INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA Bahia

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA BAHIA
***CAMPUS* VALENÇA**
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MARIA VITÓRIA DA LUZ AMENO

EXPLORANDO AS EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU SOB CARACTERIZAÇÃO DE ESTRUTURA ALGÉBRICA

VALENÇA-BA
2024

MARIA VITÓRIA DA LUZ AMENO

EXPLORANDO AS EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU SOB CARACTERIZAÇÃO DE ESTRUTURA ALGÉBRICA

Monografia apresentada à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia, *Campus* Valença, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Profª. Ma. Ana Carolina Moura Teixeira
Coorientador: Profº. Me. Marcelo de Araújo Lino

Valença-BA
2024

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO SISTEMA DE BIBLIOTECAS DO IFBA, COM OS DADOS FORNECIDOS PELO(A) AUTOR(A)

A511e Ameno, Maria Vitória da Luz

Explorando as equações do primeiro grau sob caracterização de estrutura algébrica: / Maria Vitória da Ameno; orientadora Ana Carolina Moura Texeira; coorientador Marcelo de Araújo Lino -- Valença : IFBA, 2024.

67f.

Trabalho de Conclusão de Curso (LICENCIATURA EM MATEMÁTICA) -- Instituto Federal da Bahia, 2024.

1. Equação do primeiro grau. 2. Álgebra abstrata. 3. Sequência didática. 4. Educação básica. 5. Ensino superior. I. Texeira, Ana Carolina Moura, orient. II. Lino, Marcelo de Araújo, coorient. III. TÍTULO.

CDD:510.7

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA BAHIA
Rua Vereador Romeu Agrário Martins, s/n - Bairro Tento - CEP 45400-000 - Valença - BA - www.portal.ifba.edu.br

Maria Vitória da Luz Ameno

Explorando as equações do primeiro grau sob caracterização de estrutura algébrica

Monografia apresentada à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia, Campus Valença, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Trabalho de Conclusão de Curso aprovado pela banca examinadora em 24/09/2024.

BANCA EXAMINADORA

____

Profa. Ms. Ana Carolina Moura Teixeira (Orientadora)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

____

Prof. Me. Marcelo de Araújo Lino (Coorientador)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

____

Prof. Dr. Diogo Soares Dórea da Silva
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

____

Prof. Me. Roque da Silva Lyrio
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

Em 27 de setembro de 2024.

Documento assinado eletronicamente por **ANA CAROLINA MOURA TEIXEIRA**, **Professor Efetivo**, em 27/09/2024, às 21:26, conforme decreto nº 8.539/2015.

Documento assinado eletronicamente por **MARCELO DE ARAUJO LINO**, **Professor Efetivo**, em 28/09/2024, às 09:24, conforme decreto nº 8.539/2015.

Documento assinado eletronicamente por **Diogo Soares Dorea da Silva**, **Professor Efetivo**, em 28/09/2024, às 09:32, conforme decreto nº 8.539/2015.

Documento assinado eletronicamente por **ROQUE DA SILVA LYRIO**, **Professor Efetivo**, em 29/09/2024, às 19:53, conforme decreto nº 8.539/2015.

A autenticidade do documento pode ser conferida no site http://sei.ifba.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&acao_origem=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0 informando o código verificador **3756720** e o código CRC **B9A19C1F**.

23280.001374/2022-62 3756720v2

“Dedico este trabalho de conclusão de curso à minha mãe dona Cleide e minha avó dona Alice, duas mulheres que me inspiram por sua força e dedicação, pois sem elas, não teria conseguido concluir essa importante etapa da minha vida.”

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus, pelo dom da vida, por me permitir superar todos os obstáculos ao longo desta jornada.

Aos meus familiares, pelo apoio, incentivo, amor e carinho, especialmente à minha mãe, Cleide da Luz, ao meu padrasto, Ronaldo Santos, aos meus irmãos, em especial Bruna Santos, às minhas tias, Ana Ameno e Alice Ameno, aos meus primos, em especial Letícia Ameno, Larissa Moreno, William Santos, e ao meu futuro esposo, Erisson Lobão, por sempre estarem ao meu lado. Agradeço também à minha querida avó, Alice Maria, e a todos que fazem parte da minha vida. Sem vocês, não seria possível chegar até aqui.

Agradeço a todos os professores do IFBA – *Campus* Valença, por contribuírem para a minha formação pessoal e profissional, por sempre me inspirarem e incentivarem.

Aos meus orientadores, Ana Carolina e Marcelo Lino, pela paciência e disposição. Ao professor Roque Lyrio e ao professor Diogo Dórea, por aceitarem o convite para compor a banca. Ao professor Diego Coutinho, pela dedicação enquanto esteve na coordenação do curso. Todos vocês me inspiram a ser uma profissional cada vez melhor, obrigada pelos ensinamentos.

Aos meus amigos e colegas que me acompanharam durante o curso, em especial à Brena Reis, minha dupla de trabalhos acadêmicos, que desde o início da pandemia esteve comigo; à Emilly Fonseca, que esteve comigo desde o primeiro dia de aula; ao Robson Santos, pela ajuda desde a monitoria na disciplina de Geometria Analítica; e à Flaviane Panta, que esteve comigo desde a disciplina de Metodologia e Prática do Ensino da Matemática II, a amizade de vocês contribuiu para que esse processo fosse mais leve.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho, minha eterna gratidão.

Muito obrigada a todos!

"A persistência é o caminho do êxito."
(Charles Chaplin)

RESUMO

A Matemática é considerada por muitos estudantes uma disciplina de difícil compreensão, principalmente quando se trata de conteúdos algébricos. Dessa forma, o presente trabalho tem como objetivo compreender como os conceitos de Grupos e Anéis contribuem para o ensino e a aprendizagem dos estudantes na Educação Básica. Para esse propósito, optamos por conduzir um estudo com abordagem bibliográfica e qualitativa, de caráter exploratório. Portanto, neste trabalho abordaremos sobre a álgebra na Educação Básica, como os documentos oficiais discutem o tema, também destacando o pensamento algébrico e a importância do ensino da álgebra nos cursos de licenciatura. Essa discussão busca tratar dos pontos principais para ressaltar a importância do estudo de Grupos e Anéis nos cursos de Licenciatura em Matemática. Para finalizar, propusemos uma sequência didática como possibilidade de trabalhar o pensamento algébrico dos estudantes na Educação Básica. Diante disso, em suma, quando estudamos as equações do primeiro grau, o conjunto solução é formado por uma estrutura que denominamos por grupo quando $ax+b=0$, para $a=-1$ ou $a=1$ e um anel para quando $a\neq -1$ ou $a\neq 1$. Para isso, desenvolvemos uma sequência de acordo com as habilidades presentes na BNCC, relacionadas à Álgebra do 7° ano. A partir dessa sequência, foi possível perceber que os conteúdos envolvendo Grupos e Anéis são de fundamental relevância para a formação docente, visto que a partir deles que o professor em formação desenvolve uma percepção aprofundada das estruturas em relação aos conteúdos algébricos.

Palavras-chaves: Educação básica; equação do primeiro grau; álgebra abstrata; ensino superior; sequência didática.

ABSTRACT

Mathematics is considered by many students to be a challenging subject, especially regarding algebraic content. Therefore, this work aims to understand how the concepts of Groups and Rings contribute to the teaching and learning of students in Basic Education. To this end, we opted for a bibliographic and qualitative exploratory study. Thus, this paper will discuss algebra in Basic Education, how official documents address the topic, and will highlight algebraic thinking and the importance of teaching algebra in teacher education programs. This discussion aims to emphasize the key points to underline the significance of studying Groups and Rings in Mathematics teacher education courses. Finally, we proposed a didactic sequence as a way to enhance students' algebraic thinking in Basic Education. In summary, when studying first-degree equations, the solution set is formed by a structure we call a group when $ax+b=0$ for $a=-1$ or $a=1$, and a ring when $a \neq -1$ or $a \neq 1$. Based on this sequence, we observed that content involving Groups and Rings is fundamentally relevant for teacher training, as it allows future teachers to develop a deeper understanding of the structures related to algebraic content.

Keywords: Basic education; first degree equation; abstract algebra; higher education; didactic sequence.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

a.C.	Antes de Cristo
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
d.C.	Depois de Cristo
LDB	Leis de Diretrizes e Bases
MEC	Ministério da Educação
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics
PCN’s	Parâmetros Curriculares Nacionais

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018) apresenta que Matemática desenvolve sistemas abstratos, que contribuem para entender os fenômenos envolvendo as ideias de movimentos, espaços, formas e números, que podem estar associados ou não com o mundo real. Embora a Matemática seja uma ciência baseada em hipóteses e deduções, cujas suas demostrações são fundamentadas em axiomas e postulados, é de fundamental importância estudos envolvendo aprendizagem Matemática.

Dessa forma, a aprendizagem Matemática possibilita a formação do indivíduo, para que ele possa desenvolver habilidade de raciocinar e interpretar situações práticas no meio social e potencializar sua formação enquanto cidadão. Nesse contexto, a Matemática possui diversas áreas de estudo que contribuem para esse desenvolvimento, tais como: Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade, dentre outras. Em específico estudaremos a Álgebra.

A Álgebra, por sua vez, representa um conjunto específico de conceitos e procedimentos matemáticos associados à manipulação de símbolos (letras, números e entre outros). Portanto, o seu objetivo é compreender as relações quantitativas entre grandezas, resolver problemas e situações matemáticas, além de conceitos por meio de expressões algébricas. Desta forma, contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico, sendo este pensamento fundamental para que os alunos identifiquem regularidades e generalizações em padrões e estruturas matemáticas, conforme está explicitado em (Brasil, 2018).

Segundo o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), citado por (Barbosa; Vale, 2019, p. 400), orienta-se que o acesso à Álgebra deve ocorrer desde os primeiros anos escolares, de modo a permitir aos alunos "aprender Álgebra como um conjunto de conceitos e competências ligadas à representação de relações quantitativas e como uma forma de pensamento para formalizar padrões, funções e generalizações". Desse modo, os estudantes desenvolvem a habilidade de abstração e generalização em problemas matemáticos, fator primordial para a transição da Aritmética para os conceitos abordados posteriormente no currículo escolar.

Nesse tocante, os documentos oficiais, como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), reconhecem a relevância da Álgebra na formação do cidadão, estimulando o desenvolvimento do pensamento lógico, crítico e analítico, que além de contribuir na resolução de problemas cotidianos, permite uma melhor leitura e compreensão do mundo que o cerca.

No que diz respeito à generalização e abstração, os documentos oficiais supracitados defendem a importância de ser desenvolvido o pensamento algébrico na formação do cidadão crítico. Assim, podemos observar que, na formação de professores de Matemática, a disciplina que trata da Álgebra Abstrata contribui nesse processo. Uma vez que estudamos as estruturas algébricas, temos como principais tópicos: semigrupos, grupos, anéis e corpos, que generalizam características comuns de conjuntos. Alguns desses conjuntos são familiares na Educação Básica, tais como: Conjunto dos Números Naturais ($\mathbb{N}$), Conjunto dos Números Inteiros ($\mathbb{Z}$), Conjunto dos Números Racionais ($\mathbb{Q}$), Conjunto dos Números Irracionais ($\mathbb{I}$), Conjunto dos Números Reais ($\mathbb{R}$) e o Conjunto dos Números Complexos ($\mathbb{C}$).

Considerando, por exemplo, a operação de adição definida nos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, pode-se observar que existe um elemento denominado "zero", que indicamos pelo símbolo 0. Este elemento, quando adicionado com qualquer elemento desses conjuntos, conserva o valor da operação. Ou seja, dado um número a que pertence a um desses conjuntos, ao realizar a operação de adição com o 0, o resultado obtido será o próprio número a. De maneira análoga, para operação de multiplicação definida nos conjuntos citados, existe um elemento denominado "um", que indicamos pelo símbolo 1. Quando multiplicamos com qualquer elemento desses conjuntos, conserva o valor da operação. Deste modo, dizemos que 0 e 1 são chamados de elementos neutros da adição e multiplicação, respectivamente.

Ao longo da minha formação inicial, especificamente na disciplina de estruturas algébricas. Na graduação, presenciei a dificuldade enfrentada pelos colegas em estabelecer conexões entre os conteúdos envolvidos nessa disciplina e aqueles ensinados no nível da Educação Básica. Diante desse cenário, surgiu a necessidade de conduzir uma pesquisa com o propósito de estabelecer uma relação entre os conceitos de Álgebra Abstrata explorados no Ensino Superior e sua aplicação no âmbito da Educação Básica.

Desse modo, o respectivo trabalho tem como objetivo compreender a relação entre os conceitos de Grupos e Anéis na resolução de equações de primeiro grau, estudados no 7° e no 8° ano do Ensino Fundamental, bem como sua influência no processo de ensino destes.

1.1 Problema

Como os conceitos de Grupos e Anéis auxiliam no processo de ensino e aprendizagem na resolução de equações do primeiro grau na Educação Básica?

1.2 Objetivos

1.2.1 Geral

Compreender como os conceitos de Grupos e Anéis contribuem para o ensino e aprendizagem dos estudantes na Educação Básica.

1.2.2 Específicos

- Sistematizar os conceitos de Grupos e Anéis que envolvem estruturas algébricas;

- Correlacionar os conceitos de Grupos e Anéis com o estudo das equações do primeiro grau;
- Investigar como esses conceitos auxiliam no processo de ensino e aprendizagem das equações do primeiro grau na Educação Básica;
- Propor uma sequência didática que possibilite o desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes.

1.3 Metodologia

O presente trabalho busca destacar como os conceitos estudados em grupos e anéis contribuem para o ensino e aprendizagem dos estudantes na Educação Básica no estudo de equações do primeiro grau. Diante disso, os caminhos metodológicos possuem fins qualitativos, que por sua vez, “[...] ocupam um reconhecido lugar entre as várias possibilidades de se estudar os fenômenos que envolvem os seres humanos e suas intrincadas relações sociais, estabelecidas em diversos ambientes.” (Godoy, 1995, p. 21). Com isso, essa abordagem é essencial para explorar as relações existentes entre os conteúdos vistos no curso de estruturas algébricas, com os conteúdos na Educação Básica, em especifico as equações do primeiro grau e como eles contribuem para o processo de aprendizagem dos alunos.

Diante disso, os caminhos metodológicos percorridos na construção deste estudo serão baseados inicialmente na pesquisa bibliográfica que, de acordo com (Gil, 2002, p. 44), “A pesquisa bibliográfica é desenvolvida com base em material já elaborado”. Portanto, buscaremos, em livros, artigos, teses, dissertações, revistas e entre outros trabalhos acadêmicos, estudos sobre o tema para que possamos atingir os objetivos propostos. Objetiva-se, com isso, que seja possível desenvolver uma sequência didática, com o objetivo de desenvolver o pensamento algébrico dos estudantes.

