *(sol; ré; lá; mi)*. Note que as cordas do violino possuem uma quinta acima das cordas do violoncelo. Para uma melhor compreensão a respeito dos intervalos, considere o exposto na tabela abaixo:

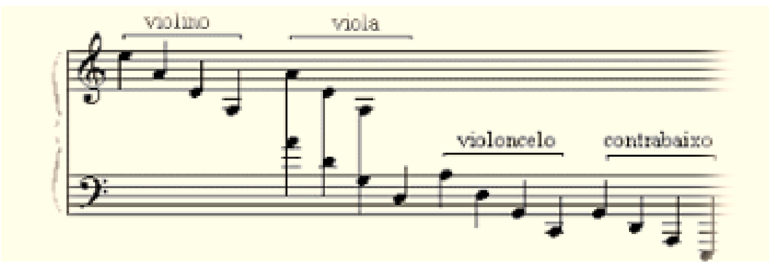
Quadro 2: Intervalos.

dó	*ré*	*mi*	*fá*	*sol*	*lá*	*si*
1 tom	*1 tom*	*½ tom*	*1 tom*	*1 tom*	*1 tom*	*½ tom*
ré	*mi*	*fá*	*sol*	*lá*	*si*	*dó*

Fonte: O autor.

Há, portanto, distâncias de: entre dó e ré (1 tom), entre ré e mi (1 tom), entre mi e fá (1/2 tom) e entre fá e sol (1 tom). Ao somar todos eles, temos: 1tom + 1 tom + 1/2 tom + 1 tom = 3 e 1/2 tons. Logo, essa condição é suficiente para determinarmos um intervalo de quinta (uma quinta justa como veremos mais adiante). Perceba que as outras relações possuem essa mesma distância, neste caso, tendo como referência as notas do violoncelo *(dó; sol; ré; lá)*. Também é possível ratificar essa ideia a partir da escrita na pauta, conforme imagem abaixo:

Figura 4: Pauta.



Fonte: https://musica.ufma.br/bordini/comp6/tec/cordas/cordas.htm

2.5 AS LEIS DA ARTE E O CURRÍCULO

A reforma educacional de 1971 determinou que a Arte devesse ser uma disciplina obrigatória no currículo escolar, atingindo diversas camadas da população e criando inúmeras oportunidades de trabalho. Como decorrência da Lei anterior 5692/71, foi criado em 1973, pelo governo federal, os cursos superiores para a formação do professor de Educação Artística- licenciaturas plenas e curtas, Resolução nº 23, de 23 de outubro de 1973, além do Parecer nº 1.284/73-CFE. Após a Lei 5692/71 o ensino de arte, denominado como educação artística, passou a ser componente curricular obrigatório, mas em São Paulo, foi considerado como atividade e não como área de estudo ou disciplina. Assim, a partir da promulgação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação 9394/96, a denominação de educação artística mudou para ensino de arte e hoje continua sendo um componente curricular obrigatório em toda a educação básica.

O Ministério da Educação e Cultura - MEC divulgou os Parâmetros Curriculares para o Ensino de Arte, contemplando as linguagens de Artes Visuais, Teatro, Música e Dança em paralelo iniciou um processo de encerramento dos cursos de educação artística, criados para formar professores multidisciplinares e a criação de cursos especializados em uma das linguagens, uma delas a educação musical. No entanto, mesmo com a Lei 13.278/2016 que determina a obrigatoriedade da música nas escolas de educação básica, percebe-se que ainda há muitos entraves que dificultam o seu cumprimento. Para Guimarães (2010), um desses problemas é a carência de profissionais qualificados para exercer tais atividades.

Segundo Kleber (2010) os pontos positivos marcados com a aprovação desta lei apontam para a riqueza cultural e artística que precisa ser incorporada realmente no seu projeto educacional, desde que escola e espaços que trabalhem com educação comecem a valorizar e incorporar, também, conteúdos e formas culturais presentes na diversidade da textura social. Para a autora, o ensino das Artes aliado em projetos dessa natureza, vem ao encontro de propostas inovadoras, em que a expressão cultural e artística é reconhecida como dimensões insubstituíveis e únicas no sentido de promover o desenvolvimento humano. Kleber (2010) recomenda como proposta não fechar em conteúdos preestabelecidos, mas reconhece que a diversidade cultural deve ser considerada ao se elaborar os projetos, que se valorize a cultura local, mas junto ao conhecimento musical que é uma herança da humanidade.

Nas palavras da autora a Lei defende que se abra um espaço para discutir o que se pode fazer para melhorar a educação brasileira, permitindo um planejamento para inseri-la no sistema educacional e conectando-a ao exercício da cidadania cultural que é um direito de todo brasileiro. Para Kleber (2010) a escola é o lócus ideal para desenvolver as práticas musicais de forma favorável para a transformação social dos grupos e indivíduos, pois permite o acesso de toda a população. Dessa maneira, a autora conclui que a “Educação Musical mais que formar músicos profissionais ou especialistas na área, poderá desenvolver o educando cultural e psicomotora, estimulando o contato com diferentes linguagens”, entre elas a linguagem Matemática, contribuindo deste modo para a sociabilidade e democratizando o acesso à arte. Kleber (2010) lembra que “a Música sendo conteúdo obrigatório em toda Educação Básica conforme determina a Lei nº11. 769/2008 as escolas devem adaptar seus currículos até o início do ano letivo de 2012” para possibilitar aos alunos construir conhecimentos críticos e sensíveis para além da vivência de jogos musicais e das aprendizagens da escrita musical. Segundo a autora a redação dada pela Lei nº 12.287/2010 para a LDB nº 9.394/96, em seu artigo 26 § 2º estabelece que:

> Art. 26. Os currículos do ensino fundamental e médio devem ter uma base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e da clientela. § 2o O ensino da arte, especialmente em suas expressões regionais, constituirá componente curricular obrigatório nos diversos níveis da educação básica, de forma a promover o desenvolvimento cultural dos alunos.

De acordo com Kleber (2010), com a publicação da Lei 13.278/2016 incluindo as artes visuais, a dança, a música e o teatro nos currículos dos diversos níveis da educação básica, a nova Lei altera a LDB 9.394/1996 e determina um limite de cinco anos para que os sistemas de ensino solicitem a formação de professores para disseminar esses componentes curriculares no ensino infantil, no ensino fundamental e no ensino médio.

Enfatiza a autora que o ensino de arte já está amparado na legislação uma vez que deverá ser componente curricular obrigatório na educação básica, “de forma a promover o desenvolvimento cultural dos alunos”, principalmente em suas expressões regionais. Segundo Kleber (2010), a proposta original do ex-senador Roberto Saturnino Braga, aponta como obrigatório o ensino de música, artes plásticas e artes cênicas, mas a Câmara dos Deputados mudou o texto para “artes visuais” em substituição a "artes plásticas", e introduz a dança, a música e o teatro, já antevistos no texto, como as linguagens artísticas que necessitarão estar atualmente nas escolas. Entretanto, para o relator da matéria na Comissão de Educação (CE), a essência da proposta foi mantida no substitutivo da Câmara e enfatiza que esse é um projeto que só traz vantagens, ao incluir o ensino da arte nos currículos das escolas. Para o relator, sem isso não conseguiremos criar uma consciência, nem ensinar os nossos jovens a maravilhar-se com as belezas do mundo, o que é tão extraordinário como fazê-los compreender pela ciência, a realidade do mundo que o cerca.

3 ESCALAS E SONS

Neste capítulo serão abordados alguns conceitos fundamentais da música, como: fórmula de compasso, formação de escala, tons, semitons, intervalos, acordes etc. Além disso, será possível ler e conhecer um pouco sobre o som, a maneira pela qual pode-se representá-lo, com ênfase à função seno.

3.1 TEORIA E FORMAÇÃO DE ESCALAS

Segundo Med[6] (2017, p. 11) “Música é a arte de combinar os sons simultânea e sucessivamente, com ordem, equilíbrio e proporção dentro do tempo”. Ainda nessa linha, para Priolli (2013, p. 6) “Música é a arte dos sons, combinados de acordo com as variações da altura, proporcionados segundo a sua duração e ordenados sob as leis da estética”. Portanto, percebe-se que nenhum dos dois autores deixa de mencionar a organização e a relação de proporção, a qual está totalmente inserida em diversas escritas musicais. A respeito das partes fundamentais da música, tem-se o seguinte:

> MELODIA – conjunto de sons dispostos em ordem sucessiva HARMONIA – conjunto de sons dispostos em ordem simultânea; CONTRAPONTO – conjunto de melodias dispostas em ordem simultânea; RITMO – ordem e proporção em que estão dispostos os sons que constituem a melodia e harmonia. (MED, 1996, p. 11)

Os músicos que participam de orquestras, filarmônicas[7], quartetos e outros grupos voltados para o estudo de partituras, geralmente complementam-se durante a execução das melodias. Isso porque uma filarmônica, por exemplo, possui grupos de instrumentos familiares. Cada um deles executa um tipo de musicalidade, culminando com a obra musical integrada, ou seja, o conjunto de partituras tocadas separadamente, com o objetivo de combinar-se entre si, para que a música aconteça dentro de sua base teórica e natural. Portanto, na falta de um desses

[6] Professor Bohumil Med nasceu na Tchecoslováquia em 24 de setembro de 1939. Chegou ao Brasil em 1968 para fazer parte da Orquestra Sinfônica Brasileira. Em 1974 entrou para a Universidade de Brasília (UnB) como professor do Departamento de Música. Bohumil escreveu um livro chamado TEORIA DA MÚSICA.

[7] Vem do Italiano “Filarmonico” “amante da música”, do Grego Philo, “o que ama”. Grupo de músicos reunidos para tocar de forma voluntária, o termo surgiu no século xix. As pequenas cidades da Bahia, por exemplo, sempre mantiveram suas Liras, como são conhecidas até os dias de hoje.

grupos: cantoria, contracanto, marcação, percussão, entre outros, certamente o produto musical executado será limitado e nem sempre agradável à escuta.

Segundo Med (2017, p. 11), “A matéria prima da música é o som, a sensação produzida no ouvido pelas vibrações de corpos elásticos.” Logo, para que ocorra a produção sonora faz-se necessário haver alguns fenômenos físicos. O som é “como uma onda mecânica longitudinal que se propaga em meios materiais ou como a sensação auditiva causada pela vibração de um meio material” (CABRAL; LAGO, 2004),

Para Priolli (2013, p. 7), “Os sons musicais são representados graficamente por sinais chamados notas; e à escrita da música dá-se o nome de notação musical.” Dessa maneira, durante a iniciação musical, certamente os estudantes irão memorizar os nomes das notas musicais, principalmente da escala heptatônica, (7 notas): *dó; ré; mi; fá; sol; lá; si*. Segundo Med, essa escala é conhecida como escala natural ou diatônica, em que obtém-se a oitava com a repetição da primeira. Outros aspectos a respeito dessa escala podem ser observados a partir da seguinte explanação:

> A escala diatônica é formada por cinco tons e dois semitons. Com essa quantidade de tons e semitons, ela pode constituir dois modos de configuração distintos, que, juntos, formam duas colunas estruturais da música ocidental: o modo maior e o modo menor. O modo maior apresenta a organização dos graus conjuntos exatamente da mesma forma (…) T, T, st, T, T, T, st. Nesse caso, (...) retrata a escala de Dó maior, pois começa e termina com a nota Dó, a tônica da escala. Se iniciarmos uma escala diatônica a partir do VI grau, o superdominante, encontraremos a escala de Lá menor natural (...), a qual também contém cinco tons e dois semitons, porém ordenados de maneira diferente: T, st, T, T, st, T, T. (GOROSITO, 2020, p. 130).

Gorosito (2020), ainda afirma que acrescenta-se 5 outras notas à escala *dó; ré; mi; fá; sol; lá e si*, são elas: Dó sustenido[8], Ré sustenido, Fá sustenido, Sol sustenido e Lá sustenido. Trata-se, portanto, da escala completa *dó; #dó; ré; #ré; mi; fá; #fá; sol; #sol; lá; #lá; si*, ou seja, a escala cromática, também denominada como temperada. Os sustenidos, assim como os bemóis[9], em se tratando do contexto da música ocidental, são a menor distância entre duas notas, ou dois sons. Os mesmos são chamados de acidentes musicais.

> Os acidentes estão diretamente relacionados com as pequenas variações de alturas que há entre um som e outro. Sons bem próximos, separados por pequenas diferenças de frequência, na região média, por exemplo, estão a uma distância aproximada de 30 Hz. Na música, essas pequenas variações de alturas equivalem a um semitom que significa o espaço existente entre uma tecla branca do piano e uma tecla preta imediatamente ao lado. A soma de dois semitons forma um tom. (GOROSITO, 2020, p. 81).

---

[8] Símbolo (#) que eleva meio tom a uma nota.
[9] Símbolo (b) baixa a nota em meio tom.

Os estudos sobre intervalos[10] estão ligados à escala musical. As tabelas abaixo ilustram algumas peculiaridades, note que entre as notas *dó* e *lá* há uma distância de quatro tons e meio, logo, temos um intervalo denominado de sexta maior. No entanto, quando as posições das notas das extremidades (em destaque) são trocadas, o intervalo muda. Nesse caso, o mesmo possui um tom e meio, conforme as tabelas abaixo.

Quadro 3: Intervalos de 6ª maior.

NOTA ***dó***	1 **tom**	NOTA ré	1 **tom**	NOTA mi	½ **tom**	NOTA fá	1 **tom**	NOTA sol	1 **tom**	NOTA ***lá***

Fonte: O autor.

Quadro 4: Intervalos de 3ª menor.

NOTA ***lá***	1 **tom**	NOTA si	½ **tom**	NOTA ***dó***

Fonte: O autor.

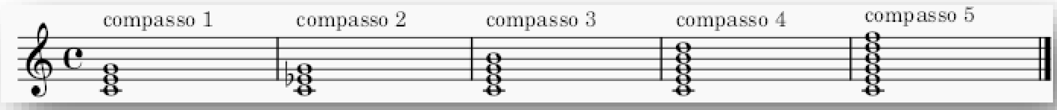
A partir dessa ideia é possível adentrar o campo dos acordes: as tríades, tétrades etc. com o intuito de melhorar a compreensão dos conceitos que envolvem harmonia. Para formar um acorde maior basta utilizar o primeiro, terceiro e o quinto graus. A formação dos acordes menores segue o mesmo critério, mas o terceiro grau deve ser um semitom abaixo. Priolli (2013, p. 43) diz que "dá-se o nome de acorde ao conjunto de sons ouvidos simultaneamente, e cujas relações de altura são determinadas pela lei da natureza." Para Med (2017, p. 274), acorde é a combinação de três ou mais sons simultâneos diferentes".

> A nota mais grave do acorde em posição original (terças sobrepostas) se chama fundamental. As outras notas têm o nome do intervalo que formam com a fundamental. A fundamental é a nota básica, a nota que dá origem ao acorde e por isso é a nota mais importante do acorde. (MED 2017, p. 276)

A figura 5 ilustra algumas situações referentes aos acordes. Perceba que cada um dos cinco compassos preenchidos com figuras de semibreves tem sua própria característica, as quais classificam de maneira teórica suas composições e terminologias. Assim, no primeiro compasso, por exemplo, tem-se um acorde de *dó* maior, formado por: *dó*, *mi* e *sol*.

[10] Distância entre dois sons.

Figura 5: Intervalos Mistos.



Fonte: O autor.