Dessa forma, a pesquisa tem característica exploratória, que segundo (Gil, 2002, p. 41),

> Estas pesquisas têm como objetivo proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a constituir hipóteses. Pode-se dizer que estas pesquisas têm como objetivo principal o aprimoramento de idéias ou a descoberta de intuições.

O autor destaca a possibilidade de um conhecimento mais profundo em relação ao projeto de pesquisa. Com isso, vamos explorar a partir de uma sequência didática as equações do primeiro grau e como ela está presente em conceitos de grupos e anéis. A partir desta seção, esclareceremos os fundamentos teóricos necessários para, em seguida, apresentar a proposta de sequência didática.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Este capítulo será dedicado ao estudo da Álgebra na Educação Básica, a distinção da Álgebra e o pensamento algébrico, como os documentos oficiais discorrem sobre o respectivo tema, qual a importância do ensino de Álgebra nos cursos de Licenciatura em Matemática e seus impactos na formação do estudante. A partir disso, chegaremos ao entendimento da importância de se estudar estruturas algébricas nos cursos de Licenciatura em Matemática.

2.1 Álgebra e o Pensamento Algébrico

A Álgebra deriva do termo Árabe *al-jabr*, visto pela primeira vez no livro "*Hisob al-jabr wa'l muqabalah*", escrito por Al-Khowârizmî, entre 813 d.C e 833 d.C. Segundo (Boyer; Merzbach, 2012), as possíveis traduções do livro são: "Livro da restauração e redução" ou "Livro da complementação e equilíbrio", assim a palavra "*al-jabr*" significa "restauração", ou seja, deslocamento do termo da equação ou manipulação dos termos e a palavra "*muqabalah*" representa "redução", isto é, anulação dos termos semelhantes.

Assim, diante do exposto, é possível perceber que o título do livro sugere uma das técnicas de resolução de equações, conforme podemos observar a seguir, levando em consideração a estrutura que utilizamos atualmente.

Considere a seguinte equação do primeiro grau e sua respectiva solução:

Exemplo 2.1.

$$\begin{aligned} x+7 &= 15 \\ x+7+(-7) &= 15+(-7) \\ x+(7-7) &= 15-8 \\ x+0 &= 8 \\ x &= 8. \end{aligned}$$

Observe que, para que o resultado fosse obtido, foi adicionado um valor correspondente ao oposto do 7 em ambos os membros da igualdade, com a intenção de cancelá-lo. Dessa forma, esse método é repetido até que encontremos a solução da equação ou o tão famoso x. Analisando esse processo, podemos compreender a resolução da equação, no sentido de entender o método pelo qual o procedimento foi executado.

Contudo, existem casos em que é necessário utilizar não apenas a operação inversa da adição, mas também a operação inversa da multiplicação, como podemos observar a seguir:

Exemplo 2.2.

$$
\begin{aligned}
2x+7 &= 15\\
2x+7+(-7) &= 15+(-7)\\
2x+(7-7) &= 15-7\\
2x+0 &= 8\\
2x &= 8\\
2x\cdot\frac{1}{2} &= 8\cdot\frac{1}{2}\\
1\cdot x &= 1\cdot 4\\
x &= 4.
\end{aligned}
$$

Observe que, além de utilizar o elemento inverso da adição e da multiplicação, foi de suma importância a existência e unicidade do elemento neutro, nas duas operações, 0 e 1, respectivamente. Dessa forma, o valor de x para que ambos os lados da equação sejam iguais será $x = 4$.

De modo geral, podemos definir uma estrutura algébrica como sendo as características e propriedades que um conjunto, com uma ou mais operações, possui. Sendo assim, é possível notar que as operações realizadas durante o processo do exemplo anterior possuem propriedades que podem ser verificadas em estruturas algébricas, como grupos (quando temos apenas uma operação) e anéis (quando temos as operações de adição e multiplicação), as quais serão abordadas detalhadamente ao longo deste trabalho.

Quando se tratam de técnicas e procedimentos para obter o resultado de uma determinada equação, podemos explorar o conceito de transformismo algébrico, que segundo (Aguiar; Coelho, 2018, p. 173), consiste no "processo de obtenção de expressões algébricas equivalentes entre si mediante o emprego de regras e propriedades válidas". Quanto a isso, a manipulação algébrica tem como intuito resolver problemas matemáticos. Dessa forma, ao analisarmos o exemplo anterior, podemos notar que para determinar o valor de x que satisfizesse a igualdade, utilizamos algumas regras no processo de resolução da equação. Contudo, é importante destacar que o ensino da Álgebra é caracterizado não apenas por regras e manipulações algébricas, mas também por ideias relacionadas à compreensão de conceitos algébricos.

Por meio desta prática, o estudante poderá desenvolver habilidades de pensamento algébrico ao começar a compreender a manipulação das operações, explorar os padrões e compreender os motivos pelos quais está executando aquele procedimento. Essas diretrizes visam aprimorar o desenvolvimento do pensamento, permitindo que o aluno resolva problemas de forma imediata com prática contínua. (Lins, 1992), argumenta que quando o estudante atribui significados para os objetos e para a linguagem algébrica, eles estão pensando algebricamente.

De acordo com (Blanton; Kaput, 2005, p. 413) o pensamento algébrico está caracterizado em quatro aspectos:

> o uso da aritmética como domínio da expressão e a formalização da generalização (aritmética generalizada); a generalização de padrões numéricos para descrever as relações funcionais (pensamento funcional); a modelação como um domínio para a expressão e formalização das generalizações; e a generalização sobre sistemas matemáticos abstratos do cálculo e das relações.

Em relação à primeira característica, podemos destacar as propriedades presentes nas operações de adição e multiplicação, por exemplo, a propriedade comutativa $a+b=b+a$. Ao analisar, percebe-se que para quaisquer valores de $a,b \in \mathbb{R}$, a propriedade é válida. Com isso, formalizamos uma ideia que se comutarmos a soma de dois valores reais quaisquer, o resultado não será alterado.

Desse modo, a mesma ideia ou propriedade pode ser utilizada em relação à quantidade entre dois objetos, por exemplo: considere duas caixas A e B contendo dois compartimentos cada. Na caixa A, no primeiro contém 2 maçãs e no segundo 3, então $A = 2+3$ maçãs. Por outro lado, na caixa B, no primeiro compartimento tem 3 maçãs e no segundo 2, então $B = 3+2$ maçãs. Com isso, podemos observar que, tanto na caixa A, quanto na B há um total de 5 maçãs. Dessa forma podemos concluir que $2+3=5=3+2$.

No que diz respeito ao pensamento funcional, que abrange a exploração de regularidades numéricas, temos como exemplo, a sequência representada por $(1,4,7,10,13,...)$. Observe que, a partir dos termos iniciais conseguimos determinar qualquer outro termo da sequência, desde que seja analisado que a diferença entre cada termo e o seu antecessor é sempre igual a 3. Deste modo, encontramos uma regra obedecida entre seus termos e com isso temos o que chamamos de progressão aritmética, que também pode ser representada como uma função, neste caso $f(x) = 3x-2$. Portanto, há o entendimento que existe um comportamento na sequência seguida a partir de um padrão. Essa sequência ilustra o desenvolvimento do pensamento funcional.

A terceira característica está relacionada com a modelagem matemática, a partir de conteúdos abstratos será possível utilizar situações cotidianas para interpretar e representar conteúdos matemáticos.Como por exemplo, o fluxo de caixa da cantina da escola: se o lanche custa R$ $2,50$, e quisermos modelar o custo total em relação ao número de lanches vendidos. Neste caso, temos a expressão $C(x) = 2,50x$, sendo $C(x)$ o custo total de x unidades vendidas de lanches. Com isso, a quarta característica envolve a generalização e operações com a utilização de objetos abstratos, que nesse sentido são a formalização da operação como, no último exemplo, $C(x) = 2,50x$.

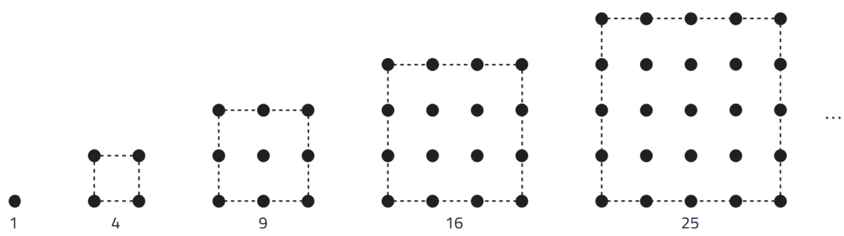
Com isso, a quarta característica envolve a generalização e operações com a utilização de objetos abstratos, que nesse sentido são a formalização da operação como, no último exemplo, $C(x) = 2,50x$.

Além do mais, baseado nas ideias de Kaput (2008), citado por (Barbosa; Vale, 2019, p.

401), que a base do pensamento algébrico está fundamentada em dois aspectos essenciais: "(1) formular e expressar generalizações de modos gradualmente mais formais e convencionais; e (2) raciocinar com representações simbólicas, incluindo a sua manipulação".

O primeiro aspecto refere-se a desenvolver e estabelecer uma concepção a partir do problema proposto. Inicialmente, as ideias serão menos formais, mas com o tempo, elas se tornarão mais estruturadas e poderão ser aprimoradas, tornando-se mais formais. Diante disso, chegaremos a conclusões que contribuam para o processo de formalização e generalização do problema, conforme a figura a seguir:

Figura 1 – Padrão de sequência quadrangular

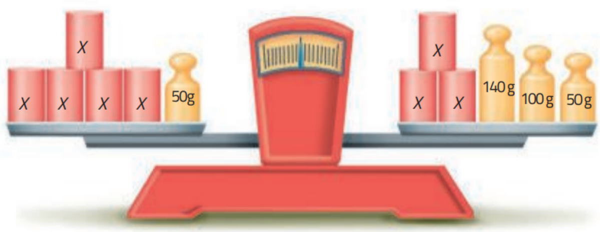


Fonte: Dante (2018, p. 103)

Neste caso, a sequência acima é formada por $(1,4,9,16,25,...)$. Observe que, para compreender o padrão da sequência é necessário que os alunos tenham conhecimento prévio sobre a noção de quadrado perfeito. Note que a sequência pode ser escrita como $(1^2,2^2,3^2,4^2,5^2,...)$. Ao interpretar essa noção, eles estarão aptos à habilidade de generalização do padrão presente na sequência. Dessa forma, para obter qualquer termo dessa sequência, a expressão algébrica é dada por $f(x)=x^2$.

Em relação a manipulação de símbolos, letras, elementos ou representações abstratas para expressar informações relacionadas a um problema específico, referimos à forma como o indivíduo utiliza e compreende as regras e símbolos. Verifique a figura a seguir:

Figura 2 – Manipulação de pesos na balança de dois pratos



Fonte: Dante (2018, p. 116)

Observe que, para que a balança esteja equilibrada, ambos os lados devem ter o mesmo valor. Portanto, qual deve ser o valor de x para que a balança fique equilibrada? Antes de tudo podemos observar que essa manipulação acontece após o entendimento das ideias intuitivas sobre: adição, multiplicação e igualdade. Ao compreender essas noções, os alunos estarão aptos a entender a manipulação dos objetos. Durante a exploração da expressão, é possível perceber que podemos eliminar os termos iguais de ambos os lados da igualdade, sem alterar o valor, simplificando assim a expressão e manipulando os objetos de maneira a alcançar o valor de x.

Dessa forma, o lado esquerdo é igual ao lado direito. Organizando os dados da balança, temos:

$$x+x+x+x+x+50 = x+x+x+140+100+50.$$

Note que, utilizando:

$$5x+50 = 3x+240+50,$$

podemos eliminar o peso $50g$ de ambos os lados. Após isso, teremos:

$$5x = 3x+240,$$

mantendo assim o equilíbrio na balança. Além disso, ao manipular os valores contidos na balança, podemos eliminar também o $3x$ de ambos os lados, uma vez que

$$5x = 2x+3x,$$

restando apenas

$$2x = 240.$$

Esse é o valor simplificado após a manipulação algébrica da expressão presente na balança. Assim, conseguimos descobrir qual é o valor de x necessário para manter a balança equilibrada, que é igual a 120 g.

Segundo (Araujo, 2008, p. 341), as "atividades como procurar padrões em sequências, procurar a regularidade de um fenômeno, trabalhos com proporcionalidades e generalizações podem auxiliar o desenvolvimento do pensamento algébrico." Diante do exposto, nota-se que os exemplos acima são propostas que auxiliam na construção do desenvolvimento do pensamento algébrico, com isso, os estudantes terão habilidade de generalizar problemas mais abstratos.

Conforme (Squalli, 2000), a Álgebra e o pensamento algébrico são dois lados da mesma moeda, essas duas temáticas estão intrinsecamente ligadas e não podem ser realizadas de forma isolada, já que trabalham em conjunto para uma compreensão completa. No que diz respeito ao pensamento algébrico, é um conjunto de habilidades, que a partir dele permite desenvolver a compreensão de conceitos relacionados à Álgebra.

2.2 Como os documentos oficiais discutem a Álgebra

O ensino de Matemática no Brasil, ao longo dos anos, foi conduzido por documentos oficiais que tinham como objetivo orientar e normatizar os currículos escolares. A princípio, a Constituição Federal de 1988 traz em seus artigos a necessidade de haver conteúdos mínimos para o Ensino Fundamental, assegurando assim a formação básica dos cidadãos, respeitando os valores culturais, artísticos, nacionais e regionais. Neste sentido, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB 9394/96) define os princípios, diretrizes, estrutura e organização do ensino, abrangendo todas as suas esferas e setores, garantindo as necessidades de cada localidade, região e cultura.

Além desses, surgiram novas diretrizes como: Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais para a Educação Básica (2010), Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Infantil (2010), Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa (2012), Pacto Nacional de Fortalecimento do Ensino Médio (2013), Plano Nacional de Educação (2014) e Programa de Apoio à Implementação da Base Nacional Comum Curricular (2018). Nos tópicos seguintes, trataremos em específico os Parâmetros Curriculares de Matemática e a BNCC.

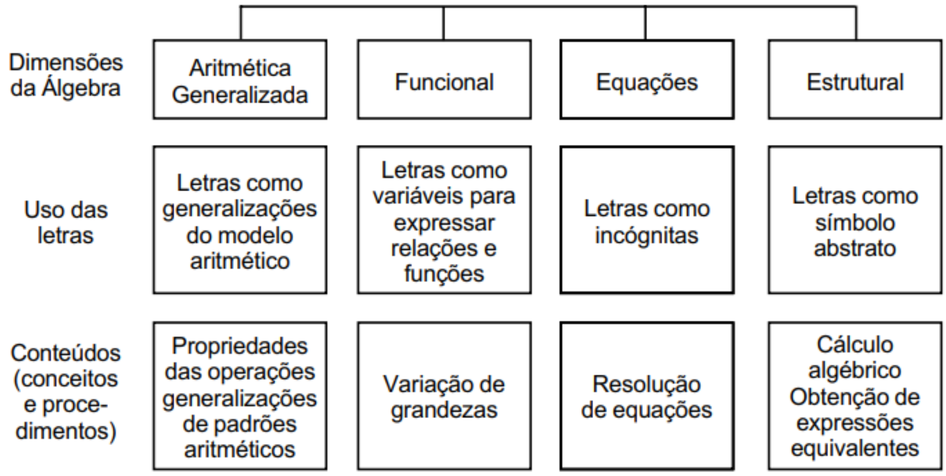
Em consonância com a LDB, nos anos de 1997 e 1998 foram consolidados os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) dos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental, com a proposta de promover uma discussão educacional em que haja a participação da escola, pais, governo e sociedade. Da mesma forma, os PCN's do Ensino Médio tinham como objetivo reformular os currículos e orientar os professores em novas abordagens metodológicas. Nota-se que o surgimento dessas novas diretrizes não tem a intenção de substituir os documentos existentes, mas sim de aprimorar e melhorar a qualidade de ensino, renovando-as com novas ideias e propostas.

Em relação à Álgebra, os PCN's de Matemática destacam que, na unidade temática de números e operações, podem ser desenvolvidas, nas séries iniciais, alguns aspectos algébricos, enquanto a Álgebra mais aprofundada, que são os conteúdos mais complexos, serão abordados a partir das séries finais do Ensino Fundamental, do seguinte modo:

> Pela exploração de situações-problemas, o aluno reconhecerá diferentes funções da Álgebra (generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar, resolver problemas aritmeticamente difíceis), representará problemas por meio de equações e inequações (diferenciando parâmetros, variáveis, incógnitas, tomando contato com fórmulas), compreenderá a sintaxe (regras para resolução) de uma equação. (Brasil, 1998, p. 50-51)

Nesse sentido, os PCN's defendem que para garantir o desenvolvimento do pensamento algébrico, o aluno precisa compreender as diferentes interpretações da Álgebra escolar, tais como:

Figura 3 – Álgebra no Ensino Fundamental



Fonte: Brasil (1998, p. 116)

Assim, importante ressaltar que, não necessariamente o professor precisa trabalhar todas essas características simultaneamente, mas utilizar as que de fato forem necessárias para que os alunos compreendam as noções algébricas, pela construção de relações em observação de regularidades em tabelas e gráficos, com isso fazendo com que a aprendizagem seja proveitosa, ou seja, não "[...] desenvolver o estudo da Álgebra apenas enfatizando as manipulações com expressões e equações de uma forma meramente mecânica", conforme (Brasil, 1998, p. 116).

Nesse sentido, é possível desenvolver conceitos algébricos paulatinamente, fazendo com que os alunos reconheçam diferentes funções, a partir de problemas práticos, explorando a modelagem matemática de forma que utilizem a generalização algébrica.

No entanto, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) teve sua primeira versão disponibilizada para discussão do documento preliminar em 2015. A partir disso, resultou na 2° versão do documento para uma nova discussão em 2016. Após isso surgiu a 3° versão, mas em 2017 chegou a versão final do documento e foi homologada pelo Ministro de Educação, por meio da portaria n° 1570, de 20 de dezembro de 2017. Já no ano de 2018 ocorreu uma discussão com os educadores do Brasil, para definir o documento regente da Educação Infantil e do Ensino Fundamental, com o objetivo de entender a implementação e os impactos na educação. Em 2018 foi discutida e homologada a BNCC para a etapa do Ensino Médio. A portaria MEC nº 521 de 2021 constituiu o cronograma nacional do novo ensino médio que ficará vigente até o ano de 2024.

No que diz respeito à Álgebra, a BNCC defende que:

> A unidade temática **Álgebra**, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. (Brasil, 2018, p. 270).

Diante disso, o pensamento algébrico é essencial durante esse processo, pois, a partir dele que o aluno terá a capacidade de compreender a Álgebra Abstrata vista nos anos finais da Educação Básica. Nesse contexto, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) abrange os objetos de conhecimento que podem ser desenvolvidos nos anos iniciais, como padrões de figuras, padrões numéricos, sequências recursivas e regularidade de sequências, relação e propriedade de igualdade e as noções de equivalência, relações entre as operações básicas fundamentais.

A partir dos anos finais, serão introduzidas as linguagens algébricas, equivalência das expressões algébricas, as equações polinomiais de primeiro grau, bem como as equações polinomiais de segundo grau e suas respectivas representações, além das variações e proporções entre as grandezas. Sendo assim, sem ocorrer interrupção no desenvolvimento do pensamento algébrico, uma vez que os estudantes assimilam tais conceitos, de maneira que compreendem verdadeiramente o sentido pelo qual ocorre a manipulação.

A BNCC (2018), na etapa do Ensino Médio, propõe que na área da Matemática e suas tecnologias seja ampliado, fortalecido e explorado o aprendizado focado nos conteúdos vistos no Ensino Fundamental. Durante essa etapa esses conceitos são apresentados de maneira mais formal e profunda. Sendo assim, asseguram que os estudantes tenham uma perspectiva mais abrangente da Matemática, que de certa forma consigam interrelacionar os conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental com os conteúdos atuais, a fim de aprofundar e aprimorar seus conhecimentos, buscando levar os conceitos matemáticos para aplicações do cotidiano.

Portanto, considerando o que foi apresentado, os documentos oficiais concordam que a Álgebra seja ensinada gradualmente e desde as séries iniciais, com o objetivo de desenvolver o pensamento algébrico, preparando o estudante como cidadão crítico e reflexivo, não apenas na Matemática, mas para demais disciplinas e tomadas de decisões na vida prática.

2.3 A importância do ensino de Álgebra nos cursos de Licenciatura em Matemática

As dificuldades enfrentadas em relação aos conteúdos algébricos acompanham o aluno em sua jornada, desde que essa dificuldade não seja suprida durante sua formação. Dessa forma, Cury, Ribeiro e Müller chamam atenção para o fato que,

> as dificuldades apresentadas pelos docentes, em especial em conceitos como o de equação, que são ensinados na Educação Básica, constituem-se em entraves para os cursos de Licenciatura em Matemática, pois tais dificuldades podem acarretar consequentes problemas na compreensão de Matemática por parte de seus alunos. (Cury; Ribeiro; Müller, 2011, p. 143)

No que diz respeito aos argumentos supracitados, destaca-se a dificuldade do professor em relação a conceitos, especialmente em equações que representam obstáculos para os cursos de licenciatura, especificamente durante as aulas de conteúdos mais específicos nos quais o aluno pode ter dificuldade por não compreender os fundamentos essenciais para uma formação completa. Em outras palavras, quando o docente, durante sua formação, enfrenta dificuldades em compreender uma determinada área do conhecimento ou quando, até mesmo, seu ensino na Educação Básica foi precário, isso pode refletir no processo de ensino e aprendizagem do aluno, tornando-o um desafio, uma vez que o docente apresenta dificuldades na área.

Assim, evidencia-se a necessidade da formação continuada de professores em Matemática, com o objetivo de aprofundar em conceitos específicos da área, proporcionando uma compreensão mais profunda em relação ao tema. Isso contribui para o aprimoramento de seus conhecimentos e para a ampliação das possibilidades de ensino, fator primordial para que o professor reconheça as dificuldades enfrentadas pelos alunos. Portanto, no ensino de Álgebra não é diferente, as dificuldades relacionadas aos conteúdos algébricos são gravíssimas, principalmente em relação a manipulação algébrica. Com isso os alunos levam esse problema para séries seguintes, dificultando seu entendimento em conteúdos posteriores. Segundo (Lellis; Imenes, 1994, p. 8)

> Professores e alunos sofrem com a álgebra da 7ª série. Uns tentando explicar outros tentando engolir técnica de cálculo com letras que, quase sempre, são desprovidas de significados para uns e outros. Mesmo nas tais escolas de excelência, onde aparentemente os alunos da 7ª série dominam todas as técnicas, esse esforço tem pouco resultado.

Nesse sentido, os autores ressaltam a dificuldade tanto dos alunos em compreender os conceitos algébricos quanto dos professores em conduzir esses conhecimentos aos estudantes. Com isso estudar Álgebra não é apenas decorar técnicas de cálculos algébricos, as letras e os símbolos são delicados, principalmente na resolução de sentenças algébricas. Dessa forma, os PCN's destacam que muitos alunos pensam que as letras presentes em uma sentença algébrica representam um valor a ser descoberto (incógnita). Porém, as letras além de representarem incógnitas, elas também representam variáveis, que por sua vez, são uma quantidade que pode assumir valores distintos. Com isso, é importante a utilização de situações-problemas para o estudo de linguagens algébricas. Segundo PCN's,

> As atividades algébricas propostas no ensino fundamental devem possibilitar que os alunos construam seu conhecimento a partir de situações-problema que confiram significados à linguagem, aos conceitos e procedimentos referentes a esse tema, favorecendo o avanço do aluno quanto às diferentes interpretações das letras. Os contextos dos problemas deverão ser diversificados para que eles tenham oportunidade de construir a sintaxe das representações algébricas, traduzir as situações por meio de equações (ao identificar parâmetros, incógnitas, variáveis), e construir as regras para resolução de equações. (Brasil, 1998, p. 121-122)

Perante ao exposto, o conhecimento em relação aos conteúdos algébricos nos cursos de Licenciatura é importante para formar professores capacitados e preparados para lidar com essas dificuldades presentes nos alunos. Dessa forma, (Araujo, 2008, p. 342) defende que "o ensino da Álgebra nas escolas de Educação Básica deve ser uma das preocupações dos cursos de licenciatura em Matemática na busca de uma melhor formação aos professores." Ao dar ênfase ao ensino da Álgebra nos debates dos cursos de Licenciatura em Matemática, possibilita-se que os futuros docentes desenvolvam ferramentas necessárias para que tenham um olhar crítico em relação essa dificuldade presente nos alunos.

Perante os argumentos que foram desenvolvidos, nota-se a importância da compreensão das relações dos conteúdos vistos no Ensino Superior com os da Educação Básica. Sendo assim, no capítulo posterior, veremos alguns dos conteúdos desenvolvidos em uma disciplina de Álgebra em cursos de Licenciaturas que contribuirão para a relação com conteúdos da Educação Básica, objeto de estudo.

3 ESTRUTURAS ALGÉBRICAS

De modo não formal, podemos dizer que uma estrutura algébrica é qualquer estrutura matemática na qual se tem um conjunto de objetos com uma ou duas operações definidas sobre este conjunto e que satisfazem certas propriedades. Neste capítulo, estudaremos as principais estruturas algébricas vistas em um curso de graduação em Matemática, de modo que possamos correlacioná-las com a Álgebra vista na Educação Básica nos tópicos seguintes. Além disso, destacaremos as principais propriedades de grupos e anéis e veremos suas aplicações em exemplos.

Na Educação Básica, estudamos as operações de adição e multiplicação, simbolizadas por $+$ e $\cdot$, respectivamente, definidas nos conjuntos numéricos: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}$ e $\mathbb{R}$.

Por exemplo, estudamos tais operações no conjunto dos números inteiros, ou seja,

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}.$$

Essas operações dispõem de algumas propriedades, descritas a seguir.

A seguir, descrevemos alguns axiomas referentes à adição:

1. **Associativa:** Para todos $a, b, c \in \mathbb{Z}$, tem-se que
$$(a+b)+c = a+(b+c).$$
2. **Elemento Neutro:** Existe um único elemento inteiro, denominado neutro, que indicaremos por $0 \in \mathbb{Z}$, tal que
$$a+0 = a,$$
para todo $a \in \mathbb{Z}$.
3. **Elemento Oposto:** Para cada $a \in \mathbb{Z}$ existe um único elemento que chamaremos de oposto de a e indicaremos por $-a$, tal que
$$a+(-a) = 0.$$
4. **Comutativa:** Para todos $a, b \in \mathbb{Z}$ tem-se que
$$a+b = b+a.$$

Agora, podemos explicitar os axiomas da multiplicação.

1. **Associativa:** Para toda terna a, b, c de inteiros, tem-se que
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

2. **Elemento Neutro:** Existe um único elemento inteiro diferente de zero, denominado um, que indicaremos por $1 \in \mathbb{Z}$, tal que
$$1 \cdot a = a,$$
para todo $a \in \mathbb{Z}$.

3. **Comutativa:** Para todos $a, b \in \mathbb{Z}$, tem-se que
$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Esses axiomas, que são estudados na Educação Básica como propriedades, para estas duas operações (adição e multiplicação) em $\mathbb{Z}$, estão intimamente relacionados com o conceito de grupos, como veremos na próxima seção.

3.1 Grupos

A seguir, será definido o conceito de operação binária, fundamental para o entendimento do conceito acerca de grupos.

Definição 3.1. Seja G um conjunto não vazio. Uma operação binária definida em G é uma função

$$\begin{array}{rcl} * : G \times G & \longrightarrow & G \\ (a,b) & \longmapsto & a * b. \end{array}$$

Ou seja, para cada par ordenado (a,b) de $G \times G$ corresponde, pela operação $*$, um único elemento de G, que se designa por $a * b$.

Então, podemos observar que todas as vezes que operamos dois elementos de um mesmo conjunto, onde o resultado ainda pertence a este conjunto, obtemos uma operação binária.

Observação 3.1. As operações aritméticas básicas da Matemática: adição, subtração, multiplicação e divisão, são exemplos de operações binárias em $\mathbb{R}$.

Definição 3.2. Sejam G um conjunto não vazio e $* : G \times G \to G$ uma operação binária qualquer. Dizemos que G, com a operação $*$, é um grupo, e indicamos por $(G, *)$, se as seguintes propriedades são satisfeitas:

1. A operação $*$ é associativa, ou seja,
$$(a * b) * c = a * (b * c),$$
para todos a, b, $c \in G$.

2. Existe elemento neutro para $*$, ou seja, existe $e \in G$ tal que

$$a * e = e * a = a$$

para todo a em G.

3. Todo elemento em G é invertível em relação à operação $*$, ou seja, para todo $a \in G$, existe $b \in G$ tal que
$$a * b = b * a = e.$$

Em outras palavras, um grupo é um conjunto com uma operação e que deve satisfazer três propriedades fundamentais: associatividade, existência do elemento neutro e existência do elemento inverso.

Podemos analisar que a definição dessa estrutura algébrica é bem abrangente, e isto significa que qualquer conjunto que, com uma operação, satisfaça essas três propriedades, recebe esse nome especial.

Observe que está valendo o princípio original do pensamento algébrico, que é reconhecer padrões para que, posteriormente, possam ser generalizados. Isto é feito de diversas maneiras, seja por uma fórmula ou por uma definição, como a de grupos.