No primeiro compasso da figura 5 há um acorde maior. O mesmo possui uma terça maior entre as notas *dó* e *mi*, com dois tons, seguidos de uma terça menor, com um tom e meio entre as notas *mi* e *sol.* Segundo Med (2017, p. 277), "Acorde perfeito maior é formado por uma 3ª M[11] e uma 3ª m[12] sobrepostas (ou por uma 3ª M e uma 5ª j)." No segundo compasso, o terceiro grau é uma nota bemolizada (um mi bemol, com meio tom abaixo), o que o caracteriza como um acorde menor. Em seguida, no terceiro compasso há um acorde com sétima, composto pelas notas *dó; mi; sol; si,* e os outros são de nona, com cinco notas, *dó; mi; sol; si*; *ré,* e décima primeira, com seis notas, *dó; mi; sol; si*; *ré; fá.* Portanto, percebe-se que a classificação dos acordes está diretamente relacionada com a distância dos intervalos que o compõem, conforme tabela abaixo:

Quadro 5: Outros Intervalos.

	Classificação dos Intervalos	**Distância em Tons**
ordem	Fundamental ou tônica	**0**
I	***2ª menor***	***1/2***
II	***2ª maior***	***1***
III	***3ª menor***	***1 e 1/2***
IV	***3ª maior***	***2***
V	***4ª justa***	***2 e 1/2***
VI	***4ª aumentada ou 5ª diminuta***	***3***
VII	***5ª justa***	***3 e 1/2***
VIII	***5ª aumentada ou 6ª menor***	***4***
IX	***6ª maior***	***4 e 1/2***
X	***7ª menor***	***5***
XI	***7ª maior***	***5 e 1/2***

Fonte: O autor

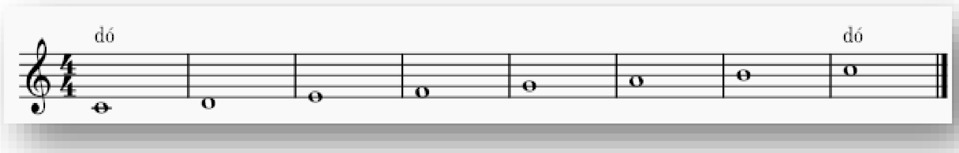
[11] 3ªM (terceira maior)
[12] 3ªm (terceira menor)

Dessa maneira, a partir das ideias de Abdounur (2002), a obra de Descartes é uma tentativa de explicar a base da harmonia e da dissonância musicais em termos matemáticos. Nela Descartes apresenta um grande número de diagramas e tabelas matemáticas que ilustram as relações proporcionais envolvidas em vários intervalos musicais.

3.2 ESCALAS E TONS

Os estudos e a compreensão das escalas musicais auxiliam diretamente na execução de melodias, formação de acordes, improviso etc. O tom de uma determinada música pode ser reconhecido logo no início de uma partitura. Por exemplo, é possível perceber em uma pauta[13] a tonalidade maior ou menor quando se tem ou não, sustenidos e bemóis, conforme imagem abaixo.

Figura 6: Escalas.



Fonte: O autor.

Nesse caso, trata-se da escala de *dó* maior. Perceba que não há sustenidos (#), nem bemóis (b). Portanto, para formação de escalas e posteriormente o reconhecimento de suas tonalidades não se deve perder de vistas o padrão de cada uma delas, uma vez que conseguimos formar qualquer tonalidade com essa lógica, associando a ela o número 1 para tom e 1/2 para semitom, ou seja, 1, 1, 1/2, 1, 1, 1, 1/2. (MARTINS, 2015). Esse tipo de padrão serve de estrutura para as escalas maiores, conforme quadro abaixo.

Quadro 6: Escalas Maiores Sustenizadas.

1ª	tom	2ª	tom	3ª	semitom	4ª	tom	5ª	tom	6ª	tom	7ª	semitom	8ª
dó		*ré*		*mi*		*fá*		*sol*		*lá*		*si*		*dó*
ré		*mi*		*#fá*		*sol*		*lá*		*si*		*#dó*		*ré*
mi		*#fá*		*#sol*		*lá*		*si*		*#dó*		*#ré*		*mi*
#fá		*#sol*		*#lá*		*si*		*#dó*		*#ré*		*#mi*		*#fá*
sol		*lá*		*si*		*dó*		*ré*		*mi*		*#fá*		*sol*
lá		*si*		*#dó*		*ré*		*mi*		*#fá*		*#sol*		*lá*
si		*#dó*		*#ré*		*mi*		*#fá*		*#sol*		*#lá*		*si*

Fonte: O autor.

[13] As 5 linhas em que as figuras musicais são escritas.

Note que (ao fazer uma visualização de forma horizontal) a escala de *dó* maior não possui nenhum sustenido. Assim, quando há apenas um sustenido na armadura de clave[14] considera-se que a tonalidade é de *sol* maior, ou seja, enuncia-se tomando como referência a nota posterior ao *#fá* (sustenido). O mesmo ocorre quando há dois sustenidos, nesse caso são *#fá* e *#dó*, e considera-se para efeito de reconhecimento de tonalidade a nota posterior ao *#dó* (sustenido), que nesse caso é *ré.* Logo, a tonalidade é *ré* maior. Em outras palavras pode-se afirmar que a escala de *sol* maior possui um sustenido, e a escala de *ré* maior possui dois sustenidos. Na prática, tomando como exemplo a escala de *sol maior*, durante a leitura e execução de uma partitura o músico terá que tocar todos as notas *fá* como *#fá* (sustenido), exceto se houver algum acidente[15] ou alteração musical, e também quando há existência de um bequadro. Med (2017, p. 33) afirma que "bequadro anula os efeitos dos demais acidentes, tornando a nota natural. Dependendo do acidente anterior, o bequadro pode elevar ou abaixar a nota."

Figura 7: Acidentes.

Fonte: http://o-clarinetista.blogspot.com/2014/05/acidente-fixo-ocorrentes-e-de-precaucao.html

Ao observar as pautas da imagem acima é possível fazer algumas ponderações importantes. Na primeira pauta há um trecho musical escrito em compasso ternário (3/4), na clave[16] de sol, com dois bemóis, indicando que a tonalidade está em *si bemol* maior. No entanto há uma mudança já no primeiro compasso, quando aparece um bequadro com efeito de tornar a nota *si*, que deveria ser bemol, em uma nota natural. No segundo compasso a nota *si* volta a ser bemol, abaixando 1/2 tom.

Na segunda pauta o trecho musical está escrito em compasso quaternário (4/4), na clave de *fá*, e não aparece nenhum símbolo em sua armadura de clave, nem bemol (b), nem sustenido (#). No entanto perceba que na segunda nota do primeiro tempo do único compasso em

[14] Conjunto de acidentes (bemóis e sustenidos) geralmente escrito no início da partitura.
[15] Símbolo musical que modifica a entonação da nota.
[16] Para Med (2013, p. 16) "A clave é um sinal colocado no início da pauta, que dá seu nome à nota escrita em sua linha. Nos espaços e nas linhas subsequentes, ascendentes ou descendentes, as notas são nomeadas sucessivamente de acordo com a ordem: dó , ré , mi , fá , sol, lá , si , dó."

discussão, há o elemento sustenido (#), ou seja, a nota *mi* deve ser elevada a 1/2 tom, sendo escrita como *#mi*. Logo, trata-se de uma música mais alta e mais complexa para alguns instrumentos da clave de fá, como o trombone, por exemplo.

Agora analisemos as tonalidades das escalas a partir da armadura com os bemóis. O padrão para construção dessas escalas é o seguinte: *tom; semitom; tom; tom; semitom; tom; tom*. Ou seja, 1, 1/2, 1, 1, 1/2, 1, 1, conforme tabela abaixo, a qual também deve ser analisada de forma horizontal.

Quadro 7: Escalas Menores Bemolizadas.

1	tom	2	semitom	3	tom	4	tom	5	semitom	6	tom	7	tom	8
dó		*ré*		*b mi*		*fá*		*sol*		*b lá*		*b si*		*dó*
ré		*mi*		*fá*		*sol*		*lá*		*b si*		*dó*		*ré*
b mi		*fá*		*b sol*		*b lá*		*b si*		*dó*		*b ré*		*b mi*
fá		*sol*		*b lá*		*b si*		*dó*		*b ré*		*b mi*		*fá*
sol		*lá*		*b si*		*dó*		*ré*		*b mi*		*fá*		*sol*
b lá		*b si*		*b dó*		*b ré*		*b mi*		*b fá*		*b sol*		*b lá*
b si		*b dó*		*b ré*		*b mi*		*fá*		*b sol*		*b lá*		*b si*

Fonte: O autor.

A escala que começa com a nota *ré* possui apenas um bemol. Trata-se, portanto da tonalidade de *ré* menor. A partir daí, é possível identificar as tonalidades das outras tendo como base o seguinte raciocínio: elimina-se a última e conta três graus abaixo, tendo como base a penúltima. No entanto é preciso conhecer a ordem dos bemóis, são eles: *si, mi, lá, ré, sol, dó, fá*. Analisemos por exemplo a escala iniciada pela nota *fá*. Note que existem 4 bemóis: *lá b, si b, ré b, mi b*. Colocando-os na ordem, eles ficam assim: *si, mi, lá, ré*. Daí, elimina-se o último, e conta-se três graus abaixo, a partir da nota *lá*, da seguinte forma: *lá, sol, fá*. Portanto, a tonalidade deve ter o nome dessa última nota, acrescida a terminologia (menor), *fá* menor. Esse padrão deve ser utilizado para identificar as outras tonalidades dessas escalas. No entanto, para aquelas que possuem 5, 6, e 7 bemóis, a nomenclatura deverá ser: bemol menor, em vez de apenas menor. É importante mencionar que para a contagem dos graus é preciso considerar a escala diatônica, conforme tabela abaixo:

Quadro 8: Graus.

1º grau	2º grau	3º grau	4º grau	5º grau	6º grau	7º grau	1º grau
dó	ré	mi	fá	sol	lá	si	dó

Fonte: o autor.

O grande músico nordestino Luiz Gonzaga[17] traz em seu repertório diversas melodias popularmente conhecidas, que fazem parte da cultura popular brasileira, dentre elas estão as melodias, "Asa Branca" e "Assum Preto". Asa Branca é conhecida por muitos como o "Hino Nordestino". Geralmente essas melodias são tocadas em festividades juninas, principalmente as mais tradicionais, como, por exemplo, o forró pé-de-serra. Contudo, devido a boa aceitação das mesmas, é comum ouvi-las em diversos contextos da referida cultura.

O trecho abaixo está escrito em lá maior. No entanto, há possibilidades de escrevê-lo em tonalidades mais simples, como dó maior, por exemplo.

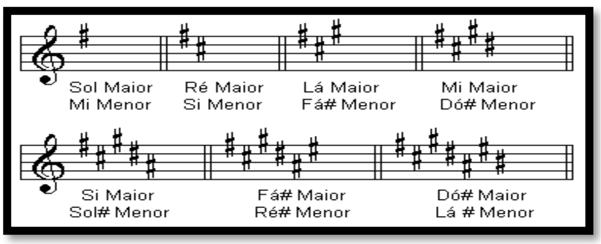
Figura 8: Baiao.

Fonte: https://violinosnotas.blogspot.com/2010/12/notas-da-musica-asa-branca-pra-violino.html

3.3 ESCALAS E TONS RELATIVOS

Os estudos iniciais sobre reconhecimentos de tonalidades podem ser realizados utilizando como parâmetro, por exemplo, a escala de sol maior sustenizada. Essa escala possui um sustenido. Daí conta-se em ordem descendente, da seguinte maneira: *Sol* (maior), antes do *sol* as notas da escala são *fá; mi*. Logo, a nota *mi* caracteriza-se como a relativa menor da escala de *sol*. Ou seja, *sol* maior tem como sua relativa a tonalidade de *mi* menor. Em outras palavras, basta contar três graus abaixo da nota de referência para determinar a tonalidade menor**.**

Figura 9: Sustenidos.



Fonte: < https://musicaeadoracao.com.br/26112/teoria-musical-online-escalas-armaduras-de-clave/ >

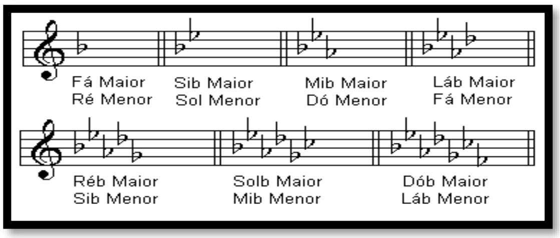
---

[17] Luiz Gonzaga do Nascimento nasceu em 13 de dezembro de 1912 em Exu, Pernambuco. O Rei do Baião, como ficou conhecido, tocava diversos instrumentos e deixou um legado musical, cultural, artístico e etc. de suma importância para o país. Gonzaga faleceu em 02 de agosto de 1989 no Hospital Santa Joana, localizado no Recife – Pernambuco.

Perceba que esse padrão deve ser considerado para os demais casos. No entanto, nos casos em que há 3, 4, 5, 6, 7 sustenidos, a nomenclatura modifica, enuncia-se, por exemplo, como no último compasso da imagem. O tom relativo de *dó#* sustenido maior é *lá#* sustenido menor.

Em se tratando das relativas envolvendo os bemóis, deve-se observar o seguinte raciocínio: a tonalidade de fá maior tem como sua relativa, ré menor. Qual o padrão por trás dessa ideia? Continuemos contando três graus abaixo. Por exemplo: no segundo compasso há dois bemóis, *si* e *mi*, eliminando o último, fica apenas *si b.* Daí, conta-se três graus abaixo, a partir dessa nota: *si, lá, sol.* Logo, pode-se perceber que a relativa de *si b* maior é sol menor. Esse raciocínio é uma base para identificar as outras escalas relativas.

Figura 10: Bemóis.



Fonte: < https://musicaeadoracao.com.br/26112/teoria-musical-online-escalas-armaduras-de-clave/ >

3.4 O SOM E SUAS PRINCIPAIS CARACTERÍSTICAS

Em se tratando da física do som, Lacerda (1967) e Med (1996) definem quatro importantes propriedades, são elas:

> DURAÇÃO – tempo de produção do som. INTENSIDADE – propriedade do som de ser mais fraco ou mais forte. ALTURA – propriedade do som de ser mais grave ou mais agudo. TIMBRE – qualidade do som, que permite reconhecer a sua origem. (LACERDA, 1967, p. 1)

A duração do som pode ser percebida quando alguém toca um instrumento de percussão: um timbau, um triângulo, um atabaque, um pandeiro etc. Por quanto tempo um indivíduo escuta o soar de um desses instrumentos a cada batida? E por quanto tempo escuta-se o soar de um sino ao ser badalado? É possível responder essas perguntas dizendo que o tempo de emissão de um determinado som está ligado ao tempo de suas vibrações. Uma outra maneira de perceber a duração é a partir da leitura de partituras, geralmente elas possuem diversas figuras, e cada uma delas tem seu próprio tempo no contexto da divisão musical. Para Med (2017, p. 12), “A alternância de notas de durações diferentes resulta em dinâmica". A imagem abaixo é de uma lição envolvendo figuras musicais com tempos diferentes.

Figura 11: Lição Fundamental em compasso 4/4.

Fonte: o autor.

No primeiro compasso da direita para a esquerda há uma figura de semibreve, com o valor de quatro tempos. No segundo compasso as figuras são de mínima (2 tempos), semínima (1 tempo) e colcheia (1/2 tempo), além de uma pausa[18] que possui sempre o mesmo tempo da nota. A diferença é que a pausa simboliza o momento em que o músico conta o tempo em silêncio, por exemplo, em uma pausa de quatro tempos o músico silencia-se durante esse período enquanto os outros tocam.