Voltando ao nosso conjunto inicial, os inteiros, vemos que, com a operação de adição, ele possui uma estrutura de grupo. De fato,

1. A propriedade da associatividade é válida para adição, pois para todos $a, b, c \in \mathbb{Z}$, temos que:
$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

2. Em $\mathbb{Z}$, com a operação de adição, existe o elemento neutro, a saber o número 0. De fato, para todo $a \in \mathbb{Z}$, temos que:
$$a + 0 = 0 + a = a.$$

3. Também existe o elemento oposto ou inverso, pois para todo $a \in \mathbb{Z}$, temos que:
$$a + (-a) \ = \ (-a) + a \ = \ 0.$$

   Como resultado do elemento neutro da operação, temos que o oposto de a é $-a$.

No entanto, o mesmo não ocorre quando a operação é a de multiplicação. De fato, sabemos que o elemento 2 pertence ao conjunto dos números inteiros, ou seja, $2 \in \mathbb{Z}$. Com efeito, o seu elemento inverso é $\frac{1}{2}$, que sabemos não pertencer ao conjunto dos números inteiros, isto é, $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$. Em geral, se $a \in \mathbb{Z}$, não necessariamente $\frac{1}{a} \in \mathbb{Z}$, ou seja, a existência do inverso não vale para todos os elementos desse conjunto, isso é válido apenas para 1 e -1.

Observação 3.2. A propriedade do elemento oposto para a operação de adição auxilia na definição de subtração, porque para todos $a, b \in \mathbb{Z}$, temos que $-a$ e $-b$ também pertencem a esse conjunto. Dado que a operação definida é binária, o resultado de $a + (-b)$ pertence a $\mathbb{Z}$. Logo, podemos definir a subtração como $a - b = a + (-b)$.

Vejamos mais alguns exemplos.

Exemplo 3.1. Os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, munidos da operação de adição, são grupos conhecidos como grupos aditivos.

Exemplo 3.2. O conjunto $\mathbb{N}$ munido da operação de adição não é um grupo, pois não satisfaz a terceira propriedade da Definição 3.2. De fato, $2 \in \mathbb{N}$, por outro lado $-2 \notin \mathbb{N}$.

Exemplo 3.3. $(\mathbb{Q}, \cdot)$ e $(\mathbb{R}, \cdot)$ não são grupos. De fato, o elemento 0, por exemplo, não é inverso de nenhum elemento dos conjuntos citados. Nestes casos, para estudarmos a estrutura supracitada, na operação de multiplicação, retiramos o zero destes conjuntos. Logo, constuma-se trabalhar com $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ e $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

Observação 3.3. O conjunto dos Números Naturais com operação convencional de adição ($\mathbb{N}$,+) é definido como semigrupo [1] ou um monoide [2].

Exemplo 3.4. $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ é um grupo, pois o produto de dois números racionais não nulos resulta em um número racional não nulo. Além disso, temos que:

1. A propriedade associativa é válida para produto, pois para todos $a, b, c \in \mathbb{Q}^*$, temos que:

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

2. No conjunto $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ existe elemento neutro $1 \in \mathbb{Q}^*$, pois para todo $a \in \mathbb{Q}^*$, temos que:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

3. Também existe o elemento inverso, pois, para todo $a \in \mathbb{Q}^*$, tem-se que $a^{-1} = \dfrac{1}{a} \in \mathbb{Q}^*$, com

$$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1.$$

Como o produto acima resulta no elemento neutro da operação, temos que o inverso de a é $\dfrac{1}{a}$. Este exemplo é um grupo conhecido como grupo multiplicativo.

Exemplo 3.5. $(\mathbb{I}, +)$ e $(\mathbb{I}, \cdot)$, o conjunto dos números irracionais com as operações de adição e multiplicação não são grupos, pois as operações de dois números irracionais podem resultar em um número racional ou irracional e, portanto, o conjunto não é fechado. Por exemplo, se

[1] Satisfaz apenas a propriedade associativa

[2] Satisfaz as propriedades associativa e elemento neutro

considerarmos dois números irracionais, como $1-\pi$ e π, a sua soma resulta em 1, que é racional. Já somando π com ele mesmo, obtemos 2π que é irracional. De modo semelhante, para o produto, sabemos que se multiplicarmos $\sqrt{2}$ com $\sqrt{3}$, obtemos $\sqrt{6}$ que é irracional, mas o produto de $\sqrt{2}$ com ele mesmo, resulta em 2, que é racional.

Definição 3.3. Um grupo G é dito comutativo ou abeliano, se satisfizer a propriedade $a*b=b*a$, para todos a e b em G. Os conjuntos dos inteiros, racionais e reais são exemplos de grupos comutativos, com a operação de adição.

Por exemplo:

1. $(\mathbb{Z},+),(\mathbb{Q},+),(\mathbb{R},+)$ ou $(\mathbb{C},+)$, são grupos que satisfazem a comutatividade, portanto são grupos abelianos:
$$a+b=b+a, \forall a,b\in G.$$
2. $(\mathbb{Z}^*,\cdot),(\mathbb{Q}^*,\cdot)$ ou $(\mathbb{R}^*,\cdot)$, são grupos que satisfazem a comutatividade, portanto são grupos abelianos,
$$a\cdot b=b\cdot a, \forall a,b\in G.$$

A definição de grupo não se restringe a conjuntos numéricos, na literatura podemos ver diversos conjuntos não numéricos que com as operações apropriadas, formam uma estrutura de grupo. Vejamos um exemplo.

Exemplo 3.6. O conjunto $G=M_{m\times n}(\mathbb{R})$ das matrizes sobre $\mathbb{R}$ com m linhas n colunas munido com a operação usual de adição é um grupo. De fato, sejam $A,B,C\in G$, tais que $A=(a_{ij}),B=(b_{ij})$ e $C=(c_{ij})$, com $i=1,2,\ldots,m$ e $j=1,2,\ldots,n$. Assim, temos:

1. **Associatividade:** Para todos $A,B,C\in G$,
$$\begin{aligned}(A+B)+C = ((a+b)+c)_{ij} &= (a+b)_{ij}+(c_{ij})\\ &= ((a_{ij}+b_{ij})+c_{ij})\\ &= (a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij}))\\ &= (a_{ij})+(b+c)_{ij}\\ &= (a+(b+c))_{ij} = A+(B+C).\end{aligned}$$
2. **Comutatividade**: Para todos $A,B\in G$,
$$(A+B) = (a+b)_{ij} = (a_{ij}+b_{ij}) = (b_{ij})+(a_{ij}) = (b+a)_{ij} = (B+A).$$
3. **Existência do elemento neutro:** Para todo $A\in G$, existe $0_{m\times n}\in G$ em que todos os seus elementos são nulos, ou seja, $0_{ij}=0\ \forall i=1,2,\ldots,m$ e $j=1,2,\ldots,n$. Essa é a denominada matriz nula, tal que:
$$(A+0) = (a+0)_{ij} = (a_{ij}+0_{ij}) = (0_{ij}+a_{ij}) = (a_{ij}) = A.$$

4. **Existência do oposto:** Para todo $A \in G$, existe $-A \in G$ tal que

$$A+(-A) \;=\; (a+(-a))_{ij} \;=\; (a_{ij}+(-a_{ij})) \;=\; 0_{ij} \;=\; 0.$$

Logo, G satisfaz todas as propriedades de grupo comutativo.

No que se refere a multiplicação de matrizes, a operação é realizada diferente da adição. A multiplicação é feita linha por coluna, e vejamos um exemplo a seguir:

Exemplo 3.7. Seja $(GL(n,\mathbb{R}),\cdot)$ o conjunto de matrizes inversíveis [3] de ordem n. Além disso, sejam $A,B,C \in GL(n,\mathbb{R})$, tais que $A=(a_{ij}), B=(b_{jk})$ e $C=(c_{kl})$, com $i=1,2,\ldots,n,\ j=1,2,\ldots,n\ k=1,2,\ldots,n$ e $l=1,2,\ldots,n$, são satisfeita as seguintes propriedades:

1. **Associatividade**:

   $(A\cdot B)\cdot C = \sum_{k=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk})\cdot c_{kl} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot(\sum_{k=1}^{n} b_{jk}c_{kl}) = A\cdot(B\cdot C)$;

2. **Existência do elemento neutro**: Existe a matriz identidade I_n, que na operação de multiplicação é o elemento neutro. Por exemplo:

   Sejam

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

   e

   $$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Então, temos que $A\cdot I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

   Observe que ao realizar o produto com qualquer matriz, a matriz identidade será o elemento neutro da operação. Com isso, generalizamos a matriz identidade como

   $$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix};$$

3. **Existência do inverso**: Para todo $M \in GL$, existe $M^{-1} \in GL$, tal que

   $$M\cdot M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

[3] São matrizes quadradas, em que o determinante é diferente de zero.

Por exemplo: Sejam

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

e

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Então, temos que $C \cdot C^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Assim, o produto de matrizes é um grupo multiplicativo. Em geral não vale $AB \neq BA$ (comutatividade), conforme o exemplo a seguir:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \text{ portanto } AB \neq BA.$$

A seguir veremos outros exemplos de grupos e sua aplicação na vida real.

Definição 3.4. (Congruência) Sejam a, b dois inteiros quaisquer e seja m um inteiro positivo. Diz-se que a é congruente a b módulo m, se e somente se, m divide $a - b$, ou seja,

$$a \equiv b \ (mod\ m) \iff m|(a-b).$$

Observação 3.4. O inteiro m é chamado de módulo da congruência.

Em outros termos, a é congruente a b módulo m se, e somente se, existe um inteiro k, tal que $a - b = km$, ou seja, $a \equiv b \ (mod\ m) \iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid a - b = km$.

Por exemplo,

1. $3 \equiv 24 \ (mod\ 7)$, pois $7|(3-24)$;
2. $-31 \equiv 11 \ (mod\ 6)$, pois $6|(-31-11)$;
3. $-15 \equiv -63 \ (mod\ 8)$, pois $8|(-15-(-63))$.

No caso em que m não divide a diferença $a - b$, diz-se que a é incongruente a b módulo m. Utilizamos a segunte notação: $a \not\equiv b (mod\ m)$.

Por exemplo,

1. $25 \not\equiv 12\ (mod\ 7)$, pois $7 \nmid (25-12)$;
2. $-21 \not\equiv 10\ (mod\ 5)$, pois $5 \nmid (-21-10)$;
3. $16 \not\equiv 9\ (mod\ 4)$, pois $4 \nmid (16-9)$.

Esta definição tem várias aplicações práticas, que utilizamos no cotidiano, como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 3.8. Os relógios trabalham com módulo 12 ou 24 para as horas e módulo 60 para os minutos e segundos. Por exemplo, se são 17:00 da tarde, por qual motivo marcamos 17h como cinco horas? O relógio dá uma volta completa mais cinco horas, o que significa que 17 dividido por 12 deixa resto 5. Matematicamente, temos $5 \equiv 17(mod\ 12)$, pois $12|(5-17)$.

Figura 4 – Relógio

Fonte: Autoria própria

Exemplo 3.9. Se hoje é sábado, daqui a 33 dias é qual dia na semana? Como uma semana tem 7 dias, utilizaremos congruência módulo 7, para resolver o problema. Assim, fazendo 33 dividido por 7, obtemos quociente 4 e resto 5. Como o quinto dia da semana a partir de sábado é a quinta-feira, daqui a 33 dias estaremos numa quinta-feira. Matematicamente, temos que $5 \equiv 33(mod\ 7)$, pois $7|(5-33)$.

O conjunto contendo todos os possíveis restos de uma divisão por n é chamado de classe dos restos e denotamos por $\mathbb{Z}_n$. Por sua vez, é um exemplo de grupo não numérico que veremos a seguir.

1. O conjunto $\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{n-1}\}$ de classes residuais módulo n com operação da adição
$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$$
é um grupo aditivo abeliano, com elemento neutro $\overline{0}$ e inverso de $\overline{a}$ sendo $\overline{n-a}$. Por exemplo, sendo o conjunto $\mathbb{Z}_6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$, temos que:

Tabela 1 – Tábua ($\mathbb{Z}_6$,+)

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$

Observe que o elemento neutro é $\overline{0}$ e o inverso de $\overline{5}$ é $\overline{1}$, $\overline{1}$ é $\overline{5}$, $\overline{4}$ é $\overline{2}$, $\overline{2}$ é $\overline{4}$ e o $\overline{3}$ é $\overline{3}$.

2. O conjunto $\mathbb{U}_n = \{\overline{a} \in \mathbb{Z}_n, mdc(a,n) = 1\}$ dos elementos invertíveis de $\mathbb{Z}_n$ com operação

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b}$$

é um grupo multiplicativo abeliano, com elemento neutro $\overline{1}$ e o inverso de $\overline{a} \in U(n)$ sendo o elemento $\overline{b}$ tal que $\overline{a \cdot b} = \overline{1}$.

Por exemplo, sendo o conjunto $\mathbb{U}_7 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}\}$, temos que:

Tabela 2 – Tábua ($\mathbb{U}_7$, $\cdot$)

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{5}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$

Note que o elemento neutro é $\overline{1}$ e o inverso de $\overline{1}$ é $\overline{1}$, $\overline{2}$ é $\overline{4}$, $\overline{4}$ é $\overline{2}$, $\overline{3}$ é $\overline{5}$ e o $\overline{5}$ é $\overline{3}$.

3.1.1 Propriedades imediatas

Durante o ensino básico, vimos que o número 0 é o elemento neutro da operação de adição nos conjuntos numéricos estudados, pois quando realizamos a soma de qualquer número com o 0, resulta neste número somado. Do mesmo modo, o número 1 é o elemento neutro da operação de multiplicação. Observe que esses elementos neutros, quando existem, são únicos de cada operação, assim como o elemento inverso de cada elemento é único, conforme veremos a seguir, bem como as demais propriedades importantes para o desenvolvimento do trabalho.

Sejam $(G, *)$ um grupo e $a, b, c \in G$. Temos que valem:

1. Unicidade do elemento neutro:

Demonstração. Suponha que e e e' são elementos neutros do grupo, então

$$a * e = a * e' = a, \forall a \in G.$$

Em particular, $e' = e * e' = e$. □

2. Unicidade do elemento inverso:

   Demonstração. Suponha b e b' inversos de a, com $a, b, b' \in G$. Dado $a * b = e$ e $a * b' = e$, então

$$a * b = a * b'$$

$$a^{-1} * a * b = a^{-1} * a * b'$$

$$b = b'.$$

□

3. No grupo, a equação $a * x = b$ tem conjunto solução unitário dado por $x = a^{-1} * b$:

   Demonstração. Suponha $a, b, x \in G$, com $a^{-1} * a = e$. Então

$$\begin{aligned} a * x &= b \\ a^{-1} * a * x &= a^{-1} * b \\ e * x &= a^{-1} * b \\ x &= a^{-1} * b. \end{aligned}$$

□

4. $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$:

   Demonstração. Supondo que $a, b \in G$, então existem $b^{-1}, a^{-1} \in G$, com $b * b^{-1} = e$ e $a * a^{-1} = e$. Sendo assim,

$$\begin{aligned} (ab) * (b^{-1}a^{-1}) &= (ab) * (b^{-1}a^{-1}) \\ &= a * (bb^{-1}) * a^{-1} \\ &= a * e * a^{-1} \\ &= a * a^{-1} \\ &= e. \end{aligned}$$

□

5. **(Lei do cancelamento)**. Se $a * b = a * c$, então $b = c$.

Demonstração. Operando com a^{-1} à esquerda, em ambos os lados da igualdade, temos que:

$$\begin{aligned} a*b &= a*c \\ a^{-1}*a*b &= a^{-1}*a*c \\ e*b &= e*c \\ b &= c. \end{aligned}$$

□

Vimos no capítulo anterior, que tais propriedades foram de extrema relevância para resolução de equações, conforme os Exemplos 2.1 e 2.2. Por exemplo, ao abordar a equação da forma $ax+b=0$, para $a=1$, valem as propriedades de um grupo aditivo, ou seja, teremos apenas uma operação. E para $a \neq -1$ e $a \neq 1$ valem as propriedades de um anel, ou seja teremos duas operações. Essa abordagem será desenvolvida nos tópicos seguintes.

Os problemas algébricos mais antigos foram encontrados no Papiro de Ahmes (Rhind), escrito cerca de 1650 a.C., no Egito. Este papiro possui 85 problemas, envolvendo fração, aritmética, álgebra, cálculo de área, volume, entre outros. Nos problemas algébricos, as incógnitas eram chamadas de *aha*, que atualmente representamos por *x*. Para resolver tais problemas, era utilizado o "método da falsa posição". Essa técnica de resolução consistia na realização de tentativas e erros, para obtenção do resultado que iria satisfazer a equação.

Figura 5 – Papiro de Rhind

Fonte: <http://www.fisica-interessante.com/image-files/egito-rhind1.jpg>

Agora, observe a seguir o exemplo do problema 27 do Papiro de Rhind:

Exemplo 3.10. Uma quantidade e um quinto desta dá 21. Qual é a quantidade?

$$x+\frac{x}{5}=21.$$

Primeiro precisaremos atribuir um valor falso para x. Importante destacar que quando o problema tiver uma parte fracionária podemos, pensar esse número falso como sendo o valor que está no denominador da fração, por exemplo $x = 5$. Essa escolha tem como objetivo transformar a parte fracionária em um número inteiro, facilitando assim a resolução da equação. Assim temos

$$5+\frac{5}{5}=6.$$

Em seguida, podemos utilizar a proporcionalidade para conseguir determinar o valor verdadeiro de x. Assim, o valor falso atribuído a essa incógnita estará em razão do resultado falso e o valor verdadeiro de x estará em razão do resultado verdadeiro, como podemos observar a seguir:

$$\frac{5}{6}=\frac{x}{21}.$$

Resolvendo, obtemos

$$6x = 21\cdot 5 \Rightarrow 6x = 105 \Rightarrow x = \frac{105}{6} \Rightarrow x = \frac{35}{2}.$$

Portanto para que a equação seja satisfeita, $x = \dfrac{35}{2}$.

Na Educação Básica, as noções intuitivas relacionadas às equações acontecem antes de estudarmos Álgebra. Por exemplo, nos primeiros anos do Ensino Fundamental quando são introduzidas as noções de igualdade e/ou equivalência. Como, por exemplo, são resolvidas em problemas da seguinte forma:

$$\triangle + 5 = 8,$$

onde queremos saber qual valor somado a 5 é igual a 8, ou até mesmo quanto falta de 5 para se chegar a 8. Esse conhecimento é fundamental para o entendimento de conceitos envolvendo a álgebra estudada nos anos finais do Ensino Fundamental.

Ao estabelecer relação entre números desconhecidos e conhecidos por meio das sentenças matemáticas, estamos tratando de uma equação, que informalmente a etimologia da palavra significa igualdade, ou seja, está relacionada com equilíbrio. As sentenças matemáticas são compostas por letras e/ou símbolos, essas são características que estruturam uma equação.

As noções intuitivas das equações desenvolvidas em alguns livros didáticos são introduzidas a partir de problemas algébricos. Como veremos a seguir trazemos, exemplos contidos no livro de Bonjorno (2022) e Sampaio (2018):

Exemplo 3.11. No livro "Amplitude Matemática" de (Bonjorno et al., 2022), na seção da 2ª unidade sobre linguagem algébrica e equação polinômio do primeiro grau, é apresentada a percepção da balança de dois pratos, que foi descoberta no Antigo Egito. Ela era utilizada com o objetivo medir a massa de objetos. Em um dos pratos da balança era colocado um objeto cuja a massa era de valor conhecido, enquanto o outro prato era destinado ao objeto que deseja medir. Quando os dois pratos estão em equilíbrio, isso indica que os dois objetos têm massas iguais. Assim, são trazidos os seguintes questionamentos:

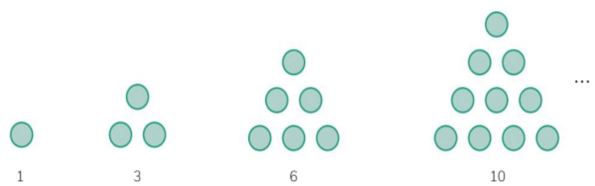
1. Se a balança estiver em desequilíbrio, o que é necessário fazer para que os pratos fiquem equilibrados?

2. Em sua opinião, por que a balança de dois pratos é usada como um dos símbolos da justiça?

A primeira pergunta tem como objetivo garantir que os alunos compreendam que será preciso adicionar mais massa à balança para alcançar o equilíbrio desejado. A segunda, tem como objetivo de direcionar ao debate sobre justiça e o significado da balança para eles.

Posteriormente, a obra trabalha as expressões algébricas a partir das linguagem matemáticas, em seguida sobre o que é uma expressão algébrica, sentenças matemáticas, o valor numérico de uma expressão algébrica e as sequências numéricas. O livro explora bastante o contexto histórico dos conteúdos algébricos. No tópico de sequências em padrões, inicialmente são desenvolvidas ideias a partir de momentos históricos referente a sequência e as representavam por padrões geométricos. Em seguinda apresentava umaa sequência formada por $(1, 3, 6, 10, \ldots)$ chamada de números triangulares, conforme podemos observar ma figura a seguir:

Figura 6 – Padrão de sequência triangular



Fonte: Bonjorno et al. (2022, p. 80)

O autor propõe o seguinte questionamento:

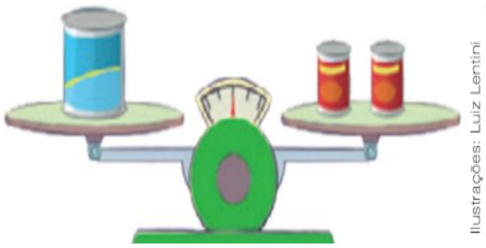
a) Quais são o 6° e o 8° números triangulares dessa sequência? Façam os desenhos.

b) Expliquem o raciocínio usado para resolver o item anterior.

Esses conceitos são desenvolvidos para que posteriormente seja explorada a equação polinomial do primeiro grau.

No segundo capítulo, inicialmente apresenta uma balança de dois pratos contendo latas diferentes e suas massas são expressas em quilogramas. A proposta é encontrar possibilidades para os valores da massa em kg das latas, para que a balança esteja em equilíbrio, justificando a resposta.

Figura 7 – Balança de dois pratos com latas



Fonte: Bonjorno et al. (2022, p. 84)

Depois de explorar problemas envolvendo a balança de dois pratos, o livro desenvolve o conceito de uma equação polinomial do primeiro grau e suas resoluções. Destacamos o seguinte problema apresentado: "Ivo propôs a Samuel que adivinhasse a quantidade de cédulas de R\$ $10,00$ que ele possui. Ivo disse que tem 15 cédulas de R\$ $5,00$ e x cédulas de R\$ $10,00$, perfazendo um total de R\$ $255,00$. Quantas cédulas de R\$ $10,00$ Ivo tem? "

Inicialmente precisamos escrever a expressão com os dados apresentados no problema. Em seguida encontrar o valor de x, para que descubramos quantas cédulas de R\$ $10,00$ Ivo tem.

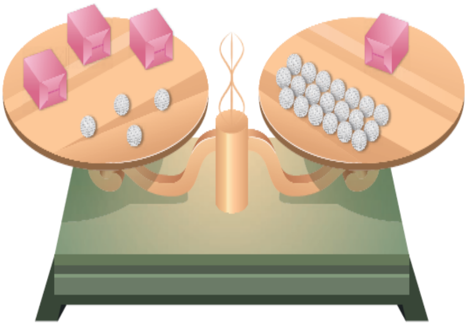
A expressão dada é: $5 \cdot 15 + 10x = 255$. Resolvendo-a, temos:

$$\begin{aligned} 5 \cdot 15 + 10x &= 255 \\ 75 + 10x &= 255 \\ 10x &= 255 - 75 \\ 10x &= 180 \\ x &= 18 \end{aligned}$$

Portanto, Ivo tem 18 cédulas de R\$ $10,00$.

Exemplo 3.12. O livro "Trilha da Matemática" de (Sampaio, 2018), no capítulo equações, inicialmente aborda um problema envolvendo bolas de golfe, com o seguinte desafio: haviam diversas caixas contendo essas bolas, porém sem qualquer indicação da quantidade em cada uma delas, sendo que o personagem do livro não pode abri-las. O objetivo é descobrir a quantidade de bolas em cada caixa utilizando apenas algumas bolas soltas e uma balança sem uso. O desafio é encontrar uma maneira de equilibrar a balança usando as caixas e as bolas soltas, a fim de descobrir quantas bolas estão em cada uma delas. Após algumas tentativas ela conseguiu determinar a quantidade de bola em cada caixa. Observe a imagem a seguir:

Figura 8 – Balança



Fonte: Sampaio (2018, p. 113)

O livro não apresenta uma resolução da situação de imediato, pelo fato que antes disso foi necessário explorar sentenças matemáticas antes mesmo de resolver o problema.

Retornando para o problema, vamos levar em consideração que foram desprezadas as massas das caixas e a quantidade de bolas em cada caixa são iguais. Dessa forma, Fernanda observou que três caixas mais quatro bolas é igual uma caixa mais vinte bolas, assim deixando a balança equilibrado. Representando por b a quantidade de bolas em cada caixa, Fernanda escreveu a seguinte sentença:

$$3b+4=b+20.$$

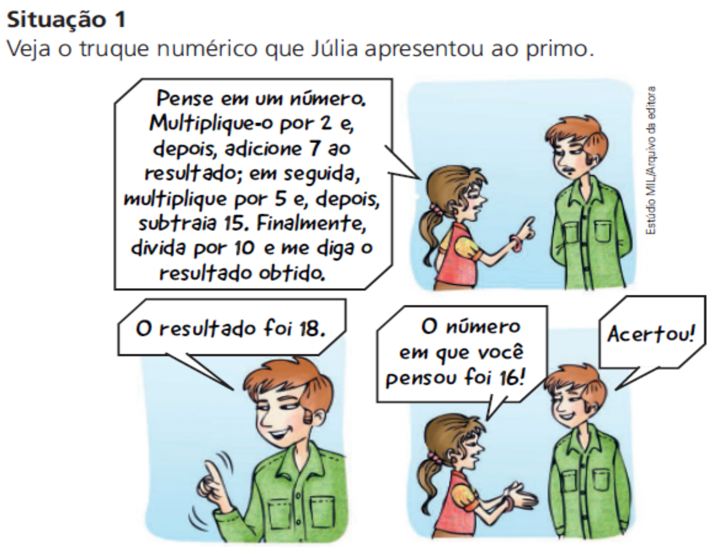
A partir dessa ideia, foi apresentada o que é uma equação e suas características. Resolvendo a equação, obtemos:

$$\begin{aligned} 3b+4 &= b+20 \\ 3b &= b+20-4 \\ 3b-b &= 20-4 \\ 2b &= 16 \\ b &= \frac{16}{2} \\ b &= 8 \end{aligned}$$

Há 8 bolas em cada caixa.

Em seguida, foram apresentadas algumas situações problemas das equações. Observe um dos exemplos a seguir:

Figura 9 – Truque numérico



Fonte: Sampaio (2018, p. 115)

Primeiramente vamos expressar as informações que foram ditas por Júlia, conforme o esquema abaixo:

1. "Pense em um número, multiplique-o por 2 [...]", daí temos a expressão $2x$, sendo x um número qualquer.
2. "[...] e, depois, adicione 7 ao resultado [...]", daí temos a expressão: $2x+7$.
3. "[...] em seguida, multiplique por 5 [...]", daí temos a expressão: $(2x+7)5$.
4. "[...] e, depois, subtraia 15 [...]", daí temos a expressão: $[(2x+7)5]-15$.
5. "Finalmente, divida por 10 e me diga o resultado obtido", daí temos a expressão:
$$\frac{[(2x+7)5]-15}{10}.$$

Dessa forma, rresolvendo-a, temos:

$$\begin{aligned}\frac{[(2x+7)5]-15}{10} &= \frac{10x+35-15}{10}\\ &= \frac{10x+20}{10}\\ &= \frac{10x}{10}+\frac{20}{10}\\ &= x+2.\end{aligned}$$

Observe que o resultado final será igual o número pensado acrescentado dois. Assim, temos $18 = x+2$. Resolvendo, obtemos que o número pensado foi 16.

Agora, veremos a definição de equações algébricas e como as equações do primeiro grau se enquadram nos conteúdos abordados.

Chama-se de equação algébrica toda equação que pode ser reduzida a forma,

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 = 0,$$

com $n \in \mathbb{N}^*$ e $a_n \neq 0$, onde $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ são coeficientes da equação, que pertencem ao conjunto dos números reais, para todo x pertencente ao conjunto $\mathbb{R}$.

Com isso, vamos abordar o objeto de estudo deste trabalho que são as equações do primeiro grau.