As outras figuras que estão escritas na pauta são a semicolcheia e a fusa, ambas com 1/4 e 1/8 de tempos respectivamente. É importante notar que os dois últimos compassos possuem pausas diversas: semicolcheia, colcheia, semínima e mínima, no terceiro, e no quarto elas são de fusa, semicolcheia, colcheia, semínima e mínima. Assim como acontece com as figuras, o tempo de cada pausa é sempre a metade do tempo da pausa anterior, seguindo a ordem preestabelecida pela fórmula de compasso.

A intensidade do som está relacionada com a energia da onda sonora. Comumente as pessoas costumam associá-la ao volume e a altura do som. No entanto já vimos que a altura relaciona-se com a frequência. Considerando os conhecimentos sobre Física, quanto maior é a amplitude mais energia a onda carrega e mais intenso será o som.

> "SOM é a sensação produzida no ouvido pelas vibrações (movimentos que se repetem de forma regular ou irregular considerando um intervalo de tempo) de corpos elásticos. Uma vibração põe em movimento o ar na forma de ondas sonoras que se propagam em todas as direções simultaneamente." (MED 1996, p. 11)

O som é medido por uma unidade conhecida como decibel, e o ouvido humano limita-se a sons abaixo de 130 decibéis. Acima disso pode ocorrer problemas de saúde para as pessoas que se dispuserem a ouvi-lo. Geralmente considera-se os ruídos como sons irregulares. O menor

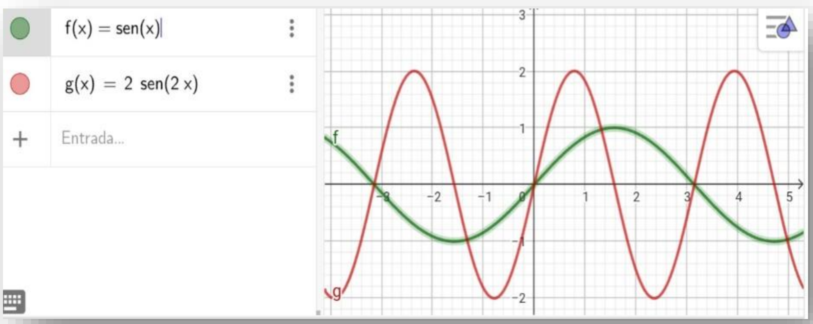
[18] Segundo Priolli (2013, p. 13) pausas são figuras que indicam duração de silêncio entre os sons.

som captado mede um decibel, o qual é considerado um som muito fraco. Quando os músicos estão tocando em uma orquestra os sons produzidos variam de quarenta a cem decibéis.

> A intensidade do som depende da força do impulso que provoca a vibração, da amplitude das vibrações e do ambiente em que o som é produzido. A intensidade do som corresponde à amplitude da vibração (quanto maior for a amplitude das vibrações tanto mais forte será o som)." (MED 2017, p. 213)

Matematicamente a função seno dá conta de modelar os diversos comportamentos de determinadas ondas sonoras a partir da lei $f(x) = a \cdot sen(b \cdot x)$. Assim, de maneira convencional, ao se estudar o tema, é possível perceber que o parâmetro a indica a amplitude de seu gráfico, e o parâmetro b caracteriza-se pela oscilação do período, conforme imagem abaixo.

Figura 12: Senoides.



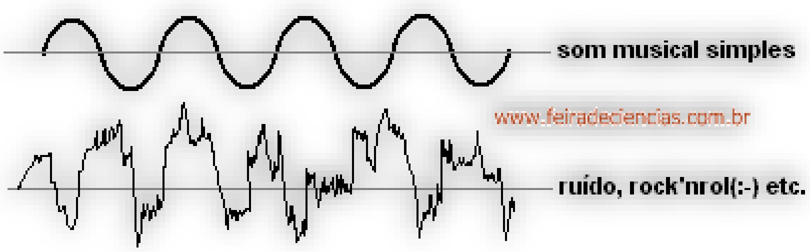
Fonte: O autor.

O gráfico (em vermelho) obtido pela lei da função $g(x) = 2sen(2x)$, com imagem no intervalo *[-2,2]* e período de *0* a π, possui maior amplitude e representa características de um som com maior frequência. O outro gráfico (em verde), gerado pela lei $f(x) = sen(x)$, com período de *0* a 2π e imagem no intervalo *[-1,1]* possui menor amplitude e consequentemente possui características de um som mais grave, com menor frequência.

É importante registrar que a periodicidade da senoide deve ser relacionada com a regularidade de uma onda sonora. Portanto não é viável utilizar o mesmo critério para modelar características dessas ondas quando tratar-se de barulhos, ruídos, "sons desordenados". Segundo Med (2017, p. 89), "Som musical é o som resultante de vibrações regulares, repetidas constantemente. O barulho é o resultado do conjunto de vibrações de frequências diversas e similares, irregulares e não repetidas." Um exemplo de como uma onda sonora ruidosa e barulhenta deve se comportar pode ser visto na imagem abaixo. Perceba que há dois gráficos:

som musical simples e ruídos ou sons irregulares. Observe que não há periodicidade no segundo gráfico da imagem, ou seja, ele é oscilante, sem nenhum padrão que permita ser modelado como no caso do som musical simples.

Figura 13: Som e "Barulho."



Fonte:<https://musicaeadoracao.com.br/recursos/arquivos/tecnicos/matematica/www.feiradeciencias.com.br/sala10/10_T01.htm>

Segundo Martini *et al* (2020, p. 295), uma das maneiras de identificar a altura do som é comparando as vozes masculina e feminina. Isso porque na maioria dos casos os homens têm uma voz mais "grossa", conhecida também como grave, já as mulheres, por sua vez, têm características diferentes, quase sempre com uma voz mais aguda.

Geralmente a entoação da voz para o canto modifica suas características. Há variações diversas. É possível citar como exemplo, os cantores Edson Cordeiro e a saudosa Cássia Eller, com vozes feminina e masculina respectivamente. Comumente as pessoas relacionam o som agudo como sendo aquele que tem maior volume. No entanto, é importante destacar que a altura do som é uma característica familiar à frequência. Há, portanto, uma relação diretamente proporcional em que o aumento da frequência sonora torna o som mais agudo, e sua diminuição o torna mais grave. Segundo Med (1996, p. 12), quanto maior for a velocidade da vibração mais agudo será o som.

A escala musical, conforme tabela abaixo, pode ser percebida como uma sequência, uma nota após a outra, sempre com frequências diferentes, em ordem crescente.

Quadro 9: Oitava de Dó.

Notas	*Dó$_I$*	*ré*	*mi*	*fá*	*sol*	*lá*	*si*	*Dó$_{II}$*
Hz	**261,7**	293,7	329,7	349,2	392,0	440,0	493,9	**523,4**

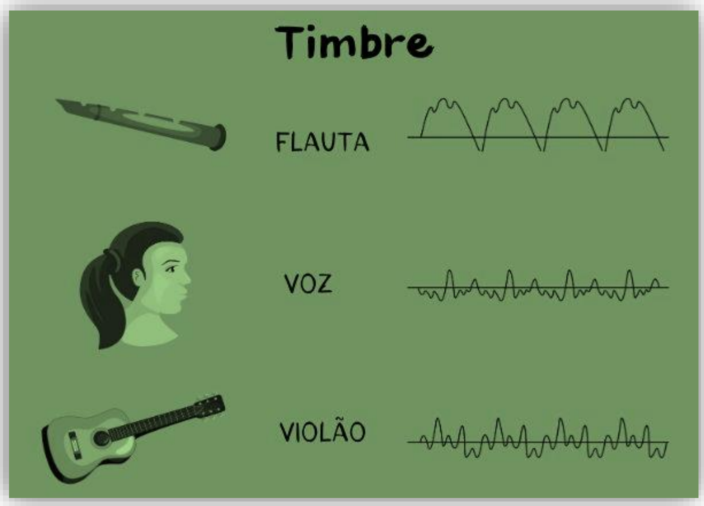
Adaptado – Fonte: MATRAS, jean – 37eprese. O som. São Paulo: Martins Fontes, 1991.

A respeito das frequências é importante mencionar as doze notas da escala musical que formam a escala cromática ou temperada. Além disso é relevante analisar que as oitavas possuem o dobro da frequência da nota inicial, conforme foi destacado nas notas Do_I e Do_{II} na figura anterior, referindo-se ao primeiro *Dó* e sua primeira oitava.

As características físicas de cada instrumento musical, por exemplo, ajudam a compreender e identificar as peculiaridades entre eles. A estrutura e formação de um instrumento de cordas é diferente de um instrumento de sopro. Dessa maneira ao ouvir uma determinada nota partindo de dois instrumentos diferentes, por exemplo, uma pessoa atenta vai conseguir identificar a origem de cada uma delas. Isso porque a altura, a duração e a intensidade do som gerado por esses instrumentos, embora seja a mesma nota, serão diferentes. Daí o timbre pode ser considerado uma espécie de identidade do som. Nesse sentido, conforme imagem abaixo, é possível perceber que cada fonte sonora tem suas próprias peculiaridades.

Segundo Med (2017, p. 93) "timbre é a característica do som que distingue uma voz ou um instrumento de outro" e para (LACERDA, 1967, p. 1), "timbre é a qualidade do som, que permite reconhecer a sua origem. É pelo timbre que sabemos se o som vem de um violino, de uma flauta, de um piano ou de uma voz humana".

Figura 14: Instrumentos e Voz.



Fonte: https://mundoeducacao.uol.com.br/epres/timbre.htm

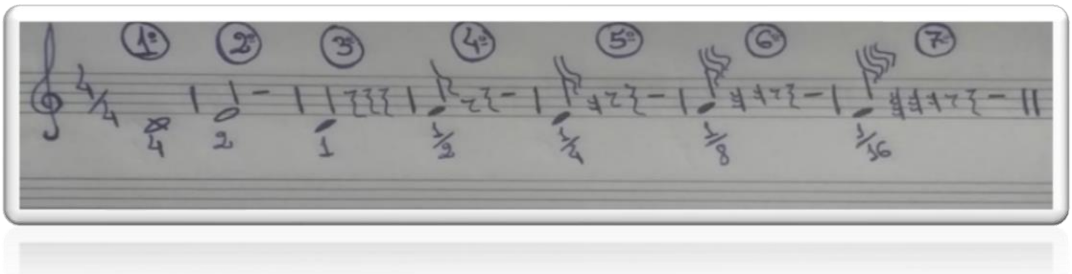
Além dessas, é possível citar outras fontes sonoras, como: sax tenor, sax alto, contrabaixo, trompete etc, conforme imagem a seguir (músicos da Filarmônica Lira Conceição de Maragogipinho - Ba). Cada um deles tem seu próprio timbre. É importante registrar que o sax alto, dentre esses, tem sua partitura escrita uma quinta acima dos demais. Isso acontece porque a natureza do mesmo é mi bemol, enquanto os outros tem natureza si bemol. Logo, para título de afinação, por exemplo, se um trompete toca a nota *dó*, o sax tem por obrigação tocar a nota *sol* de forma simultânea. Todas as outras notas obedecem a esse mesmo padrão.

Figura 15: Quarteto S.F.L.C.M[19]

Fonte: O autor

Geralmente os músicos das Filarmônicas possuem iniciação musical ainda jovens e até mesmo quando crianças. Essas instituições de cunho filantrópico, que historicamente fizeram parte da cultura popular, sobretudo do recôncavo baiano, contribuíram significativamente para a formação cidadã dos seus alunos, e em alguns casos, inclusive, direcionaram para a profissionalização musical: em bandas militares, como professores, em naipes de bandas populares etc. Esse alcance, no entanto, perdeu força por falta de políticas públicas estratégicas, no sentido de dar manutenção para a "sobrevivência" dessas escolas. Contudo, aquelas que ainda conseguem desenvolver seus trabalhos, cultivam sua tradicional base de estudos, via leitura de partituras, em muitos casos manuscritas, conforme imagem abaixo.

Figura 16: Valores em Sequência.



Fonte: O autor.

Perceba que no fragmento da lição há uma sequência numérica (sobre a qual iremos tratar mais adiante) obtida pelos valores das figuras: 4, 2, 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16. Nesse caso, a

---

[19] Sociedade Filarmônica Lira Conceição de Maragogipinho - Ba.

escrita está em compasso quaternário, ou seja 4/4. A partir disso é possível notar o seguinte: serão necessárias 1 x 4 (semibreve) para preencher o 1º compasso, 2 x 2 (mínimas) para o 2º compasso, 4 x 1 (semínima) para o 3º compasso, 8 x 1/2 (colcheia) para o 4º compasso, 16 x 1/4 (semicolcheia) para o 5º compasso, 32 x 1/8 (fusa) para o 6º compasso, 64 x 1/6 (semifusas) para preencher o 7º compasso**.**

Efetuando os cálculos, temos:

1 x 4 = 4	*2 x 2 = 4*	*4 x 1 = 4*	*8 x 1/2 = 4*	*16 x 1/4 = 4*	*32 x 1/8 = 4*	*64 x 1/16 = 4*

Logo, é possível concluir que independentemente da quantidade de figuras, ou da ordem em que elas estiverem, cada compasso deverá ser preenchido respeitando sua condição de existência preestabelecida na armadura de clave, nesse caso, 4 tempos. Portanto, a duração do som de cada figura nos compassos apenas aumenta ou diminui seguindo o princípio da combinação dos valores.

4 TEÓRICOS: DIÁLOGO ENTRE MATEMÁTICA E MÚSICA

O presente capítulo apresenta algumas propostas de atividades contextualizadas, situações problemas, exercícios e etc. relacionando temas específicos da Matemática ao contexto musical, sobretudo a escalas, intervalos e partituras. Contudo, antes de cada proposta de atividade sobre essas duas áreas do conhecimento haverá uma síntese a respeito das noções básicas consideradas mais importantes para o desenvolvimento de cada uma delas.

O SOM E A SÉRIE HARMÔNICA

Para Med (2017), ao som principal, ou seja, o som fundamental, juntam-se outras notas as quais representam os sons secundários, também chamados de harmônicos. Segundo Anderle (2001, p. 1-2)

> “O som emitido por um instrumento musical é resultado de uma vibração. A série harmônica é resultado dos sons geradores e mais as notas agudas. Se tomarmos como exemplo a corda de um violão notaremos que além de vibrar em toda a sua extensão, também vibra em sua metade, em sua terça parte, em sua quarta parte e quinta parte, etc. produzindo sons cada vez mais agudos. A vibração da corda pode ser definida como ciclos ou Hertz. [...] A série harmônica é fisicamente infinita, e suas primeiras 16 notas surgem ao subdividir uma corda vibrante (experiência de Pitágoras) em 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9 – 10 partes iguais.”

De acordo com as ideias de Gomes (2009), no contexto da série harmônica, Descartes defendia que não havia possibilidades de uma frequência ser ouvida distintamente de sua oitava superior. Portanto,

> Uma corda, ao vibrar em toda a sua extensão produz uma determinada nota. Enquanto a corda vibra por inteiro, simultaneamente, ela vibra também dividindo-se em duas metades, produzindo um som uma oitava acima da nota original. Além da vibração da corda por inteiro e em duas metades, ela vibra também, simultaneamente, dividindo-se em terços, em quartos, em quintos e etc., produzindo as vibrações secundárias. (MED 2017, p. 91)

A partir disso é possível notar que apesar das pessoas não perceberem, um determinado som ou nota musical é composto por tantos outros complementares. Med (2017) ainda afirma que a série harmônica da nota "*dó*" pode servir de base para construção das outras séries, visto que há uma relação proporcionalmente idêntica para cada uma delas. Assim, toda série harmônica possui o mesmo padrão, conforme tabela abaixo.

Quadro 10: Série Harmônica e Seus Intervalos.

8ªj	5ªj	4ªj	3ªM	3ªm	3ªm	2ªM	2ªM	2ªM	2ªM	2ªm	⋯

Fonte: O autor.