As equações do primeiro grau são da forma $ax+b=0$, com a e $b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, sendo a o termo dependente e b o termo independente. Pode-se observar que a equação é uma equação algébrica para $n=1$. O objetivo de resolver a equação do 1° grau é encontrar o valor que satisfaça a equação. Este valor chama-se raiz da equação, que neste caso possui um único valor que torna a sentença matemática verdadeira, ou seja, possui uma única solução. Para encontrar a raiz, resolvemos da seguinte forma:

$$ax+b=0.$$

Adicionamos $-b$ em ambos os membros da igualdade:

$$\begin{aligned} ax+b+(-b) &= 0+(-b) \\ ax+(b-b) &= 0-b \\ ax+0 &= -b \\ ax &= -b \end{aligned}$$

Agora, multiplicando $\frac{1}{a}$ em ambos os membros da igualdade, obtemos:

$$\begin{aligned} ax \cdot \frac{1}{a} &= -b \cdot \frac{1}{a} \\ x &= \frac{-b}{a}. \end{aligned}$$

Quando $a=1$, a equação na forma $1x+b=0$, está definida em um conjunto que possui uma estrutura de grupo, que satisfaz as seguintes propriedades: associatividade, existência do elemento neutro e inverso. Estes por serem únicos, tornam a solução da equação única.

Em outras palavras, observe que a equação da forma $1x+b=0$ possui solução no conjunto dos inteiros, racionais e reais. Por outro lado, não possui solução no conjunto dos números naturais, uma vez que neste conjunto não existem números negativos.

Quando $a \neq -1$ ou $a \neq 1$, a equação na forma $ax+b=0$ está definida sobre um conjunto com estrutura de um anel. Dessa forma, vamos definir anéis e verificar as propriedades que caracterizam um anel. Com isso, vamos explorar a definição, as propriedades de um anel e como estão estruturadas essas propriedades em equações desse tipo.

3.2 Anéis

Definição 3.5. Seja R um conjunto não vazio, com duas operações binárias $+, \cdot$. Este conjunto é dito um anel se as seguintes propriedades são satisfeitas:

1. (R,+) é um grupo abeliano e satisfaz tais condições para adição:

   (A_1) $a+(b+c) = (a+b)+c$, $\forall a,b,c \in R$ (associatividade);

   (A_2) $a+b = b+a$, $\forall a,b \in R$ (comutatividade);

   (A_3) $\exists\, 0 \in R$, tal que $a+0 = 0+a = a$, $\forall a \in R$ (existência do elemento neutro);

   (A_4) $\forall a \in R$, $\exists\, (-a) \in R$, em que $a+(-a) = 0 = (-a)+a$ (existência do elemento inverso).

2. (R,$\cdot$) A propriedade satisfaz as seguintes condições para a multiplicação:

   (A_5) $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$, $\forall a,b,c \in R$ (associatividade);

3. Valem as leis distributivas, ou seja,

   (A_6) $a\cdot(b+c) = (a\cdot b)+(a\cdot c)$, $\forall a,b,c \in R$.

   (A_7) $(b+c)\cdot a = (b\cdot a)+(c\cdot a)$, $\forall a,b,c \in R$.

Em outras palavras, um anel é um conjunto com duas operações, de adição e multiplicação, que devem satisfazer algumas propriedades fundamentais. Para adição precisa-se satisfazer: associatividade, comutatividade, existência do elemento neutro, existência do elemento inverso. Contudo, para a multiplicação precisa-se satisfazer associatividade. E para as duas operações precisa-se satisfazer a distributividade.

Proposição 3.1. Seja R um anel, com $a,b,c \in R$, em que oposto de a seja $-a$ e $a+(-b) = a-b$. Então:

1. $a\cdot 0 = 0\cdot a, \forall a \in R$;

2. $(-a)\cdot b = -(a\cdot b) = a\cdot(-b), \forall a,b \in R$;

3. $(-a)\cdot(-b) = a\cdot b, \forall a,b \in R$;

4. $a\cdot(b-c) = a\cdot b - a\cdot c, \forall a,b,c \in R$.

Vários conjuntos numéricos satisfazem estas proposições, por exemplo os conjuntos dos inteiros $\mathbb{Z}$, por sua estrutura ser um anel, com as operações de adição e multiplicação.

Observação 3.5. Denotamos um anel R como $(R, +, \cdot)$.

Definição 3.6. Se existe um elemento $1 \in R$ tal que, $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, para todo $a \in R$, então chama-se 1 de unidade do anel ou identidade do anel R. Neste caso, diz que R é um anel com unidade. E todo anel com unidade que satisfaz a comutatividade é chamado de anel comutativo com unidade.

Exemplo 3.13. $(3\mathbb{Z}, +, \cdot)$ é um anel, sem identidade, pois $3\mathbb{Z}$ abrange apenas os múltiplos de 3 e nesse conjunto não existe o elemento 1 que pertença ao conjunto $3\mathbb{Z}$.

Lema 3.1. Se R é um anel com 1, então 1 é única.

Demonstração 3.1. Sejam 1 e $1'$, então $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ e $1' \cdot a = a \cdot 1' = a$, logo $1 = 1'$.

Observação 3.6. O elemento neutro e o elemento inverso para as duas operações $(+, \cdot)$, que pertença ao conjunto do anel são únicos. Prova análoga para unicidade do elemento neutro e elemento inverso desenvolvida em grupos.

Observação 3.7. Em geral, $ab \neq ba$, mas se $ab = ba$ para todos $a, b \in A$, temos um anel comutativo. Veremos isso nos exemplos a seguir:

Exemplo 3.14. As matrizes representadas por:

$$(M_n(\mathbb{Z}), +, \cdot), (M_n(\mathbb{Q}), +, \cdot), (M_n(\mathbb{R}), +, \cdot), (M_n(\mathbb{C}), +, \cdot),$$

são anéis para todo $n \geq 2$.

Exemplo 3.15. Seja $(M_2(\mathbb{Z}), +, \cdot)$ um anel com $1_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Este não é um anel comutativo, pois

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3.16. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ são anéis que, com as operações usuais, satisfazem as propriedades da Definição 3.5.

Exemplo 3.17. O conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ com as operações usuais de adição e multiplicação, não é um anel, pois não existe o elemento inverso aditivo. Por exemplo, o inverso de 1 é -1, mas $-1 \notin \mathbb{N}$.

Exemplo 3.18. O conjunto $\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{n-1}\}$, com as operações de + (adição módulo n) e $\cdot$ (multiplicação módulo n) é um anel comutativo com unidade. As operações em $\mathbb{Z}_n$ são definidas por:

1. $\overline{a} +_n \overline{b} = \overline{a+b}$, sendo $\overline{0}$ o elemento neutro da adição.

2. $\overline{a} \cdot_n \overline{b} = \overline{a \cdot b}$, sendo $\overline{1}$ o elemento neutro da multiplicação.

Esse anel é chamado de anel dos inteiros módulo n.

Exemplo 3.19. Dado $\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$, temos que

Tabela 3 – Tábua $(\mathbb{Z}_4, \cdot)$

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Note que 0 e 2 não tem inverso multiplicativo.

Vimos anteriormente, que a equação na forma $ax+b=0$, para $a \neq -1$ ou $a \neq 1$. O conjunto solução da equação está definida como uma estrutura de um anel, pois satisfazem as propriedades da Definição 3.5. Assim, podemos observar que:

1. Existência do elemento neutro: existe um único elemento inteiro, que indicaremos por 1, tal que $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$.

2. Existência do elemento inverso multiplicativo: para qualquer elemento de x, existe um elemento x^{-1} tal que
$$x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = 1.$$

3. Dado o conjunto $\mathbb{Q}$ utilizando as propriedades, podemos encontrar a solução da equação, que é única, devido a unicidade desses elementos. Para $ax+b=0$, temos que $x = \dfrac{-b}{a}$, para todo $a, b \in \mathbb{Z}$.

Veja que a equação da forma $ax+b=0$ possui solução em conjuntos que possuem estrutura de um anel, desse modo, não possui solução no conjunto dos naturais tampouco dos inteiros, por esses grupos não possuirem inversos aditivos e multiplicativos, repectivamente.

Os conceitos vistos no ensino superior possuem grande relevância para o ensino da Educação Básica, principalmente os conteúdos algébricos, por terem uma base teórica fundamentada em estruturas matemáticas que expandem a formação docente. Neste trabalho, em específico, estamos trazendo as relações necessárias para mostrar que, de fato, os conteúdos de grupos e anéis são fundamentais para o currículo do ensino superior, o que, de certa forma, irá influenciar positivamente na prática docente na Educação Básica. Esses conhecimentos permitem que os futuros docentes desenvolvam estratégias de ensino para facilitar aprendizagem dos alunos em relação a conteúdos algébricos.

4 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Este capítulo será dedicado a uma proposta de sequência didática, que ofereça aos professores que analisarem este trabalho, uma sugestão de atividade. Dessa forma, o objetivo da sequência é promover o desenvolvimento do pensamento algébrico do aluno em relação ao conteúdo de equações. A sequência de atividades tem como público-alvo turmas do 6° ao 7° ano do Ensino Fundamental, visando contribuir com o desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes. Antes de prosseguirmos, vamos definir sequência didática.

4.1 O que é uma sequência didática?

Uma sequência didática é um conjunto planejado de atividades com o propósito de ensinar um conteúdo específico. Essas atividades são ordenadas em etapas sequenciais, com o objetivo de alcançar os resultados desejados no processo de aprendizagem. Os principais autores definem, de forma similar, sobre conceito de sequência didática. Dolz, Noverraz e Schneuwly (2004) definem sequência didática como um conjunto de atividades organizadas, em que sua estrutura seja de forma sistematizada centrada em gênero textual, oral ou escrita.

Zabala (1998, p. 18) define sequência didática como "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos alunos" .

Conforme, Peretti e Costa (2013), sequência didática é:

> um conjunto de atividades ligadas entre si, planejadas para ensinar um conteúdo, etapa por etapa, organizadas de acordo com os objetivos que o professor quer alcançar para aprendizagem de seus alunos e envolvendo atividades de avaliação que pode levar dias, semanas ou durante o ano. É uma maneira de encaixar os conteúdos a um tema e por sua vez a outro tornando o conhecimento lógico ao trabalho pedagógico desenvolvido (Peretti; Costa, 2013, p. 06) .

No mesmo estudo, Peretti e Costa (2013, p. 06) destacam que para realizar uma sequência didática é fundamental "apresentar ao aluno atividades práticas, lúdicas com material concreto e diferenciado apresentando desafios cada vez maiores aos alunos permitindo a construção do conhecimento". Essas atividades exercem um papel importante no processo da aprendizagem do aluno, por proporcionem uma estrutura organizada de atividades. Ao planejar e implementar atividades sequenciais, o professor oferece oportunidades para que os alunos desenvolvam habilidades necessárias durante esse processo, permitindo-lhe potencializar seu entendimento ao longo do tempo.

Para se elaborar uma sequência didática, alguns elementos são essenciais na estruturação e eficácia do processo de ensino-aprendizagem. Segundo Giordan e Guimarães (2012, p. 07),

> Os elementos constituintes da elaboração da SD são: Título, Público Alvo (Caracterização dos Alunos, da Escola e da Comunidade Escolar), Problematização, Objetivos (Gerais e Específicos), Conteúdos, Dinâmicas, Avaliação e Bibliografia (Referencial Teórico e Material utilizado). Estes elementos são agentes organizadores da atividade de ensino e auxiliam o professor no planejamento elaborado de suas intencionalidades educativas.

Ou seja, Giordan e Guimarães (2012) destacam que alguns elementos são essenciais para a elaboração de uma sequência didática. Esses elementos auxiliam o professor no planejamento e organização de suas atividades.

Os autores argumentam em seu texto, que o título é importante para chamar a atenção do aluno, principalmente quando se trata de um título atrativo. Além disso, ele deve estar em consonância com a temática a ser abordada nos conteúdos. Levando em consideração que as atividades que forem desenvolvidas precisam estar de acordo com o público-alvo, é imprescindível considerar o público-alvo e o nível de ensino. A problematização que irá nortear o processo da atividade deve aproximar as vivências do aluno na sala de aula com situações reais, a partir de um problema ou desafio. Os objetivos gerais e específicos são as metas a serem cumpridas, sendo os passos que realmente queremos alcançar.

Além do mais, os conteúdos determinam quais dinâmicas podem ser trabalhadas para alcançar os objetivos desejados. Podemos perceber que os elementos que constituem a sequência didática estão intrinsecamente ligados. Quanto à avaliação do processo, ela deve se coincidir com os objetivos e os conteúdos previstos na sequência. Por fim, a bibliografia é a referência de todo o material utilizado para preparar e aplicar a sequência.

4.2 Proposta de sequência didática

4.2.1 Atividade 01

Título	Equilibrando Pesos: Uma Exploração da Manipulação de Frutas na Balança
Público Alvo	7° ano – Ensino Fundamental Anos Finais
Objetivo	(EF06MA14)
Conteúdo	Propriedades da igualdade
Duração da aula	2 aulas de 50 min. (totalizando 100 min.)

Tabela 4 – Balança virtual – Equilibrando pesos

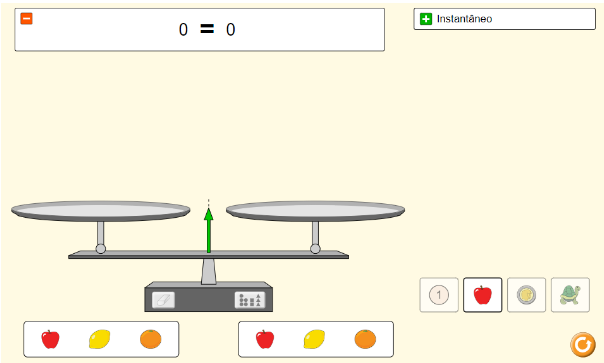
Habilidade – (EF06MA14): Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas.

Metodologia: A aula será expositivo-dialogada com manipulação de frutas na balança, para o entendimento das propriedades da igualdade. O momento ideal para realizar essa atividade é durante a explicação das propriedades. Com isso, através de alguns questionamentos, será feito o percurso da aula para atingir o objetivo desejado. O professor poderá levar uma balança de dois pratos e frutas ou algum objeto que desejar. Outra forma de realizar atividade sem utilizar a balança física é utilizar o site do PHET [1] online, caso tenha os recursos disponíveis, como computador, projetor ou lousa digital, e rede de internet. A seguir teremos uma proposta de atividade realizada no PHET.

Passos para desenvolver a atividade

- Primeiro momento: Inicialmente, vamos observar que a balança permanece em equilíbrio sem pôr nenhum peso.

Figura 10 – Balança virtual



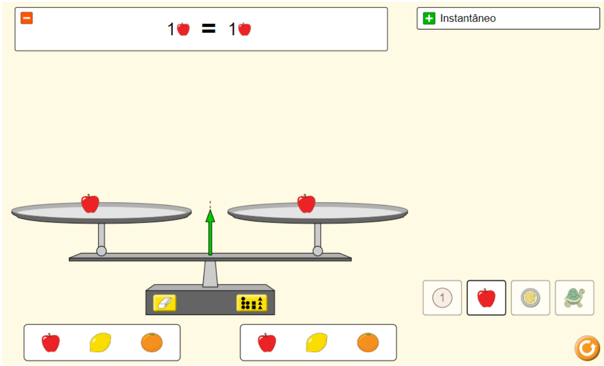
Fonte: <https://encr.pw/H7e1P>

Observe que ambos os lados da balança não possuem peso. Considere duas maçãs distribuídas uma em cada prato na balança.

- Segundo momento: Devemos supor que as frutas do mesmo tipo possuem a mesma massa. Então iremos adicionar uma maçã em cada lado da balança.

[1] Site online que possibilita realizar algumas simulações gratuitas da área de ciências exatas, ciências da natureza e ciências biológicas.

Figura 11 – Balança virtual

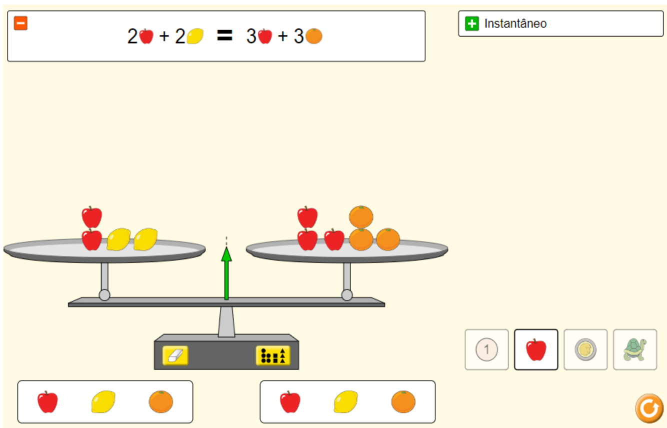


Fonte: <https://encr.pw/H7e1P>

Podemos trabalhar com os seguintes questionamentos: O que aconteceu ao adicionar as maçãs? Será que as maçãs possuem a mesma massa? Dessa forma, conseguimos determinar a massa da maçã?

- Terceiro momento: E se adicionarmos mais frutas? o que vai acontecer com a balança? O peso será o mesmo? Agora conseguimos determinar a massa das frutas?

Figura 12 – Balança virtual

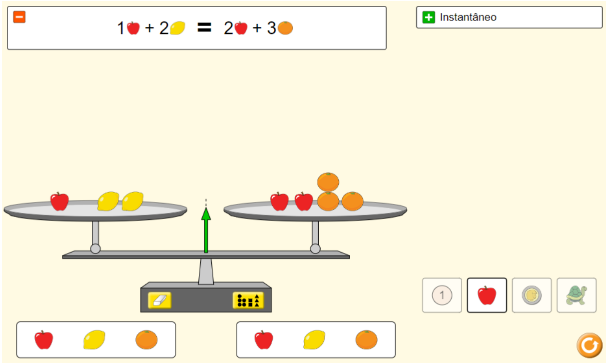


Fonte: <https://encr.pw/H7e1P>

Observe que foram adicionadas frutas em ambos os pratos da balança até que fosse atingido o equilíbrio. Desse modo, temos neste caso, que 2 maçãs mais dois limões é equivalente a 3 maçãs mais 3 laranjas.

- Quarto momento: Se retirarmos uma maçã em cada um dos lados da balança, o que pode acontecer?

Figura 13 – Balança virtual

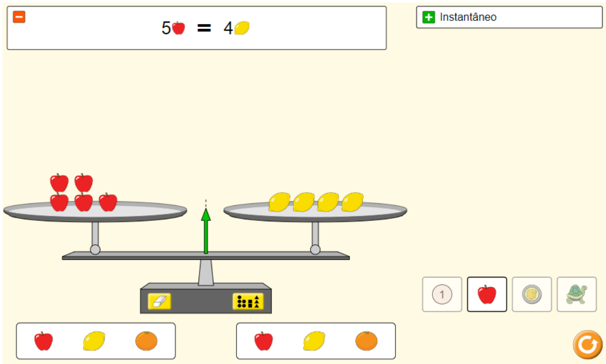


Fonte: <https://encr.pw/H7e1P>

Percebe-se que, ao subtrair pesos iguais de forma sicronizada em ambos os pratos da balança, ela permanecerá em equilíbrio. Com isso, como cada fruta possui a mesma massa, seu peso não influenciará no equilíbrio da balança. Assim, a massa do lado direito da balança será igual o lado esquerdo.

- Quinto Momento: Agora que entendemos a noção de igualdade, vamos tentar determinar o peso das frutas.

Figura 14 – Balança virtual



Fonte: <https://encr.pw/H7e1P>

Observe que, do lado esquerdo tem 5 maçãs e do lado direito tem 4 limões. Podemos determinar a massa das maçãs e dos limões? Como? O que pode ser feito se não sabemos quanto vale a massa das frutas?

Vamos considerar o peso médio da maçã como 100 g. Assim conseguimos determinar a massa do limão? Como? E se ao invés disso, supormos que a massa do limão vale 110 g, como podemos determinar a massa da maçã? Todas as vezes que a massa do limão for 110 g, a massa da maçã sempre será esse valor? E se mudarmos o valor da massa do limão? A massa da maça será a mesma?

Espera-se que com essa atividade que o aluno, através da suposição de valores para a massa de uma das frutas, consiga determinar o peso da outra. Ou seja, esperamos que o aluno desenvolva a ideia inicial de incógnita como sendo um valor desconhecido. Essa noção de incógnita veremos na atividade prosseguinte.

Ao analisar os conceitos envolvidos em grupos e anéis, conteúdos estes que pertencem à Álgebra Abstrata, percebe-se que as ideias de adicionar, subtrair, multiplicar pesos na balança, estão intrinsecamente ligadas às propriedades presentes nos conceitos envolvendo grupos e anéis, como visto nas Definições 3.2 e 3.5. Quando o professor tem a percepção desses conteúdos, seus conhecimentos serão ampliados para um melhor manejo de suas aulas.

Avaliação: A avaliação do processo de construção do conhecimento, se fará através da participação dos estudantes, juntamente com seus questionamentos. Além do mais, poderá ser realizada uma atividade com o intuito de complementar as ideias vistas durante as aulas. Sugestão de atividade chamada “ Manipulação de pesos”.

Referência: Autoria própria.

4.2.2 Atividade 02

Título	Jogo do monte (incógnita e variável)
Público Alvo	7° ano – Ensino Fundamental Anos Finais
Objetivo	(EF07MA13)
Conteúdo	Linguagem algébrica: variável e incógnita
Duração da aula	100 min. (totalizando 2 aulas)

Tabela 5 – Jogo do monte – Incógnita e variável

Habilidade – (EF07MA13): Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita.

Metodologia: A aula será dividida em dois momentos, para que seja possível concluir essa etapa. Primeiramente, será realizada uma aula de 50 minutos sobre a distinção do conceito de incógnita e variável, juntamente com a realização de exercícios. Em seguida, será realizada a atividade chamada “Jogo do Monte (variável e incógnita)”. Essa atividade tem o objetivo de ser realizada após a explicação do conteúdo de “Linguagem algébrica: variável e incógnita”, visto que será um complemento para a distinção da identificação sobre o que é uma variável e o que é uma incógnita. A atividade poderá ser realizada em uma duração de 50 minutos e as rodadas de jogos poderá ser quantas for possível até término da aula. Os recursos necessário serão: quadro, piloto, apagador, as cartas, dado e as regras do jogo. A seguir será descrita a proposta de como atividade pode ser realizada.

Passos para desenvolver a atividade

Antes de iniciarmos, observe o modelo da parte frontal das cartas.

Figura 15 – Jogo do monte – Parte da frente das cartas

Fonte: Autoria própria

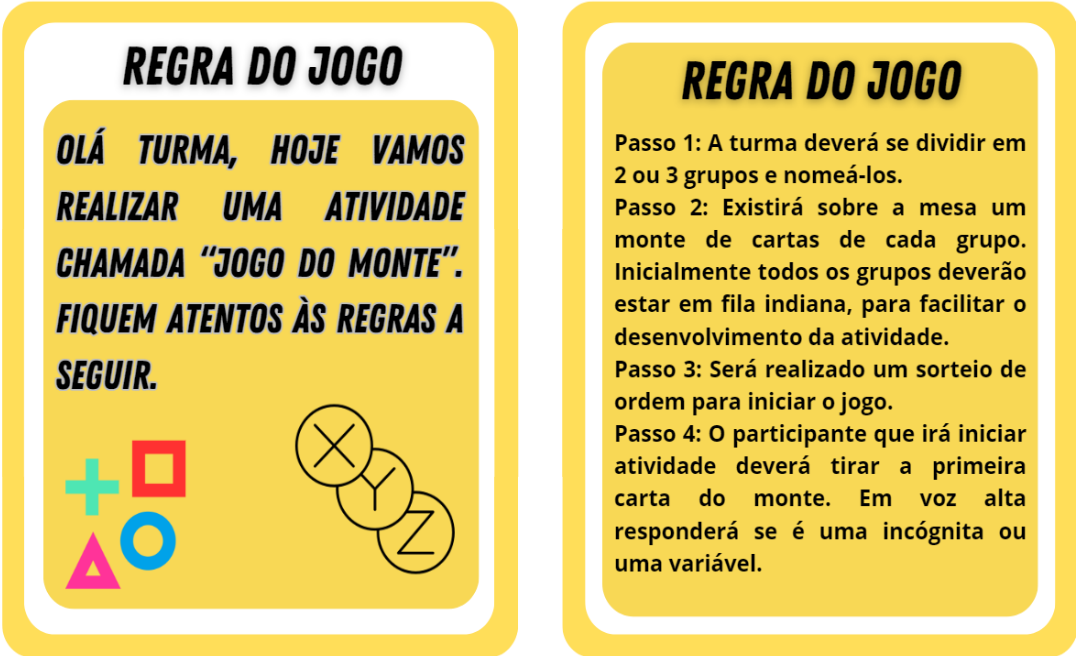
E agora, o modelo da parte de trás.

Figura 16 – Jogo do monte – Parte de trás das cartas

Fonte: Autoria própria

- Primeiro momento: A turma deverá se dividir em 2 ou 3 grupos. Em seguida, os grupos deverão criar um nome para eles, para que seja feita uma tabela de pontos no quadro.
- Segundo momento: O professor será o instrutor desse processo, então ele deverá ler em voz alta as regras do jogo, conforme a imagem a seguir:

Figura 17 – Jogo do monte – Regras do jogo



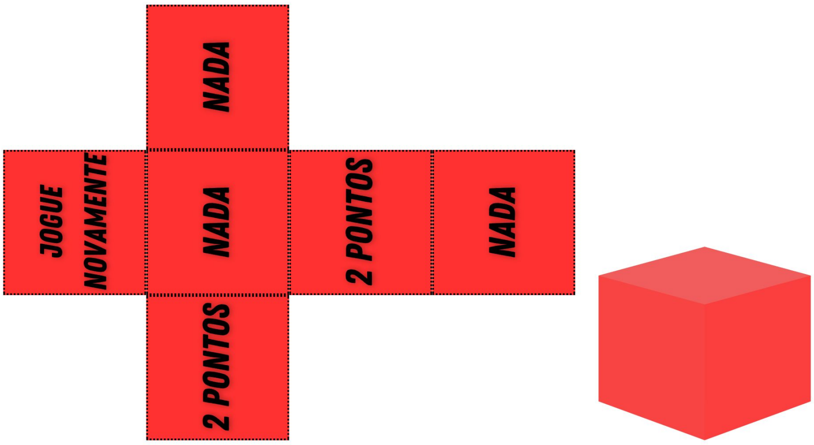
Fonte: Autoria própria

Figura 18 – Jogo do monte – Regras do jogo

Fonte: Autoria própria

Além das regras, também terá um dado bônus conforme está explicitado nas mesmas. Observe a figura a seguir:

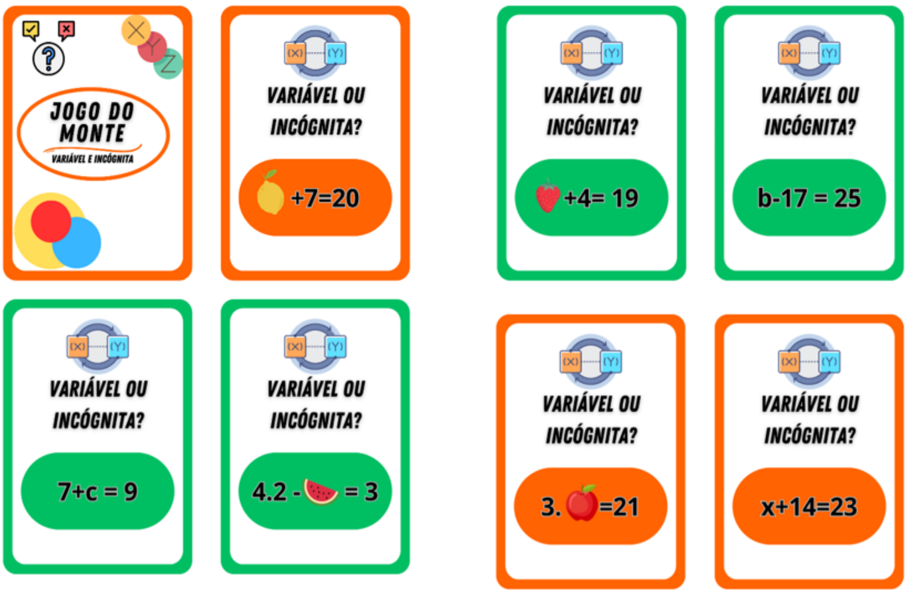
Figura 19 – Jogo do monte – Dado bônus



Fonte: Autoria própria

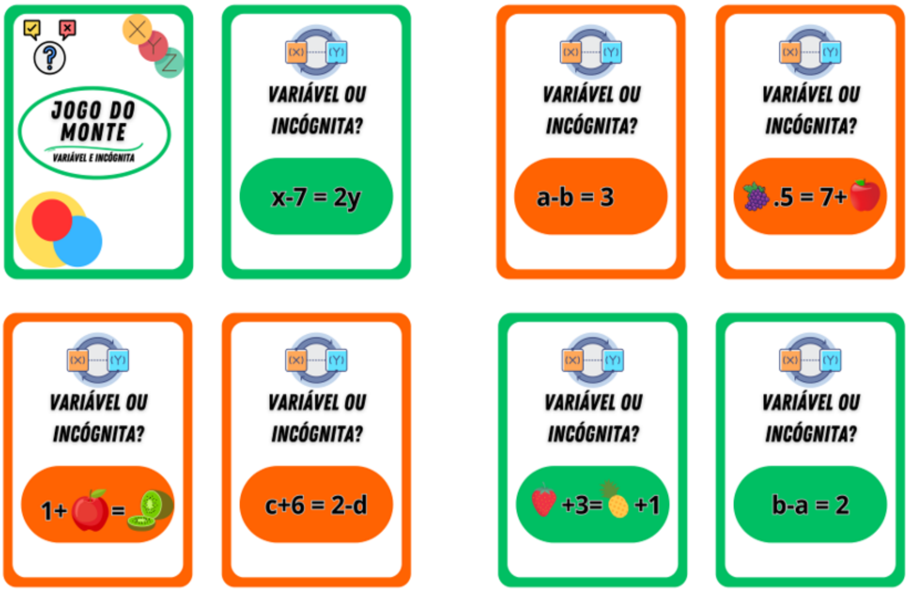
Essa atividade poderá contribuir para estimular os alunos, pois possui características competitivas. Além de distinguir as incógnitas e variáveis, a atividade também tem como objetivo ressaltar que os símbolos e as letras podem representar ambos os significados, conforme a imagem a seguir:

Figura 20 – Jogo do monte – Cartas incógnitas



Fonte: Autoria própria

Figura 21 – Jogo do monte – Cartas variáveis



Fonte: Autoria própria

Avaliação: O professor será o mediador desse processo, pois a partir da realização da atividade que ele poderá avaliar o desempenho da turma durante a mesma, se o objetivo foi cumprido. Portanto, poderá fazer parte de uma avaliação somativa.