Os intervalos dessa série começam com a oitava justa e vão diminuindo: quinta justa, quarta justa, terceira maior, terceira menor etc. tendendo ao infinito. Para Anderle (2001, p. 1-2) "Tal estrutura de intervalos é referente à série harmônica ascendente, a qual não difere do modo descendente da mesma escala". Med (2017, p. 92) diz que "a série harmônica descendente é o espelhamento perfeito dos mesmos intervalos que constituem a série harmônica ascendente (ou superior). Foi definida pelo teórico alemão Hugo Riemann (1849-1919)."

Matematicamente podemos fazer uma relação da série harmônica com a sequência de harmônicos musicais. Tal relação pode ser percebida quando observamos os termos da sequência $1/n$ decrescendo e tendendo a zero, pois se n for um número muito grande, o quociente será um número muito pequeno.

Uma demonstração de que a série harmônica é divergente apareceu pela primeira vez, do ponto de vista histórico, relativamente tarde, e foi feita pelo Bispo Nicole Oresme (1320 – 1382) no século XIV, como veremos a seguir.

Os estudos sobre sequências e séries geralmente são realizados em disciplinas de cursos superiores voltados para a matemática. Alguns exemplos dessas disciplinas são: análises na reta e cálculo diferencial, as quais exigem dos graduandos muita dedicação e uma boa rotina de estudos para que se obtenha êxitos durante as avaliações.

4.1 DEFINIÇÕES: SEQUÊNCIAS, SÉRIE E A SÉRIE HARMÔNICA

Um dos principais objetivos da presente seção é mostrar que a matemática e o som musical têm relações próximas. Assim, para embasar as contextualizações envolvendo o tema deste capítulo, inicialmente iremos estudar algumas definições importantes, em seguida apresentaremos situações-problemas resolvidas e comentadas, bem como propostas de exercícios sobre sequências e série harmônica.

Definição 1. Uma função $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamada de sequência numérica. Assim, para cada n temos $n \longrightarrow f(n)$. Denotamos $f(n)$ por a_n

Exemplo 1. A sequência dos números pares é dada por; $(a_n) = (2n) = (2, 4, 6, \ldots)$. Observe que tomar $n = 1,2,3, \ldots$ faz com que a posição do termo da sequência seja indicada pelo índice.

Definição 2. Diz-se que uma sequência (a_n) converge para o número L, ou limite L se, dado qualquer $\varepsilon > 0$, é sempre possível encontrar um número N tal que

$$n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

Neste caso, dizemos que o limite de (a_n) é L e denotamos por: $lim\ (a_n) = L$ ou $(a_n) \to L$

Definição 3. Uma sequência (a_n) é limitada se existir um número real $M > 0$ tal que

$$|a_n| \leq M \text{ para todo } n < \varepsilon$$

Com as definições acima, alguns resultados são obtidos. As demonstrações podem ser encontradas em (ÁVILA, 2006; LIMA, 2012).

Teorema 1. Toda sequência convergente é limitada.

Pode-se observar que os termos da sequência gerada pela lei de formação $(a_n) = \frac{1}{n}$ obedecem ao seguinte padrão, para $n \geq 1$, $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right)$. Note que os termos dessa sequência diminuem progressivamente.

Definição 4. Uma série infinita, ou simplesmente série, é um par de sequências reais (a_n) e (s_n) cujos termos estão ligados pelas relações

$$s_1 = a_1\ ;\ s_2 = a_1 + a_2\ ;\ s_3 = a_1 + a_2 + a_3 \cdots\ s_m = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m$$

ou seja,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

onde (a_n) é a sequência de termos da série. A expressão abaixo é conhecida como série harmônica.

$$\sum \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots$$

Segundo Ávila (1995, p. 55-56),

> [...] a série harmônica, também é a mais simples dentre as séries divergentes com termo geral tendendo a zero. Aliás, para algum aluno iniciante e inexperiente em séries infinitas é levado a crer que a série deva ser convergente, e não divergente. Afinal, os termos estão decrescendo pra zero após uma soma muito grande deles, contudo é necessária uma análise mais cuidadosa.

Para Garbi (2000), Nicole Oresme (1323-1382), considerado por alguns historiadores como o maior matemático do século XIV, foi o primeiro a demonstrar a divergência da série harmônica. Para isso ele agrupou alguns termos, da seguinte maneira:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}\right) + \cdots$$

O mesmo observou que cada um desses grupos é $>$ 1/2.

Observe:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{16} > \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16} = 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$$

$$\cdots$$

Portanto, é possível constatar o seguinte:

$$S > 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 8 \cdot \frac{1}{16} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$$

Assim, como essa soma de números infinitos de parcelas iguais a 1/2 aumenta indefinidamente, ou seja, a série possui termo geral ilimitado, ela diverge.

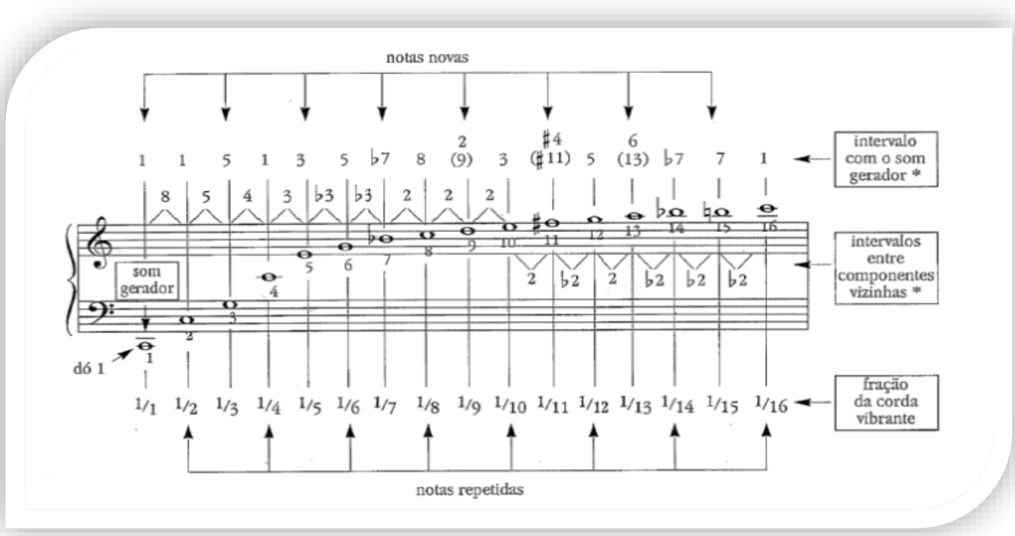
I. PROPOSTAS DE ATIVIDADES PARA A LICENCIATURA EM MATEMÁTICA:

A partir do exposto anteriormente, vamos apresentar algumas situações-problemas resolvidas sobre sequência e intervalos musicais. A ideia é que essas atividades possam ser aplicadas em turmas da Licenciatura em Matemática. Portanto, para iniciarmos, vamos ler o seguinte enunciado:

Contextualização 01: Intervalos Musicais e Lei geral da sequência.

i. A imagem abaixo ilustra a representação de alguns intervalos musicais. Perceba que ao começar da nota dó 1, de forma ascendente, há 16 notas consecutivas separadas por diversos intervalos. Vejamos, por exemplo, que entre as duas primeiras notas há um intervalo de oitava justa, entre a primeira e a terceira o intervalo é de quinta justa. Posto isso, sabendo que as sequências representadas pelas frações abaixo obedecem a um certo padrão matemático, vamos fazer outras análises a respeito das informações contidas na imagem e resolver algumas questões:

Figura 17: Relações Intervalares.



Fonte: https://ampedstudio.com/pt/o-que-são-harmonicos/

ii. Para $n \geq 1$, encontre a lei geral para representar a sequência dos harmônicos da nota *dó*.

$$a_n = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10} \cdots$$

iii. Qual a classificação dessa sequência? Ela é crescente, decrescente, divergente, convergente?

iv. A sequência $b_n = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \cdots$ representa apenas os intervalos de oitavas. Nesse sentido qual é a lei geral da mesma, para $n \geq 1$?

a) $\frac{1}{2^{2n-1}}$ ( ) b) $\frac{n}{2^{n-1}}$ ( ) c) $\frac{1}{2n}$ ( ) d) $\frac{1}{2^{n-1}}$ ( )

v. Como podemos representá-la? O que podemos abstrair dessa sequência?

Contextualização 02: Termos da Sequência e as razões Pitagóricas.

i. A partir dos termos da série harmônica encontre as razões equivalentes às notas da escala musical. Dica: $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, igual uma 5ª.

4.2 INTRODUÇÃO: CONGRUÊNCIA MODULAR, ESCALAS E INTERVALOS

Nesta seção serão enfatizadas algumas relações a respeito da música e congruência modular. A ideia surgiu sobretudo a partir dos estudos envolvendo aspectos específicos da música, tais como: os padrões existentes em escalas e compassos, as figuras de repetição, principalmente encontradas em partituras de instrumentos de percussão, o ostinato (movimento musical que se repete várias vezes) etc.

As possibilidades de contextualizar ambos os temas devem ser apresentadas como sugestão de aplicação em atividades, listas de exercícios, avaliações, seminários e trabalhos afins. Porém, incialmente, deveremos estudar um pouco sobre congruência modular.

NOÇÕES BÁSICAS SOBRE CONGRUÊNCIA MODULAR

Definição 5: Se um inteiro m, diferente de zero, divide a diferença $a - b$, dizemos que a é congruente com b módulo m e escreve-se $a \equiv b \ (mod\ m)$. Se $a - b$ não é divisível por m, dizemos que a não é congruente com b módulo m, e neste caso escrevemos $a \not\equiv b \ (mod\ m)$.

Exemplo 1.1. $8 \equiv 3 \ (mod\ 5)$, $12 \equiv 2 \ (mod\ 10)$, $27 \equiv 1 \ (mod\ 13)$.

Proposição 1.1. Se a e b são inteiros, temos que $a \equiv b \ (mod\ m)$, se, e somente se, existir k inteiro tal que $a = b + km$.

Proposição 1.2. Sejam $m \in \mathbb{Z}, m > 0$. Para todo a, b e $c \in \mathbb{Z}$ temos as seguintes relações de equivalência que também são propriedades das congruências:

1. Reflexiva: $a \equiv a \ (mod\ m)$.
2. Simétrica: se $a \equiv b \ (mod\ m)$ *então* $b \equiv a \ (mod\ m)$
3. Transitiva: se $a \equiv b \ (mod\ m)$ e $b \equiv c \ (mod\ m)$ *então* $a \equiv c \ (mod\ m)$.

Proposição 1.3. Se $a, b,$ e m são inteiros tais que $a \equiv b \ (mod\ m)$, então:

1. $a + c \equiv b + c \ (mod\ m)$
2. $a - c \equiv b - c \ (mod\ m)$
3. $ac \equiv bc \ (mod\ m)$

Proposição 1.4. Se a, b, c, d e m são inteiros tais que $a \equiv b \ (mod\ m)$ e $c \equiv d \ (mod\ m)$, então:

1. $a + c \equiv b + d \ (mod\ m)$
2. $a - c \equiv b - c \ (mod\ m)$
3. $ac \equiv bd \ (mod\ m)$

II. PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA A LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

A presente proposta de atividades envolvendo congruência modular e padrões da escrita musical, deve ser aplicada em turmas da Licenciatura em Matemática. Dessa maneira, como trata-se de situações em que estão relacionadas áreas de diferentes conhecimentos, o professor pode sugerir que os discentes trabalhem em pequenos grupos.

Contextualização 01: As cordas do Violão.

Com base na teoria vista anteriormente, iremos desenvolver algumas situações problemas envolvendo sobretudo padrões musicais. Dessa maneira, para encontrar um termo específico em uma sequência circular com período de repetição 7, por exemplo, você pode partir da seguinte ideia:

$$
\begin{gathered}
a_8 = a_1 = a_{(8 mod 7)} \\
a_9 = a_2 = a_{(9 mod 7)} \\
a_{10} = a_3 = a_{(10 mod 7)} \\
a_{11} = a_4 = a_{(11 mod 7)} \\
\vdots \\
a_{15} = a_1 = a_{(15 mod 7)} \\
\vdots
\end{gathered}
$$

Dessa maneira, podemos concluir que $a_n = a_{(n mod 7)}$. Sendo possível, portanto, a prova desse raciocínio por indução.

em que a_1 é o primeiro termo da sequência e n é o número do termo que você deseja encontrar.

i. Um professor de música resolve propor exercícios para que seus alunos aprendam afinar o violão. Como a turma era de principiantes, o professor sugeriu que cada aluno tocasse cada uma das cordas em sequência, completando no mínimo 10 ciclos, com início na 1ª nota *mi* e término na 5ª nota, *lá*, tendo como base a imagem abaixo. Assim, qual teria sido a 28ª nota executada por um dos alunos?

Figura 18: Cordas.

Fonte: https://auladeviolaoparainiciante.com.br/aula-de-violao-para-iniciantes/qual-a-ordem-das-cordas-noviolao10.html

Solução:

$$a_{28} = a_{(28 mod 5)}$$

$$a_{28} = a_3$$

Logo, a nota é *sol.*

Contextualização 02. Análise em Intervalos Musicais:

i. A imagem abaixo é de um trecho musical denominado de ostinato. Um movimento musical que se repete constantemente. É possível observar que o trecho está escrito em compasso quaternário, 4/4 na tonalidade de dó maior, onde todos os quatro compassos são idênticos e estão dispostos periodicamente da seguinte forma:

Quadro 11: Modos de Intervalos e Repetição.

dó	***mi***	***dó***	***mi***	***ré***	***mi***	***dó***	***sol***	***dó***	***mi***	***dó***	***mi***	***ré***	***mi***	***dó***	***sol***

Fonte: O autor.

Figura 19: Pauta e Intervalos.

Fonte:<https://www.researchgate.net/figure/the-ostinato-sequence-accompanying-Shot-1_fig4_284912229>

ii. Ao considerar a hipótese de que o movimento musical acima possui 58 compassos, qual seria a última nota?

iii. Utilize a fórmula $a \equiv b \ (mod\ m)$ e determine valores para $a, b \ e \ m,$ de modo que o resto da divisão $b \ por \ m,$ somado a 1 seja equivalente a primeira nota do movimento musical em pauta.

Contextualização 03. Análise em Partituras

i. A grade musical[20] abaixo é de um dobrado[21] conhecido como "Os Músicos[22]". O mesmo possui 100 compassos binários, ou seja 2/4. Cada um deles com o 1º e o 2º tempos. Nesse contexto o tempo também pode ser entendido como pulsação, e após o último compasso a melodia retornará ao início. Outra informação importante é que a soma dos valores das figuras e pausas em cada um desses compassos (2/4) deve ser exatamente igual a 2 tempos. Posto isso, a partir dos conhecimentos acerca da congruência modular, e com auxílio da figura 20, faça o que se pede:

Analise e identifique a maneira como a flauta, o 1º clarinete, o 2º sax alto e o 1º trompete tocam suas respectivas partituras na 20ª pulsação referente ao 10º compasso. Perceba que a amostra abaixo possui 11 compassos delimitados por linhas verticais.

Na 20ª pulsação, teremos o primeiro ou o segundo tempo do compasso? Que nota é tocada nesse tempo?

ii. Agora, como exercício, identifique as notas tocadas nas pulsações 420 e 820.

---

[20] Conjunto de partituras utilizado pelo maestro para acompanhar os músicos.
[21] Gênero musical geralmente tocado em bandas militares e em filarmônicas.
[22] Dobrado de autoria de João Sacramento Neto.

Figura 20: Grade Musical.

Fonte: Governo do Estado do Ceará – Secretaria da Cultura.

Solução i.

Cada compasso da melodia, do início ao final, tem obrigatoriamente 2 tempos, donde podemos concluir que há 2 pulsações. Assim, iremos tomar $a_2 = a_0$ como sendo a 1ª pulsação, e $a_3 = a_1$ como sendo a 2ª pulsação. Diante disso, temos:

$$a_2 = a_0 = a_{(2mod2)}$$
$$a_3 = a_1 = a_{(3mod2)}$$
$$a_4 = a_0 = a_{(4mod2)}$$
$$a_5 = a_1 = a_{(5mod2)}$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_{(nmod2)}$$

Dessa maneira, como estamos analisando o 10º compasso, naturalmente também estamos verificando o que ocorre na 20ª pulsação. Assim, para $n = 20$, temos o seguinte:

$$a_{20} = a_{(20mod2)}$$
$$a_{20} = a_0$$

Logo, como esse tempo é equivalente à 1ª pulsação, ocorre o seguinte:

O flautista toca a nota lá (indicada pela seta verde). O 1º clarinetista toca a nota si (indicada pela seta amarela). O 2º saxofonista toca a nota ré# (sustenido) (indicada pela seta em vermelho) O 1º trompetista toca a nota si (indicada pela seta em roxo). Logo, com esse raciocínio é possível verificar as músicas de todos os demais instrumentos.

4.3 COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE: INTERVALOS E FORMAÇÃO DE ACORDES.

A presente abordagem tem como base os conhecimentos sobre Combinatória e Probabilidade. Contudo, a ideia é relacionar esses estudos a alguns conceitos envolvendo a teoria musical, principalmente sobre escalas, sequências, compassos, figuras, símbolos musicais, intervalos e formação de acordes, visto que há enorme abrangência nessas áreas do conhecimento.

Segundo Morgado *et al* (1991, p. 1-3), podemos dizer, de maneira geral, que a Análise Combinatória é a parte da Matemática que analisa estruturas discretas.
O autor menciona dois tipos de problemas que ocorrem constantemente, são eles:

i. Demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições.

ii. Contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições dadas.

Para o autor, apesar de ser muito importante para essa área da Matemática, a Análise Combinatória não se resume apenas aos estudos sobre arranjos, combinações e permutações, visto que há outras técnicas bastantes relevantes, tais como: o princípio da inclusão-exclusão, o princípio das gavetas de Drichlet, as funções geradoras e a teoria de Ramsey, por exemplo, que possibilitam a resolução de vários problemas.

O autor ainda cita que embora haja esse catatau de técnicas, as quais fazem parte da Análise Combinatória, a mesma também se torna interessante pelo fato de que muitos dos seus problemas aguçam a criatividade dos estudantes para resolvê-los.

A respeito da ideia de permutação, por exemplo, estudaremos sobre uma abordagem oriunda dos padrões e culturas da Matemática Indiana. Outros padrões sobre intervalos musicais também serão abordados sob a “perspectiva” dos Lemas de Kaplansky.

Para iniciar iremos estudar alguns teoremas e definições importantes para o desenvolvimento de nossas atividades, mas é importante mencionar que a ideia central não é apresentar demonstrações sobre os mesmos, uma vez que em casos de maior interesse há a possibilidade de consultar as referências citadas no capítulo 6.

PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO

Definição 6: Se uma decisão D_1 pode ser tomada de p modos e, qualquer que seja esta escolha, a decisão D_2 pode ser tomada de q modos, então o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões D_1 e D_2 é igual a $p.q$. Esse método de contagem é intitulado Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C.) ou Princípio Multiplicativo.

FATORIAL

Definição 7: Seja n um número natural, representamos n fatorial por $n!$ e definimos o mesmo como: $n!$ é o produto de todos os números naturais de 1 ate n, para $n \geq 2$ ou $n! = 1$, para $n = 1$ ou $n = 0$.

PERMUTAÇÃO SIMPLES

Definição 8: Seja M um conjunto com m elementos, isto é $M = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$. Chamamos de permutação dos m elementos a todo arranjo em que $r = m$.

Teorema 2. Chamamos de $P_n = n!$ O total de permutações possíveis para n elementos

PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO

Definição 9: Dados n objetos nem todos distintos chama-se permutação com repetição o número de maneiras de permutar esses objetos.

Teorema 3. Chamamos de $p_n^{r_1, r_2, \ldots, r_z} = \dfrac{n!}{r_{1!} r_{2!} \ldots r_{z!}}$ o total de permutação de n objetos, onde elementos se repetem $r_{1,} r_{2,\ldots,} r_z$ vezes

ARRANJO SIMPLES

Definição 10: Seja M um conjunto com m elementos, isto é $M = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$. Chamamos de arranjo simples dos m elementos tomados $r\ a\ r$ $(1 \leq r \leq m)$ a qualquer r-upla (seqüência de r elementos) formada com elementos de M todos distintos.

Teorema 4. Chamamos de $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$ O total de arranjos de n elementos tomados $p\ a\ p$, com $p < n$.

Logo, fica evidente que a permutação trata-se tão somente de um caso singular de arranjo simples, sendo o número de termos escolhidos igual ao de termos disponíveis, apenas alternando posições.

ARRANJO COM REPETIÇÃO

Definição 11: Dados n objetos nem todos distintos chama-se arranjo com repetição o número de maneiras de selecionar 1 ou 2 ou 3... ou $n-1$ desses objetos considerando que a ordem importará

Teorema 5. Chamamos de $AR_{n,p} = n^p$ o número de arranjos com repetição de n elementos tomados p a p.

COMBINAÇÃO SIMPLES

Definição 12: Uma combinação simples de n elementos (distintos), tomados $p\ a\ p$, é qualquer escolha de p elementos dentre os n elementos dados. Em uma combinação, apenas o conjunto dos elementos escolhidos é relevante, de modo que a ordem em que eles forem tomados não importa.

Teorema 6. Chamamos de $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p!)}$ a combinação de n elementos distintos tomados $p\ a\ p$, com $p \leq n$.

COMBINAÇÃO COM REPETIÇÃO

Teorema 7. Chamamos de $CR_{n,p} = C_{p+n-1,p}$ a combinação com repetição de n elementos distintos tomados $p\ a\ p$, distintos ou não.

Definição 13: Dados n objetos nem todos distintos chama-se combinação com repetição o número de maneiras de selecionar 1 ou 2 ou 3... ou n desses objetos considerando que a ordem não importa.

NOÇÕES DE PROBABILIDADE:

A definição de probabilidade como quociente do número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis foi a primeira definição formal de probabilidade, e apareceu pela primeira vez em forma clara na obra *Liber de Ludo Aleae* de Jerônimo Cardano (1501 – 1576).

A probabilidade de um evento de espaço amostral equiprovável ocorrer, em um experimento aleatório, é a razão entre o número de elementos favoráveis a esse evento e o número de elementos do espaço amostral.

$$probabilidade = \frac{número\ de\ casos\ favoráveis}{número\ de\ casos\ possíveis}$$

Definição 14: denominaremos espaço amostral associado a um experimento o conjunto de seus resultados possíveis.

O espaço amostral será representado por um conjunto S. Ao realizar um experimento aleatório, o espaço amostral é o conjunto completo de todos os resultados que podem ocorrer.

Exemplo: três peças são retiradas de uma linha de produção. Cada peça é classificada em boa (B) ou defeituosa (D). O espaço amostral associado a esse experimento é:

S = {BBB, BBD, BDB, BDD, DBB, DBD, DDB, DDD}

Definição 15: denominaremos de evento a todo resultado ou subconjunto de resultados de um experimento.

Como exemplo, vamos considerar o espaço amostral S. Perceba que o evento A: duas peças são boas, deve ocorrer da seguinte maneira: A = {BBD, BDB, DBB}. Então A ocorre se ocorrer um dos três eventos simples BBD, BDB ou DBB.

IRVING KAPLANSKY

Irving Kaplansky, matemático canadense-americano, nasceu em 22 de março de 1917 em Toronto e faleceu em 25 de junho de 2006.

Em 1891, o matemático chamado François Edouard Anatole Lucas criou um´ problema, conhecido como "Ménege Problem", que fez com que vários matemáticos fossem em busca da solução. O problema dizia o seguinte:

De quantas maneiras m casais podem se sentar em $2m$ cadeiras diferentes em torno de um círculo de modo que pessoas do mesmo sexo não se sentem juntas e que nenhum homem fique ao lado de sua mulher?

A solução para o mesmo foi apresentada em 1943 por Kaplansky, no artigo "Solution of the probléme des méneges", publicado no Bulletin of the American Mathematical Society. Assim, o mesmo fez uso de lemas que ficaram conhecidos por seu sobrenome.

OS LEMAS DE KAPLANSKY

De quantas maneiras é possível formar um p-subconjunto (isto é, um subconjunto com p elementos) de $\{1,2, ..., n\}$ no qual não haja números consecutivos? Por exemplo, para $n = 6$ e $p = 3$, podemos obter a partir de $\{1,2,3,4,5,6\}$ os seguintes 3-subconjuntos nos quais não há elementos consecutivos:

$$\{1,3,5\}, \{1,3,6\}, \{1,4,6\}, \{2,4,6\}.$$

Ao formar um subconjunto, marcamos com o sinal + os elementos do conjunto que farão parte do subconjunto e com o sinal – os elementos que não farão parte do subconjunto.

Assim,

$$S_1 = \{1,3,5\}, \text{ seria representado por } + \ - + - + \ -$$

$$S_2 = \{2,3,6\}, \text{ seria representado por } - + + \ - \ - \ +$$

O caso ii não é válido porque 2 e 3 são elementos consecutivos. Assim, perceba que para formar um 3-subconjunto sem elementos consecutivos devemos colocar 3 sinais $+$ e 3 sinais – em fila, sem que haja dois sinais $+$ consecutivos. Para fazer isso, colocamos os sinais – (1 maneira), e colocamos os sinais $+$ nos 4 espaços assinalados, na figura 21, com no máximo um sinal por espaço C_4^3. $maneiras.$ A resposta é então, $1\ x\ C_4^3 = 4$

Figura 21: Esquema – modelagem.

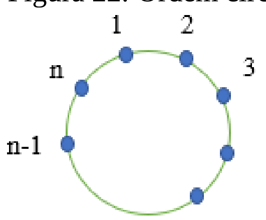
Fonte: Adaptada - Morgado *et al* (1991)

Generalizando temos p sinais $+$, $n - p$ sinais – para organizar de maneira que não haja dois sinais $+$ consecutivos. Assim, temos 1 maneira de colocar os sinais – e C_{n-p+1}^{p}. maneiras de colocar os sinais +. Com esse raciocínio obtivemos o Primeiro Lema de Kaplansky, que pode ser enunciado assim: o número de p subconjuntos de $\{1,2,\cdots,n\}$ nos quais não há números consecutivos é:

$$f(n,p) = C_{n-p+1}^{p}.$$

Suponhamos agora que os elementos de $\{1,2,\ldots,n\}$ estejam arrumados em círculo, conforme figura 22.

Figura 22: Ordem circular A.



Fonte: O autor.

Agora os elementos "1" e "n" são consecutivos. De quantos modos é possível formar um p-subconjunto de $\{1,2,\ldots,n\}$ no qual não haja números consecutivos?

Analisemos duas maneiras diferentes para formar os subconjuntos: Na primeira o elemento "1" figura. Assim, para formá-los devemos escolher $p - 1$ elementos em

$\{3, 4, \cdots, n - 1\}$ (pois se o "1" figura o "2" e o "n" não podem figurar) para serem os companheiros do "1" no subconjunto, não podendo ser escolhidos elementos consecutivos. O número de maneiras de que isso pode ser feito é

$$f(n - 3;\ p - 1) = C^{p-1}_{n-3-(p-)+1} = C^{p-1}_{n-p-1}..$$

Agora os subconjuntos nos quais o elemento "1" não figura. Para formá-los devemos escolher p elementos em $\{2,3, \cdots, n\}$, não podendo ser escolhidos elementos consecutivos. Isso pode ser feito de $f(n - 1, p) = C^{p}_{n-1-p+1} = C^{p}_{n-p}$ maneiras. Logo, a resposta é

$$C^{p-1}_{n-p-1} + C^{p}_{n-p} = \frac{(n-p-1)!}{(p-1)!\,(n-2p)!} + \frac{(n-p)!}{p!\,(n-2p)!}$$

$$= \frac{(n-p-1)!\,p + (n-p)!}{p!\,(n-2p)!}$$

$$= (n-p-1)! = \frac{p + (n-p)}{p!\,(n-2p)!}$$

$$= n\frac{(n-p)}{p!\,(n-2p)!}$$

$$= \frac{n}{n-p}\ \frac{(n-p)!}{p!\,(n-2p)!}$$

$$= \frac{n}{n-p}C^{p}_{n-p}$$

Com esse raciocínio obtivemos o Segundo Lema de Kaplansky, que pode ser enunciado da seguinte maneira: o número de p-subconjuntos de $\{1,2, \cdots, n\}$ nos quais não há números consecutivos é, considerando 1 e n como consecutivos, igual a

$$g(n, p) = \frac{n}{n-p}C^{p}_{n-p}$$

III. PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA A LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Contextualização 01: O primeiro Lema e a Escala de sete notas.

i. A partir da escala diatônica (sete notas), de que maneira podemos formar intervalos compostos por 3 notas de modo que não haja notas consecutivas?

Solução:

Podemos escolher 3 dos elementos do conjunto *1dó*, *2ré*, *3mi*, *4fá*, *5sol*, *6lá*, *7si*, sem que haja duas notas consecutivas. Assim, não pode ocorrer casos, como:

$S_1 = \{1,2,7\}$ será representado por $+\ +\ -\ -\ -\ -+$

$S_2 = \{1,3,4\}$ será representado por $+\ -\ +\ +\ -\ -+$

Esses casos indicam que há notas consecutivas, sendo que as notas são representadas pelos sinais de $(+)$ mais. Nesse sentido iremos desenvolver um esquema para ilustrar uma resolução do problema.

Quadro 12: Modelagem do Problema.

	-		-		-		-	

Fonte: O autor.

Note que a tabela indica o caso da seguinte maneira: $+\ -\ +\ -\ +\ -+-+$, ou seja, dos cinco espaços em que os sinais de mais $(+)$ podem estar, faz-se necessário escolher três. Podemos representa-lo da seguinte maneira: $C_5^3 = 10$ formas de escolher as notas da escala. Por outro lado, aplicando o 1º Lema de Kaplansky, temos:

$$f(n,p) = C_{n-p+1}^{p}.$$

Temos,

$$f(7,3) = C_{7-3+1}^{3} = C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10\ (formas\ de\ escolher\ as\ notas\ da\ escala)$$

Quadro 13: Análise dos Intervalos e Formação de Acordes.

Nº	*Nomes*	i	ii	iii		*i* *Nota*	*ii* *Nota*	*iii* *Nota*	*Tons e Semitons.*
1	5ª justa	1	3	5	⟶	dó	mi	sol	3 e ½
2	6ª maior	1	3	6	⟶	dó	mi	lá	4 e ½
3	7ª maior	1	3	7	⟶	dó	mi	si	5 e ½
4	5ª justa	2	4	6	⟶	ré	fá	lá	3 e ½
5	6ª maior	2	4	7	⟶	ré	fá	si	4 e ½
6	6ª maior	2	5	7	⟶	ré	sol	si	4 e ½
7	5ª justa	3	5	7	⟶	mi	sol	si	3 e ½
8	7ª menor	3	7	2	⟶	mi	si	ré	4 e 2 semitons
9	5ª justa	4	6	1	⟶	fá	lá	dó	3 e ½
10	5ª justa	4	6	3	⟶	fá	lá	dó	3 e ½

Fonte: O autor

Contextualização 02: Estudos com Acordes.

i. Considerando as informações do quadro 15 (espaço amostral), qual a probabilidade de um estudante de música retirar aleatoriamente para exercitar em um violão, um desses acordes?

Solução:

$$probabilidade = \frac{número\ de\ casos\ favoráveis}{número\ de\ casos\ possíveis}$$

Quadro 14: Razões.

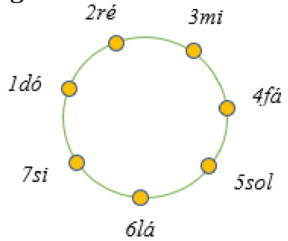
5ª justa	6ª maior	7ª maior	7ª menor
$p = \frac{5}{10}$	$p = \frac{3}{10}$	$p = \frac{1}{10}$	$p = \frac{1}{10}$

Fonte: O autor

Contextualização 02: O segundo Lema de Kaplansky e a Escala de 7 notas com sua oitava.

ii. Se considerarmos a escala musical em ordem circular, conforme figura abaixo, de quantas maneiras podemos escolher 3 notas de modo não consecutivos considerando as notas 1 e 7 como consecutivas?

Figura 23: Ordem Circular B.



Fonte: O autor.

Solução:

Podemos escolher 3 dos elementos do conjunto *1dó*, *2ré*, *3mi*, *4fá*, *5sol*, *6lá*, *7si*, sem que haja duas notas consecutivas. Assim, não pode ocorrer casos, como:

$S_1 = \{1,2,7\}$ será representado por $+ + - - - - +$

$S_2 = \{1,3,4\}$ será representado por $+ - + + - - +$

Esses casos indicam que há notas consecutivas, sendo que as notas são representadas pelos sinais de $(+)$ mais. Nesse sentido iremos desenvolver um esquema para ilustrar uma resolução do problema.

Quadro 15: Esquema.

	-		-		-		-	

Fonte: O autor

Note que a tabela indica o caso da seguinte maneira: $+ \; - \; + \; - \; + \; - + - +$, ou seja, dos cinco espaços em que os sinais de mais $(+)$ podem estar, faz-se necessário escolher três. Podemos representa-lo da seguinte maneira: $C_5^3 = \; 10$ formas de escolher as notas da escala.

No entanto é preciso retirar os casos em que podem ocorrer dois sinais de mais juntos, como na situação acima, por se tratar de um ciclo, temos dó e si $(++)$. Para isso devemos calcular a combinação de 3 escolhidos 1, $C_3^1 = \; 3$.

Efetuando os cálculos: $C_5^3 = \; 10 - C_3^1 = \; 3 \longrightarrow \; 10 - \; 3 \; = \; 7$ formas de escolher as notas da escala.

Por outro lado, ao aplicar o segundo Lema de Kaplansky, temos:

$$g(n,p) = \frac{n}{n-p} \cdot C_{n-p}^{p}$$

Temos,

$$g(7,3) = \frac{7}{7-3} \cdot C_{7-3}^{3}$$

$$g(7,3) = \frac{7}{4} \cdot C_4^3$$

$$g(7,3) = \frac{7}{4} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} \; = \; 7 \; (formas\ de\ escolher\ as\ notas\ da\ escala)$$

Quadro 16: Análise dos Intervalos e Formação de Acordes.

Nº	*Nomes*	i	ii	iii		*i* *Nota*	*ii* *Nota*	*iii* *Nota*	*Tons e Semitons.*
1	5ª justa	1	3	5	⟶	dó	mi	sol	3 e ½
2	5ª justa	2	4	6	⟶	ré	fá	lá	3 e ½
3	5ª justa	3	5	7	⟶	mi	sol	si	3 e ½
4	5ª justa	4	6	1	⟶	fá	lá	dó	3 e ½
5	6ª maior	2	5	7	⟶	ré	sol	si	4 e ½
6	6ª maior	1	3	6	⟶	dó	mi	lá	4 e ½
7	6ª maior	2	4	7	⟶	ré	fá	si	4 e ½

Fonte: O autor

Contextualização 03: 2º Lema de Kaplanky e Escala temperada (Cromática).

i. Considerando que a escala de 12 notas possui uma ordem circular, de quantas maneiras podemos encontrar grupos de 5 notas dessa escala de modo não consecutivos?

$$g(12,5) = \frac{12}{12-5} \cdot C^{5}_{(12-5)} = \frac{12}{7} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3}}{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot 2 \cdot 1} = \frac{12}{7} \cdot \frac{42}{2} = \frac{12}{7} \cdot 21 = 36$$

4.4 PADRÕES NA MATEMÁTICA INDIANA

No âmbito da matemática indiana, diversos estudiosos dedicaram-se à análise do ritmo na poesia sânscrita. As sílabas dessa língua podem ser longas (laghu) ou curtas (guru), características que influenciam a estrutura rítmica dos poemas, conhecida como “metre”. Cada sílaba laghu consome um metre, enquanto as guru consomem dois. Para representarmos esses elementos, utilizaremos as letras L e G, respectivamente. Uma sequência de sílabas é denominada ciclo, e sua duração corresponde ao número de metres utilizados em sua execução. Por exemplo, o ciclo LGG possui duração de cinco metres.

IV. PROPOSTAS DE ATIVIDADES PARA A LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Contextualização 01: Padrões na Matemática Indiana.

i. Seja $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ a sequência definida pelo número de maneiras de formar ciclos com n metres. Construa uma tabela enumerando os ciclos com até 6 metres:

Solução:

Como L é equivalente a 1 metre e G é equivalente a dois metres, então para termos um ciclo com 1 metre, só podemos ter um L. Com 2 metres, podemos ter LL ou um G e faz-se assim até $n = 6$.

Quadro 17: Sequências.

Ciclos	Duração (n metres)	p_n
L	1	1
LL, G	2	2
LLL, LG, GL	3	3
LLLL, LLG, LGL, GLL, GG	4	4
LLLLL, LLLG, LLGL, LGLL, GLLL, LGG, GLG, GGL	5	5
LLLLLL, LLLLG, LLLGL, LLGLL, LGLLL, GLLLL, LLGG, LGLG, LGGL, GLLG, GLGL, GGLL, GGG	6	6

Fonte: O autor.

Contextualização 02: Fórmula de Recorrência

i. É possível estabelecer uma relação entre p_n e a sequência de Fibonacci?

Solução: Sim! Note que $1 + 2 = 3$, $2 + 3 = 5$, $3 + 5 = 8$, $5 + 8 = 13$. De modo que podemos conjecturar que $p_n = p_{n-1} + p_{n-2}$, para valores de $n \geq 3$. Vamos fazer uma partição no nosso conjunto de solução. Um ciclo com n metres ou começa com L ou começa com G. Se começa com L, já usamos 1 metre e sobram $n - 1$ metres para formamos o ciclo, daí temos p_{n-1} formas. Se começar com G, já usamos 2 metres e sobram $n - 2$ metres para formamos o ciclo, daí temos p_{n-2} formas. Pelo princípio aditivo temos que $p_n = p_{n-1} + p_{n-2}$, para $n \geq 3$.

Desvendando os Segredos do Compasso 4/4:

Visualizando a Pulsação: Imagine um maestro regendo uma orquestra. Cada movimento do maestro marca uma pulsação, ou tempo, do compasso! No compasso 4/4, temos quatro pulsações por compasso, marcadas por quatro batidas fortes e regulares.

Fracionando o Tempo: A fração 4/4 indica que cada compasso é dividido em quatro partes iguais. Essas partes são representadas pelas semínimas, notas musicais que valem um tempo no compasso 4/4.

Explorando as Durações: Nem todas as notas musicais valem um tempo. Existem notas mais longas, como as mínimas (que valem dois tempos) e as semibreves (que valem quatro tempos), e notas mais curtas, como as colcheias (que valem meio tempo) e as semicolcheias (que valem um quarto de tempo).

V. PROPOSTAS DE ATIVIDADES PARA A LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Contextualização 01: Figuras Musicais

Quantas sequências podemos ter usando 2 semibreves e 5 mínimas?

Solução: Representamos as notas semibreves e mínimas por S e M, respectivamente. Devemos permutar 2 letras S e 5 letras M, o que se trata de um problema de permutação com repetição:

$$P_7^{2,5} = \frac{7!}{2!5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2 \cdot 1 \cdot 5!} = 21.$$

Logo, temos 21 sequências.

Contextualização 02: Permutação na Pauta

i. Quantos compassos 4/4 podemos formar com 1 mínima qualquer e 2 figuras de semínimas, as quais devem ocupar posições semelhantes na pauta (linhas em que as figuras estão escritas)?

Solução:

Nessas condições uma figura de mínima vale 2 tempos e uma figura de semínima vale 1 tempo, cada. Como são 2 semínimas e 1 mínima, temos 4 tempos no total, o que preenche ou satisfaz a condição do compasso 4/4.

De outra forma podemos pensar que devemos organizar os números 2, 1, 1, de três modos distintos, sendo que cada um deles deverá preencher um compasso. Assim, temos:

$$P_3^2 = \frac{3!}{2!} = \frac{3 \cdot 2!}{2!} = 3.$$

Logo, temos 3 maneiras de organizar a sequência das figuras musicais. Com isso podemos afirmar que é possível obter 3 compassos 4/4, conforme imagem abaixo.

Figura 24: Mínimas e Semínimas.

Fonte: O autor.

Perceba que no primeiro compasso há uma figura de mínima nos dois primeiros tempos e duas de semínimas nos dois últimos: terceiro e quarto. Em seguida, no segundo compasso a figura de mínima está no meio, ou seja, entre as semínimas, e quarto compasso, por sua vez, é simétrico ao primeiro.

Contextualização 03: Formação de sequências

i. Encontre o número de maneiras de formar sequências com 1, 2, 3, 4 e 5 compassos 4/4 utilizando somente as notas semibreves(S) e mínimas(M).

Quadro 18: Referências para Solução:

Sequências	**Nº de compassos** 4/4	**Nº de sequências**
S, MM	1	2
SS, P(SMM) = 3, MMMM	2	5 = 2 + 3
SSS, P(SSMM) = 6, P(SMMMM) = 5, MMMMMM	3	13 = 5 + 8
SSSS, P(SSSMM) = 10, P(SSMMMM) = 15, P(SMMMMMM) = 7, MMMMMMMM	4	34 = 13 + 21
SSSSS, P(SSSSMM) = 15, P(SSSMMMM) = 35, P(SSMMMMMM) = 28, P(SMMMMMMMM) 9, MMMMMMMMMM	5	89 = 34 + 55

Fonte: O autor

Notação: P(SSMM) significa o número de permutações das letras SSMM.3. Podemos relacionar o nº de sequências com a. Isso que nos leva a supor que $p_n = f_{2n}$ para $n \geq 2$, onde $f_1 = 1$, $f_2 = 2$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, para $n \geq 3$.

4.5 INTRODUÇÃO: A ESCALA EM PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Definição 16: Chama-se de Progressão Geométrica ou simplesmente de P.G. toda sequência em que cada um de seus termos, a partir do segundo, é igual ao anterior (ou antecedente) multiplicado por um número constante chamado de razão da P.G.

Classificação de uma P.G

Uma P.G é dita:

i. Crescente quando cada um de seus termos, a partir do segundo, é maior que o seu anterior (ou antecedente).

ii. Constante quando cada um de seus termos, a partir do segundo, é igual ao seu anterior (ou antecedente).

iii. Decrescente quando cada um de seus termos, a partir do segundo, é menor que o seu anterior (ou antecedente).

iv. Alternada quando cada um de seus termos, a partir do segundo, tem sinal contrário ao do seu anterior (ou antecedente).

v. Estacionária quando o seu primeiro termo é diferente de zero, mas todos os demais termos são iguais a zero.

Propriedades da P.G.

Teorema 8. (Termo Geral da P.G.) Se a sequência $(a_1, a_{2,} a_{3,} \cdots, a_n)$ é uma P.G, de termos não nulos e de razão q, então, seu n-ésimo termo, denotado por a_n, é igual a:

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

Neste caso, a_n é o n-ésimo termo ou termo na posição n, a_1 é o primeiro termo, q é a razão e n é o número de termos considerados.

A equação para calcular a soma S_n dos n primeiros termos de uma P.G. é dada pela expressão;

$$S_n = \frac{a_1 q^n - 1}{q - 1}$$

4.6 COMA PITAGÓRICA: ESCALA EM PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Que relação podemos perceber a respeito de música e progressão geométrica? Para responder a essa pergunta iremos mencionar o princípio de Pitágoras.

A escala Pitagórica foi pensada com base nos números racionais. Inicialmente foram observadas as consonâncias equivalentes a 1, 1/2, 2/3 e 3/4 da corda solta. Em seguida, além de estabelecer a razão 2/3 como unidade constante para determinar outros sons, ele também condicionou uma restrição. Para Abdounur (2003) e Santos (2015), tendo como base o comprimento da corda, essa escala deveria estar entre 0,5 e 1 para satisfazer a condição de existência. Nesse contexto, conforme tabela abaixo, Pitágoras desenvolveu o ciclo das quintas e conseguiu determinar as outras notas de sua escala. Apesar disso, a mesma ainda passou por ajustes importantes com o intuito de abranger as exigências musicais.

Quadro 19: Ciclo das Quintas.

Corda = 1	*Largura Resultante.*	*Intervalo Entre 0,5 e 1.*	**Ajuste ao Intervalo adequado.**	
2/3 de 1	***2/3 = 0,66***	***Pertence.***		*sol*
2/3 de 2/3	4/9 = 0,44	Não Pertence.	4/9 x 2 = ***8/9*** (***Pertence***)	*ré*
2/3 de 8/9	***16/27 = 0,59***	***Pertence.***		*lá*
2/3 de 16/27	32/81= 0,39	Não Pertence.	32/81 x 2= ***64/81***(***Pertence***)	*mi*
2/3 de 64/81	***128/243 = 0,52***	***Pertence.***		*si*

Adaptada: Granja (2019)

É preciso mencionar que existe uma relação inversa entre o tamanho da corda e sua frequência. Isso fica mais perceptível sob análise da oitava, que é metade da corda solta, produzindo um som mais agudo, ou seja, a diminuição do comprimento da corda gera uma frequência maior, sendo possível organizar as notas da seguinte maneira:

Quadro 20: Escala Natural.

1c	8/9	64/81	3/4	2/3	16/27	128/243	1/2c
dó	ré	mi	fá	sol	lá	si	dó

Fonte: O autor

No entanto, apesar de ter percebido relações pertinentes entre números e sons, a escala apresentava um problema, ou seja:

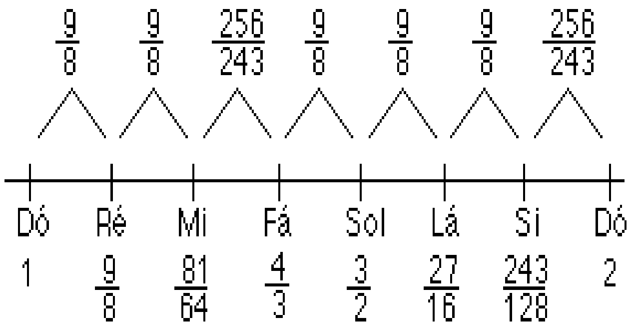
> [...] após uma sucessão de 12 quintas, deveríamos chegar à mesma nota do ponto de partida (7 oitavas acima), mas isso não ocorre. Esse erro ou desvio é chamado de coma pitagórica. Pode-se, então, definir a coma pitagórica como sendo a diferença entre a nota obtida após percorrer 12 quintas puras e aquela obtida após percorrer 7 oitavas. (ZUMPANO, GOLDEMBERG, 2016, p. 2).

De forma algébrica, temos que: para $m, n \in \mathbb{Z}\ tais\ que\ m, n \neq 0,$ não há solução para a seguinte equação:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{m} = 2^{n}.\ Ou\ seja,\ 3^{m} \neq 2^{n+m}, \forall m, n \in \mathbb{Z}.$$

Essa diferença comprometia as execuções musicais em diversos contextos, sobretudo em relação a afinação dos instrumentos. Outro impasse foram os intervalos dessa escala. Um tom Pitagórico é igual a 9/8 e um semitom é igual a 256/243. No entanto, o produto entre os semitons é diferente de um tom, conforme análise da imagem abaixo.

Figura 25: Tons e Semitons.



Fonte: https://iazzetta.eca.usp.br/tutor/acustica/escalas/pitagorica.html

Note que a distância entre ré e dó é semelhante a todos os outros intervalos iguais a $\frac{9}{8}$, pois, tomando como exemplo o intervalo de 1 tom entre sol e fá, temos:

$$\frac{sol}{fá} = \frac{3}{2} \div \frac{4}{3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{8} = 1{,}125.$$

Contudo, o intervalo de 1/2 tom é $\frac{256}{243} \cong 1{,}0535$, e $\left(\frac{256}{243}\right)^2 \cong 1{,}1099 \neq 1{,}125$. Assim, percebe-se que há uma diferença entre esses intervalos, o que é um dos fatores que limitavam o desenvolvimento das atividades musicais com base nessa escala.

Para os Pitagóricos todas as coisas do universo deveriam ser representadas por números inteiros. Logo, não era admissível fazer estudos com números irracionais, o que pode ter contribuído para a permanência desse problema durante muito tempo na Idade Média.

É no contexto do movimento renascentista, na Europa, que surge a ideia para o “aprimoramento” dos experimentos de Pitágoras, em que procurava-se obter uma escala em intervalos iguais.

Em 1691, Andréas Weckmeister, apresentou como solução a Escala Temperada. A ideia era inserir mais cinco notas (acidentes, bemóis, sustenidos) na escala Pitagórica. No entanto, seria necessário pensar em uma solução à margem dos números racionais.

> Do ponto de vista matemático o problema consistia em um fator f correspondente ao intervalo de semitom que após multiplicar 12 vezes uma frequência inicial f_o correspondente a uma determinada nota, atingisse sua oitava referente a frequência final, ou seja, $2f_o$.” (ABDOUNUR, 2015, p.111)

A ideia lógica desse raciocínio pode ser escrita matematicamente por meio da seguinte equação:

$$f_0 \cdot f \cdot f \cdot f \cdot f \cdots f \ = f_0 \cdot f^{12} = 2f_0$$

$$f^0 \cdot f^{12} \ = \ 2f^0$$

$$f^{12} \ = \ 2$$

$$f \ = \ \sqrt[12]{2}$$

$$f \ = \ 2^{\frac{1}{12}} \rightarrow \ f \ \cong 1{,}0594631 \textit{ (razão da P.G.)}$$

Ou seja, $f^n \ = \ 2$, em que f é o intervalo (semitons) $n = 12$ (total de notas pretendidas) 2 é a oitava (a mesma nota com o dobro da frequência). Logo,

> Temos, portanto, na música ocidental moderna, baseada no sistema de temperamento igual, 12 possibilidades de notas em uma oitava, com a mesma distância entre elas, contando as naturais e as alteradas. São elas (começando pelo dó): dó, dó #, ré, ré #, mi, fá, fá #, sol, sol #, lá, lá # e si. A escala de dó cromática apresenta exatamente essa sequência de notas, quando ascendente, repetindo-se a nota dó ao final. (GOROSITO, 2020, p. 45)

Conclui-se, a partir desse raciocínio, que assim foi possível determinar uma escala mais abrangente, a qual condicionou mais liberdade aos músicos para executar suas melodias com uma afinação mais próxima da perfeição, bem explorada por Johann Sebastian Bach.

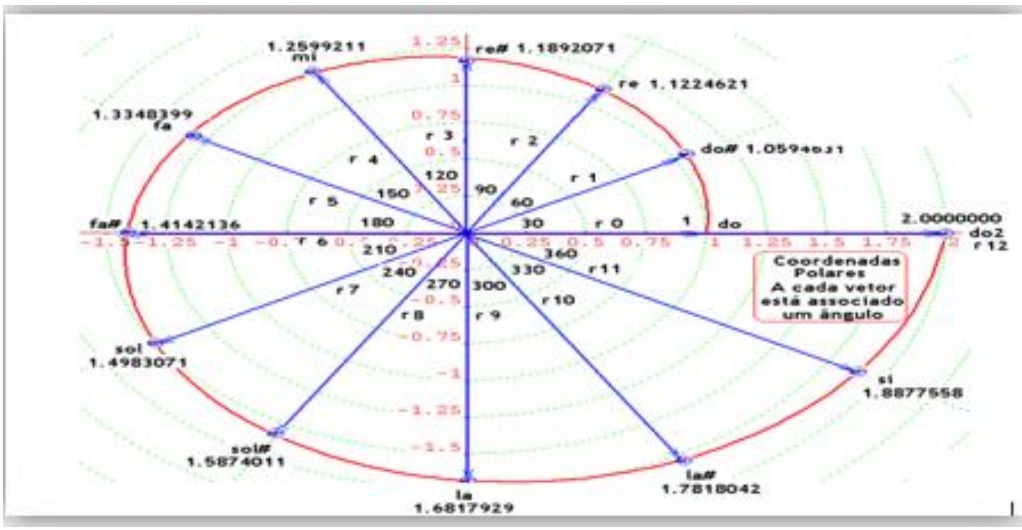
Na prática se um músico executar uma melodia somente a partir da escala de Pitágoras, ou seja, a escala natural, a mesma não irá soar muito bem aos ouvidos. Certamente, se a escuta for atenciosa o ouvinte perceberá a “falta de algo”: “uma nota trocada, uma nota não tocada”, etc. Nesse sentido, a execução de cada nota escrita na pauta é praticamente imprescindível para que se tenha música de qualidade.

Figura 26: O precursor.

Fonte: https://franciscabrancoveiga.com/2021/12/14/oratoria-de-natal-bwv-248-1-johann-sebastian-bach/

Perceba que nesse caso os intervalos entre as notas *dó*$_1$, *dó#, ré, ré#, mi, fá, fá#, sol, sol#, lá, lá#, si* e dó$_2$, são “iguais”. No entanto, como a razão da escala em P.G é um valor aproximado (1,0594631), pode-se considerar que ainda existe uma leve desafinação, a qual não compromete a musicalidade, sendo praticamente imperceptível aos ouvidos humanos.

Figura 27: Escala Musical Temperada.



Fonte: https://blog.santoangelo.com.br/ilusao-de-otica-os-trastes-estao-tortos/

VI. PROPOSTAS DE ATIVIDADES PARA O ENSINO MÉDIO

Contextualização 1. P.G. e As Frequências da Nota lá.

i. Escolha uma das frequências da imagem abaixo e desenvolva, com auxílio de uma calculadora, uma sequência em P.G.

Quadro 21: Frequências.

Notas	Freqüências
Dó	261,63 Hz
Ré	293,66 Hz
Mi	329,63 Hz
Fá	349,23 Hz
Sol	391,99 Hz
Lá	440,00 Hz
Si	493,88 Hz

Fonte: https://o-violonista.blogspot.com/2011/10/notas-musicais-escala-cromatica.html

ii. Faça uma análise do quadro 22 e escreva com suas palavras as relações entre P.G. e o ciclo da nota *lá*:

Quadro 22: Escala da nota lá em P.G.

N°	Nota.	Frequência (hz) x Razão	Produto
i	lá	*220*	
ii	#lá	220 x 1,0594631	*233,08*
iii	si	233,08 x 1,0594631	*246,94*
iv	dó	246,94 x 1,0594631	*261,62*
v	#dó	261,62 x 1,0594631	*277,18*
vi	ré	277,18 x 1,0594631	*293,66*
vii	#ré	293,66 x 1,0594631	*311,12*
viii	mi	311,12 x 1,0594631	*329,62*
ix	fá	329,62 x 1,0594631	*349,22*
x	#fá	349,22 x 1,0594631	*369,99*
xi	sol	369,99 x 1,0594631	*391,99*
xii	#sol	391,99 x 1,0594631	*415,30*
xiii	lá	415,30 x 1,0594631	***440***

Fonte: O autor.

Contextualização 2. Figuras em P.G. Finita

i. Para $q = 2\ e\ n \geq 1$, encontre o número de figuras exatas para preencher um compasso quaternário, a partir da lei da P.G.

Quadro 23: P.G. e Figuras Musicais.

Notas	***Graus* = *n***	***Lei.*** $\boldsymbol{a_n = a_1 q^{(n-1)}}$	**Figuras**	**Nº de figuras em um compasso 4/4**
dó	1		semibreve	1
ré	2		mínima	?
mi	3		semínima	?
fá	4		colcheia	?
sol	5		semicolcheia	?
lá	6		fusa	?
si	7		semifusa	?

Fonte: O autor.

Solução: Para encontrar a quantidade de semibreves em um compasso 4/4, vamos calcular da seguinte maneira:

Quantidade de Semibreves: $a_1 = 1 \cdot 2^{(1-1)} \rightarrow a_1 = 1 \cdot 2^{(0)} \rightarrow a_1 = 1 \cdot 1 \therefore a_1 = 1$ (semibreve)

Quantidade de (Mínimas): $a_2 = 1 \cdot 2^{(2-1)} \rightarrow \; a_2 = 2$

Quantidade de (Semínimas): $a_3 = 1 \cdot 2^{(3-1)} \rightarrow \; a_3 = 2^2 \rightarrow a_3 = 4$

Quantidade de (Colcheias): $a_4 = 1 \cdot 2^{(4-1)} \rightarrow a_4 = 1 \cdot 2^3 \rightarrow a_4 = 8$

Quantidade de (Semicolcheias): $a_5 = 1 \cdot 2^{(5-1)} \rightarrow a_5 = 1 \cdot 2^4 \rightarrow a_5 = 16$

Quantidade de (Fusas): $a_6 = 1 \cdot 2^{(6-1)} \rightarrow a_6 = 1 \cdot 2^5 \rightarrow a_6 = 32$

Quantidade de Semifusas: $a_7 = 1 \cdot 2^{(7-1)} \rightarrow a_7 = 1 \cdot 2^6 \rightarrow a_7 = 64$

Portanto, é possível concluir que a quantidade de figuras exatas para preencher um compasso quaternário individualmente segue uma ordem lógica em progressão geométrica de razão 2, disposta da seguinte maneira: $(1, 2, 4, 8, 16, 64)$. Para efeito de visualização, escrevemos uma lição com esses valores.

Geralmente durante a iniciação musical os estudantes têm contatos como alguns métodos de ensino, dentre os quais podemos citar o Bona. Trata-se de um livro com diversas lições em compassos, intervalos, e graus de dificuldades diferentes, para que o aluno estude divisão de partituras. No entanto, em alguns casos o professor pode escrevê-las de acordo com os objetivos que se pretende alcançar a partir do seu próprio planejamento.

Figura 28: Quantidade de Figuras em um Compasso 4/4.

Fonte: O autor.

Contextualização 3. P.G. em compasso simples e composto.

i. Compasso composto é aquele que tem como unidade de tempo uma figura composta pontuada. Em música quando uma figura está pontuada ela tem seu valor aumentado em sua metade. Nesse caso, um trecho musical em compasso 6/2 pode ser preenchido com uma semibreve pontuada. Isso porque ao possuir um valor igual a 4 tempos, uma semibreve terá um ponto de aumento igual a sua metade, ou seja, 2 tempos, formando 6 tempos no total. A partir dessas informações, ao analisar os valores da tabela abaixo, qual padrão deve existir para que se tenha outra sequência em P.G. também (com razão q) igual a 1/2?

Quadro 24: Nomes das figuras musicais e valores.

semibreve	4 tempos
mínima	2 tempos
semínima	1 tempo
colcheia	1/2 tempo
semicolcheia	1/4 tempo
fusa	1/8 tempo
semifusa	1/16 tempo

Fonte: O autor.

5 TEÓRICOS: CAMINHOS PARA UM PLANEJAMENTO

Segundo Ambrozi (2017), ao pensar em uma sequência didática para ensinar determinado conteúdo, ela deve contemplar a organização didática como um percurso que auxilie para o desenvolvimento de aprendizagens pretendidas. Assim, a Sequência Didática é um planejamento pedagógico intencional, elaborado pelo professor com objetivos específicos para o ensino de um ou mais conteúdos.

Para Zabala (1998), uma sequência didática é definida como um conjunto de atividades organizadas de forma ordenada, seguindo uma estrutura e articulação específicas, com o propósito de atingir objetivos educacionais. Essa sequência possui um início e um final previamente conhecidos tanto pelos professores quanto pelos alunos.

Ainda segundo o autor, ao contemplar a elaboração das sequências didáticas, essa se configura como um dos caminhos mais assertivos para aprimorar a prática educativa. Dessa forma, os conteúdos abordados devem ser voltados para a formação de cidadãos conscientes, informados e agentes de transformação na sociedade em que estão inseridos.

Além disso, a sequência didática possui uma natureza singular, possibilitando a integração do planejamento, da aplicação e da avaliação.

De acordo com Zabala (1998), os conteúdos para a aprendizagem englobam tudo aquilo que pode propiciar o desenvolvimento da capacidade motora, afetiva, de relação interpessoal e de inserção social do aluno.

Ainda para o autor, o aluno é o protagonista da aprendizagem, assumindo um papel ativo e comprometido. O professor é um orientador, que deve identificar os diferentes níveis de conhecimento dos alunos. Essa abordagem didática visa garantir que todos os alunos avancem a partir de suas condições iniciais. O autor ainda reforça, a aprendizagem é um processo complexo, que depende da interação entre o aluno e o professor. Ambos devem atuar de forma conjunta para que o aluno possa compreender o conteúdo proposto.

BNCC

A implementação da BNCC em 2018 motivou discussões por diversos órgãos e especialistas da educação em todo país. Para muitos o documento deveria ter passado pelo crivo de um debate mais amplo e democrático com o intuito de abranger as demandas e peculiaridades do público em geral. No entanto, tomando como base o contexto político entre 2016 a 2018, percebe-se que houve adesão ao seguinte pensamento:

> A BNCC é um documento plural, contemporâneo, e estabelece com clareza o conjunto de aprendizagens essenciais e indispensáveis a que todos os estudantes, crianças, jovens e adultos, têm direito. Com ela, redes de ensino e instituições escolares públicas e particulares passam a ter uma referência nacional obrigatória para a elaboração ou adequação de seus currículos e propostas pedagógicas. Essa referência é o ponto ao qual se quer chegar em cada etapa da Educação Básica, enquanto os currículos traçam o caminho até lá (**BRASIL, 2018**, p. 5).

O documento divide-se em três etapas: A Educação Básica: Educação Infantil (0 a 5 anos); O Ensino Fundamental (6 a 14 anos) e o Ensino Médio (15 a 17 anos). Além disso a BNCC sugere competências e habilidades as quais podem ser discutidas e analisadas sobretudo na elaboração do planejamento pelo professor.

A partir dessas abordagens, serão apresentadas algumas propostas de Sequências Didáticas, seguindo os passos delineados por Zabala (1998) bem como a própria BNCC.

MOTIVAÇÃO PARA O PLANEJAMENTO

A ideia de apresentar uma proposta de planejamento sobre progressão geométrica e escala musical para estudantes a partir do ensino médio surgiu durante a tentativa de uma abordagem em uma turma do 9º ano. Ali, apesar da maioria dos alunos ter se envolvido, percebi que havia dificuldades, por exemplo de trabalhar com sequências envolvendo frações, razões do tipo 1/2, leis de uma sequência, inclusive alguns com dificuldades sobre as 4 operações e etc. Dessa maneira, surgiu a ideia de propor um planejamento para uma turma mais “experiente”.

5.1 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Nesta seção será apresentada uma proposta de sequência didática envolvendo progressões geométricas, sobretudo aplicada a alguns conceitos musicais, tais como: compassos, figuras e escalas. A ideia é contribuir com a metodologia do professor sobre a contextualização do assunto, o qual poderá ser utilizado em séries do ensino médio ou em disciplinas da licenciatura em matemática. No entanto, é possível que o leitor mais atento consiga abstrair outros conhecimentos aplicáveis e adequados a outros públicos, bem como construir seu próprio planejamento a partir dessas ideias. A seguir apresentaremos o seguinte planejamento:

A PROPOSTA

- **Unidade Temática:**

Sequências.

- **Objeto de Conhecimento**.

Progressão Geométrica.

- **Competências Específicas:**

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

- **Habilidades/Objetivos Específicos.**

(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

i. Comunicação da atividade.

Para iniciar iremos abordar, de forma expositiva, conceitos, definições, exemplos, contraexemplos de exercícios resolvidos sobre progressão geométrica. Em seguida, tendo como referência a tabela dos valores das figuras musicais, iremos definir, apresentar e explicar a ideia de P.G. inserida nos compassos 2/4 e 4/4 (já preenchidos), e com os valores numéricos embaixo de cada figura. Essa parte pode ser feita na lousa, com slides, ou até mesmo escrita em cartolinas.

ii. Apresentação de uma situação - problema.

1º) Como fazer preenchimento de compassos musicais a partir de sequências em P.G utilizando as figuras e seus valores? Consulte a tabela dos valores das figuras e utilize a pauta entregue pelo professor para preencher os compassos de acordo com as sequências abaixo:

I. $a_n = (1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16)$; II. $b_n = (4, 2, 1, 1/2, 1/4)$; III. $h_n = (2, 1, 1/2, 1/4, 1/8)$
IV. $t_n = (2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32)$

iii. Busca de Soluções.

Nesse momento o professor deve analisar se os alunos conseguiram fazer os preenchimentos corretos, atento aos valores de cada figura, sempre mediando, explicando quando necessário. Em seguida, após a conclusão da atividade, o professor deverá enfatizar a razão q de cada P.G.

iv. Questionário.

01. Determine a sequência a partir da lei $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$. Para $n \geq 1$.

02. Determine a sequência a partir da lei $t_n = 2^n$ Para $n \geq 1$

03. Qual a relação dessas sequências com a P.G? Justifique sobre cada uma delas:

04. Agora, para $n \geq 1$, determine uma sequência com base na relação, $f(x) = 2^x$ e compare com as demais.

v. Diálogo entre professor e alunos

Nesse momento o professor deverá questionar a maneira como os discentes assimilaram a proposta, a importância de relacionar matemática e música no contexto de estudos sobre progressões geométricas, as dificuldades encontradas e superadas por eles e etc.

vi. Conclusão

Nesse momento o professor poderá dialogar sobre outras possibilidades dentro desse contexto, tais como: Pitágoras (monocórdio), frequências em Hz e notas musicais.

vii. Avaliação

Processual e contínua a partir da participação, envolvimento e entrega dos resultados.

5.2 CONSIDERAÇÕES FINAIS.

A ideia de realizar uma pesquisa relacionando essas duas áreas do conhecimento foi motivada pelo fato de que, embora não muito aparente, há muita similaridade entre ambas. No primeiro momento, durante o início da pesquisa ainda no curso da disciplina metodologia da pesquisa, houve uma tentativa de relacionar o ciclo das quintas com o ciclo trigonométrico, em seguida houve a intenção de modelar alguns trabalhos via materiais manipuláveis e a construção de um xilofone.

Um ponto importante para que o presente trabalho tenha explorado assuntos diversos da matemática a partir da música, foi a busca pela compreensão dos padrões envolvidos nesses estudos: os intervalos, os compassos, as escalas, as tonalidades etc.

De certa maneira é possível afirmar que a música é indissociável da matemática em todas as suas nuances, da escrita ao som. No entanto, a proximidade histórica entre ambas fragmentou-se com o passar dos anos, de modo que, apesar dos escritos em muitos documentos normativos, o ensino e os estudos dessa área nas instituições educacionais ainda são bem insignificantes.

As abordagens sobre sequências, progressão geométrica, congruência modular etc. são apenas uma amostra do quão vasto é a possibilidade de investigar e aproximar a música da matemática. Portanto, é considerável que outros estudos sejam realizados. Como proposta, é possível citar o seguinte: funções, o ciclo trigonométrico, a ideia de limites, e o próprio ensino da matemática a partir da confecção de instrumentos musicais.

As discussões em torno do ensino da matemática sob diversos ângulos buscam (dentre outras coisas) aproximar os estudantes aos conhecimentos considerados mais aplicáveis em seu cotidiano. Na visão de muitos profissionais da educação, sobretudo de áreas diferentes, a matemática apresenta-se de maneira muito complexa e até mesmo pouco atraente. Esse tipo de pensamento, de certa maneira, provoca alguns questionamentos, sobretudo acerca dos caminhos percorridos pelos docentes em suas atividades diárias. Contudo, é importante enfatizar que nem sempre os professores estão "confortáveis" para organizar seus planejamentos priorizando certas contextualizações, visto que ainda é comum no ensino básico e até mesmo no ensino médio, a migração de alguns desses profissionais para outras áreas do conhecimento sem tanta exigência ou familiaridade.

Ao propor uma ideia interdisciplinar visando a possibilidade de reflexão, prática, adequações e conexões em níveis diferentes do ensino, certamente estamos caminhando para amadurecer nossas próprias inquietações: até que ponto podemos relacionar duas ou mais áreas do conhecimento com eficiência no ensino? Que modelo de formação o professor deve ter para lograr êxito nesse tipo de proposta? As respostas para perguntas como essas devem ser encontradas nas entrelinhas dos estudos de cada profissional da educação, não permitindo o afastamento de sua própria realidade sociocultural e de trabalho. Posto isso, percebe-se que estamos diante de um cenário cada vez mais delicado e desafiador.

O ensino da matemática deve ser fundamentado em um bom planejamento, pesquisas, diálogo entre áreas diferentes e afins, empenho, etc. No entanto, suas dificuldades transcendem a sala de aula, precisando ser levada em consideração as exigências impostas ao trabalho docente, sobretudo na educação básica, bem como as bases sociais, culturais, econômicas, dentre outras, as quais fazem parte da realidade de professores e estudantes, podendo ter forte impacto na eficiência do ensino em geral.

6 REFERÊNCIAS.

ABDOUNUR, O. J. **Matemática e música**. cidade: Editora Livraria da Física, 2015.

ABDOUNUR, O. J. **Matemática e Música** - O pensamento analógico na construção de significados. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.

ABDOUNUR, O. J. **Matemática e Música**: O pensamento analógico na construção de significados. Coleção Ensaios transversais. 4ª ed. São Paulo: Escrituras, 2002.

ABDOUNUR, O. J. **Matemática e música**: o pensamento analógico na construção de significados. 3 ed. São Paulo: Escrituras Editora, 2003.

ABDOUNUR, O. J. Mudanças estruturais nos fundamentos matemáticos da música a partir do século xvii: considerações sobre consonância, série harmônica e temperamento. Revista Brasileira de História da Matemática, p. 369–380, 2007.

AMBROZI, L. **Jogos em uma sequência didática para o ensino de análise combinatória**. 2017.

ANDERLE, D. Série Harmônica, 2001. Disponível em:<http://www.dirsom.com.br/index_htm_files/Serie%20Harmonica.pdf>. Acesso em: 30 nov, 2022.

ÁVILA, G. A Série Harmônica e a Fórmula de Euler-MacLaurin. Revista Matemática Universitária, São Paulo, n. 19, p.55-63, 1995.

ÁVILA, G. As Séries Infinitas. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, n. 30, p.10-17, 1996.

ÁVILA, Geraldo S. de S. **Análise Matemática Para Licenciatura. 3ª edição**. São Paulo: Blücher, 2006;

BARTHEL, L. Au coeur de la harpe au XVIIIème siècle. Paris: Garnier-François, 2005.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia (/Rodney Carlos Bassanezi). 3. ed. São Paulo, Contexto, 2011. ISBN 9788572442077.
_____. Temas e modelos. Campinas, Edição do autor, UFABC, 2012.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**: educação é a base. Brasília, DF: MEC/CONSED/UNDIME, 2018.

BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília: MEC, 1999.

BRASIL. **Leis de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Lei nº 13.278. 2016.

BRAUTIGAM, L. L. V. **Modelagem Matemática**: construindo a interdisciplinaridade, 2001. 74f Monografia (Especialização em Psicopedagogia) - Universidade Estadual do Centro Oeste, UNICENTRO, Guarapuava, PR, 2001.

CAMARGOS, Chrisley B. R. **Música e Matemática**: a harmonia dos números revelada em uma estratégia de modelagem. Google Acadêmico, 2010. Disponível em: https://repositorio.ufop.br/items/ad19501e-f054-41f2-a793-2c0b09db0090. Acesso em: 29 jul. 2024.

CANDÉ, Rolland de. **História Universal da Música**. 2. ed. São Paulo: Ed. Martins Fontes, 2001, v.1.

CABRAL, Fernando; LAGO, Alexandre. **Física**. Edição 2004. São Paulo: Harbra, 2004.

CIRINO, A. C. Apreciação musical: um processo ativo na musicalização de adultos. In: CONGRESSO DA ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO EM MÚSICA, 21., 2011, Uberlândia. *Anais*... Uberlândia: ANPPOM, 2011. p.296-302.

FRIGOTTO, Gaudêncio. (2008), "**Interdisciplinaridade como necessidade e como problema nas ciências sociais"**. Ideação: Revista do Centro de Educação e Letras da Unioeste, 10 (1): 41- 62.

GOMES, Amanda. A atuação profissional em arquivos musicais: algumas considerações. Múltiplos Olhares em Ciência da Informação, Belo Horizonte, v. 7, n. 1, p.1-13, 2017. Disponível em: https://periodicos.ufmg.br/index.php/moci/article/view/17021 Acesso em: 30 mar. 2022.

GIL, A. C. **Como classificar as pesquisas?** In: GIL, Antônio. 4. ed. São Paulo: Atlas S.a., 2002.

GOROSITO, L. **Notação e Linguagem Musical**. 1ª ed. Editora Intersaberes, Curitiba, 2020.

GOTO, Mario. **Física e Música em Consonância**. Scielo, 2009. Disponível em: https://www.scielo.br/j/rbef/a/s9TwczdtxDR8QPJCndqJDmb/#. Acesso em: 05 ago. 2024.

GONÇALVES, Rafaela Ramos Soares. **Uma abordagem alternativa para o ensino de análise combinatória no ensino médio.** 2014.

GOMES, C. E. da C. Curso de Especialização em Ciências Humanas e Saúde. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Juiz de Fora, 2009.

GOROSITO, L. Notação e Linguagem Musical. 1ª ed. Editora Intersaberes, Curitiba, 2020.

GUIMARÃES, Pablo de Vargas. **Educação e Música**. Pensar a Educação em Revista. Curitiba/Belo Horizonte, v. 3, n. 2, p. 3-24, abr./jun. 2017.

GRANJA, C. E. S. C. Música e Matemática na Sala de Aula. In: SILVA, R. S. R. (org.). **Artes em Educação Matemática**. Porto Alegre: Editora Fi, 2019. p. 81-106.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática Elementar 5**: Combinatória e Probabilidade. São Paulo: Atual Editora, 2004.

IEZZI, Gelson et al. **Matemática: ciências e aplicações:** ensino médio. v. 1. 9 ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

KAPLANSKY. I. et al. Solution of the Probleme des ménages. Bulletin of the American Mathematical Society 49.10 (1943), pp. 784-785.

KLEBER, Magali. Educacion Musical, políticas públicas y diversidad culutral em Latinamerica. Eufonía Didáctica de la Música, n°49, p. 6-15, abril 2010.

LACERDA, O. **Compêndio de teoria elementar da música**. 3° ed. São Paulo: Ricordi Brasileira, 1967.

LIMA, Elon L. **Curso de Análise vol**. **1. 14ª edição**. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2012;

LIMA, E. L. Curso de Análise Vol. 1. ed. 12. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
MACHADO, Nilson José. Conhecimentos como rede: a metáfora como paradigma e como processo. *Série educação para cidadania.* São Paulo: USP, 1994. n.ş 9.

MARTINI, Gloria. et al. **Conexões com a Física.** 2ª ed. São Paulo: Moderna, 2013.

MARTINS, D. F. P. S. Escalas, Inversas e Tríades: A Matemática aplicada à Música. Dissertação (Mestre em matemática) - Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Rio de Janeiro, 2015.

MED, Bohumil; Bona: **Teoria da música**. 4. ed. Brasília, DF: Cortez, 1996, 420 p.

MED, Bohumil. **Teoria da Música**:Vade Mecum de Teoria Musical. 5ª ed. Brasília, DF: Musimed, 2017.

MONTEIRO F. N.; MEDEIROS J.; MEDEIROS C. F. Matemática e Música: as progressões geométricas e o padrão de intervalos da escala cromática BOLEMA: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro – SP v. 16 n. 20 (2003)

MORGADO, Augusto César de Oliveira et al. **Análise Combinatória e Probabilidade. 9**. ed. Rio de Janeiro: Graftex, 1991.

MARIN, M. J. S. *et al* Aspectos das fortalezas e fragilidades no uso das metodologias ativas de aprendizagem. Revista Brasileira de Educação Médica, Brasília, v. 34, n. 1, p. 13-20, 2010.

PAVIANI, J. **Disciplinaridade e interdisciplinaridade**. In: PIMENTA, C. Interdisciplinaridade, humanismo, universidade. Porto (Portugal): Campo das Letras, 2004. p. 15-57.

PRIOLLI, Maria Luisa de Mattos. **Princípios da Música para a Juventude**. 33ª ed. Rio de Janeiro: Revista e Atualizada, 2013.

PRIOLLI, Maria Luisa de Mattos. **Princípios da Música para a Juventude**. 54ª ed. Rio de Janeiro: Revista e Atualizada, 2013.

RODRIGUES, V. P. Reflexões sobre o estudo da improvisação Performática: uma análise da experiência e metodologia de ensino de Nelson Faria. 2012. 105 f. Monografia (Licenciatura em Música) - Faculdade de Música do Espírito Santo, Vitória. 2012.

ROMANELLI, Guilherme; ILARI, Beatriz; BOSÍSIO, Paulo. Algumas ideias de Paulo Bosísio sobre aspectos da educação musical instrumental. Opus, v. 14, n. 2, p. 7-20, dez. 2008.

ROQUE, T. História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SADIE, S., ed. The new grove dictionary of music and musicians London, Macmillan, 1980.

SANTOS, E. F. **Matemática e música na educação**. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de São Paulo, Birigui, 2015.

SOUZA, L. G. S. Uma abordagem didático-pedagógica da racionalidade matemática na criação musical. Tese de doutorado em educação. São Paulo, 2012.
SOUZA, J. Aprender e Ensinar Música no Cotidiano. Porto Alegre: Sulina, 2012.

SOUZA, L. G. S. Uma abordagem Didático-pedagógica da racionalidade matemática na criação musical. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2012.

ZABALA, A. **A prática educativa**: como ensinar. Tradução Ernani F. Rosa-Porto Alegre: Artmed,1998.

ZUMPANO, N. G. GOLDEMBERG, R. Princípios de Técnica e História do Temperamento Musical. **Revista Sonora**, Campinas, v. 2, n. 4, p. 1-10, 2016.