Referência: Autoria própria.

4.2.3 Atividade 03

Título	Inúmeros padrões
Público Alvo	7° ano – Ensino Fundamental Anos Finais
Objetivo	(EF07MA14) – (EF07MA15) – (EF07MA16)
Conteúdo	Linguagem algébrica: sequência recursiva e não recursiva, expressar regularidades
Duração da aula	100 min. (totalizando 2 aulas)

Tabela 6 – Inúmeros padrões

Habilidades – (EF07MA14): Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura; **(EF07MA15):** Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas; **(EF07MA16):** Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes.

Metodologia: Inicialmente, será necessária uma explicação sobre o conceito de sequência e exemplos, para que posteriormente seja explorada a sequência recursiva e não recursiva. A aula será dividida em duas etapas: a primeira etapa será realizada com o objetivo do professor explorar a teoria do conteúdo juntamente com os alunos, então a aula deverá ser expositiva-dialogada, com algumas intervenções. A segunda etapa será avaliativa, o professor irá avaliar o aprendizado dos alunos, através da atividade " Inúmeros padrões", que poderá ser feita em dupla.

Passos para desenvolver a atividade

- Primeiro momento: Inicialmente, veremos alguns exemplos sobre sequência recursiva. Uma sequência é recursiva ou recorrente quando cada termo depende de um ou mais termos anteriores, como por exemplo a sequência de Fibonacci. Observe a seguir, alguns exemplos de sequências numéricas recursivas:

  a) $(1,1,2,3,5,8,11,19,...)$ – Sequência de Fibonacci.

  b) $(0,2,4,6,8,10,12,14,...)$ – Sequência formada por $a_n = a_{n-1} + 2$, onde $n \in \mathbf{N}$.

  c) $(1,5,9,13,17,21,25,29,...)$ – Sequência formada por $a_n = a_{n-1} + 4$, onde $n \in \mathbf{N}$.

- Segundo momento: Além dos exemplos de sequências numéricas, também existem sequências recursivas geométricas. Observe as tirinhas a seguir:

  Figura 22 – Sequência recursiva – Tirinhas quadradas

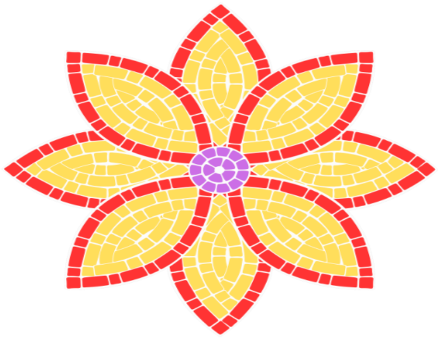
  

  Fonte: Autoria própria

  Pode-se explorar o padrão das tiras quadradas. Observe que o padrão das cores são: vermelho, vermelho, amarelo, vermelho, vermelho, amarelo e assim por diante. Essa sequência de cores é recursiva, pois para saber a próxima cor da tira, precisa-se observar qual foi a cor das duas tiras anteriores. Essa sequência é formada por $(0,0,1,0,0,1,0,0,1,...)$.

- Terceiro momento: Pode-se, também, explorar os padrões vistos nas figuras de mosaico. O professor pode explorar essa atividade mostrando exemplos de padrões de mosaicos e pedir para que os alunos construam um material de acordo com sua imaginação e assim compartilhar junto com os colegas atividade realizada, conforme a imagem a seguir:

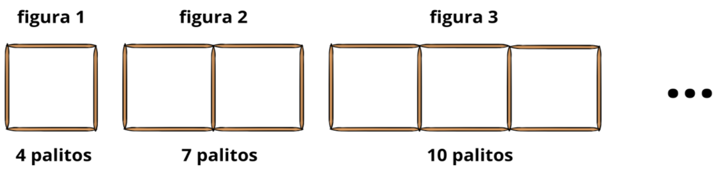
Figura 23 – Padrões de sequência – Mosaico



Fonte: Autoria própria

- Quarto momento: Vamos explorar exemplos de padrões de sequências. Juntamente com o professor, pode-se explorar o padrão de palitinhos, conforme o exemplo abaixo:

Figura 24 – Sequência recursiva – Palitinhos



Fonte: Autoria própria

Essa atividade possibilita os seguintes questionamentos: observando essa sequência, é possível desenhar a figura 4? Como? E a figura irá conter quantos palitinhos? Consegue determinar a figura 10? Quantos palitinhos tem a figura 10? Você saberia qual é o padrão presente na sequência?

- Quinto momento: Agora, vamos explorar a definição de sequência não recursiva. Ao contrário de sequência recursiva, a sequência não recursiva é a sequência cujos termos não dependem dos termos anteriores. Para trabalhar essa ideia, pode-se colocar a turma em círculo e realizar uma dinâmica com o seguinte desafio: cada aluno em voz alta vai citar a sequência dos números positivos e quando o número for um múltiplo de 3, o aluno deverá falar "fi". Quem se atrapalhar ou errar, está fora da dinâmica, ficará observando a realização da atividade. A sequência é formada por (1, 2, "fi", 4, 5, "fi", 7, 8, "fi", 10, ...).

- Sexto momento: Essa dinâmica tem como objetivo evidenciar que os termos da sequência não depende de um termo anterior. Alguns exemplos são:

  a) $(5,7,9,11,13,15,\ldots)$ – Sequência formada por $a_n = 2n+3$.

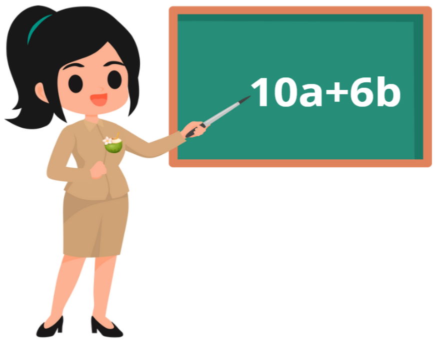
  b) $(2,5,10,17,26,37,\ldots)$ – Sequência formada por $a_n = n^2+1$.

  c) $(2,3,5,7,11,13,17,19,\ldots)$ – Sequência formada pelos números primos.

- Sétimo momento: Além disso, a equivalência de expressões algébricas pode-se introduzir por meio de situações reais, como nos exemplos a seguir:

    1. Durante a aula de Matemática da professora Ana, surgiu um desafio para seus alunos. Observe a ilustração no quadro abaixo.

       Figura 25 – Equivalência de expressões algébricas – Aula de Matemática

       Fonte: Autoria própria

       Vitória, Brena e Flavi responderam as seguintes expressões.

       Figura 26 – Equivalência de expressões algébricas – Aula de Matemática

Vitória	2(3a+3b)
Brena	(7a+3a)+(2b+3b)
Flavi	2(5a+3b)

       Fonte: Autoria própria

       Qual das expressões ditas pelas alunas é equivalente à expressão que a professora Ana escreveu no quadro?

       Esse exemplo contribui para determinar quais expressões são equivalentes. Além do mais, podemos determinar uma expressão ou lei de formação a partir de um problema, conforme o próximo exemplo.

    2. Emilly produz empadas doces e salgadas para ganhar uma renda extra. Quando foi produzir as empadas doces, percebeu que não tinha recheio suficiente para realizar a produção, então foi preciso que ela fosse ao mercado. Emilly comprou no mercado 8 caixas de leite condensado e 3 latas de chocolate em pó. Agora responda o que se pede.

       a) Qual a expressão algébrica pode representar o gasto total de Emilly?

       b) Sabe-se que o preço da unidade do leite condensado é de R$ 6,50 e o valor total gasto é de R$ 67,00. Qual o valor do chocolate em pó?

Importante destacar que a letra b) pode ser desenvolvida com a noção intuitiva de expressões, sem a utilização da resolução de equação. Dessa forma, observe uma proposta de atividade que pode ser desenvolvida na classe após a construção do conhecimento das três habilidades. A turma poderá realizar atividade em dupla, para facilitar a discursão das questões propostas.

Esta atividade tem como objetivo desenvolvimento do pensamento algébrico, conforme citado no capítulo 2. Esta atividade, compõe exercício de formulação de regras para possíveis generalizações. Podemos observar também, que o mesmo está intimamente ligada a álgebra vista nos cursos de graduação em Matemática, que esta é composta por estruturas, que definimos no capítulo 3, ou seja, conjunto com ou uma mais operações satisfazem as mesmas propriedades. Isto é, há um processo de observação, generalização de estruturas Matemática.

Avaliação: Essa atividade possibilitará ao professor analisar o desempenho da turma, em relação aos conteúdos proposto. Sugestão de atividade chamada "Inúmeros padrões".

Referência: Autoria própria.

4.2.4 Atividade 04

Título	Equacionando
Público Alvo	7° ano – Ensino Fundamental Anos Finais
Objetivo	(EF07MA18)
Conteúdo	Equações polinomiais do 1º grau
Duração da aula	100 min. (totalizando 2 aulas)

Tabela 7 – Equacionando

Habilidade – (EF07MA18): Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax+b=c$, fazendo uso das propriedades da igualdade.

Metodologia: Inicialmente, vamos apresentar o conceito de equação polinomial do primeiro grau e como resolve-la. Depois, falaremos um pouco da História da Álgebra, principalmente apresentar como os povos egípcios resolviam os problemas envolvendo as equações polinomiais do primeiro grau. Dessa forma, o professor poderá representar alguns problemas do Papiro de Rhind e os transcrever juntamente com os alunos. Em seguida, seram explicados os problemas desenvolvidos a partir das propriedades de igualdade. Com isso, para finalizar, o professor poderá aplicar atividade para avaliar o processo. Os recursos utilizados são: lápis, papel, borracha, apagador, piloto de quadro branco e atividade impressa.

Passos para desenvolver a atividade

- Primeiro momento: Primeiramente vamos explorar a linguagem matemática a partir dos problemas encontrados no Papiro de Rhind. Com isso, podemos transcrever em linguagem matemática, alguns dos problemas presentes no papiro, visto no trabalho de (Dalarmi, 2019). Seguem, como exemplos:

  1. Aha [2], 2 dela, adicionadas, resultam 16. (Problema 25). Exemplificando a questão e traduzindo para linguagem matemática, temos que

     a) "aha" - refere-se a "x" ou qualquer outra letra do alfabeto.

     b) "2 dela, adicionadas"- significa somando mais duas vezes essa quantidade.

     c) "resultam 16" - refere-se a igual a 16.

     Ou seja $x+2x=16$.

  2. aha é somada com seus 3, dessa soma é subtraído 3, restando 10. (Problema 28). Exemplificando a questão e traduzindo para linguagem matemática, temos que

     a) "Aha" - pode-se chamar de "y".

     b) "somada com seus 3"- somando 3 a essa quantidade.

     c) "3 dessa soma é é subtraído 3" - menos 3.

     d) "restando 10" - igual a 10.

     Ou seja $(y+3)-3=10$.

  O professor pode explorar esses problemas, levando-os para sala de aula, fazendo com que os alunos conheçam um pouco da história da matemática egípcia.

- Segundo momento: Depois de realizar essa transcrição dos problemas juntamente com os alunos, o professor poderá solicitar que eles criem novos problemas e os transcrevam para linguagem matemática. Em seguida, pode ser compartilhada o problema com a turma. Com isso, o professor poderá explicar a definição e a estrutura de uma equação do primeiro grau.

- Terceiro momento: Nesse momento vamos apresentar as propriedades da igualdade para resolver a equação. Como por exemplo, dada a equação $x+2=7$, resolvendo-a, temos: o que pode ser feito para que eliminemos $+2$, fazendo com o que os dois lados permaneçam iguais? A ideia é que o professor instigue os alunos para que eles consigam ter essa percepção. Podemos adicionar algum valor? Qual? Vocês têm alguma ideia do que fazer? Como podemos eliminar o $+2$? Então podemos adicionar -2, em ambos os lados da

[2] Representa quantidade, ou seja trata-se de uma incógnita

igualdade, assim mantemos o equilíbrio. Portanto teremos:

$$\begin{aligned} x+2+(-2) &= 7+(-2) \\ x+2-2 &= 7-2 \\ x+0 &= 5 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Importante destacar que não será necessário seguir esses passos para resolver as equações, mas compreender como é encontrado o valor de x. O professor poderá resolver a equação da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x+2 &= 7 \\ x &= 7-2 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Com isso, o professor pode fazer outros exemplos envolvendo as propriedades da igualdade, e deixar explícito que essas propriedades são essenciais na resolução das operações. A seguir, será proposta uma atividade para desenvolver tal habilidade.

- Quarto momento: Após a compreensão do conteúdo de equações polinomiais do primeiro grau, para avaliar este processo, o professor poderá aplicar a atividade chamada "Equacionando", em que os alunos poderão representar, criar e desenvolver as equações.

  Vimos que a equação da forma $ax+b=0$. Quando $a=-1$ ou $a=1$ o conjunto solução é definida pelas propriedades de um grupo e quando $a \neq -1$ ou $a \neq 1$ está definida como um anel. Dito isso, percebemos a importância do ensino de Grupos e Anéis nos cursos de Matemática. Além disso, levando em consideração as equações do primeiro grau ensinadas na Educação Básica, quando o professor tem uma boa fundamentação em relação aos conteúdos visto no ensino superior, melhor será sua prática na sala de aula.

Avaliação: Após todo conteúdo proposto, avaliação poderá ser feita a partir de uma atividade denominada "Equacionando", que possibilitará os alunos colocarem em prática as noções de equações.

Referência: Autoria própria.

4.2.5 Atividade complementar

Essa atividade tem como intuito levar para sala de aula uma discussão sobre as Olimpíadas de Verão. Com isso será desenvolvida uma proposta de atividade em que será possivel ensinar a equação do primeiro grau. Contudo, é importante destacar o que são os jogos olímpicos de Verão e quais jogos são desenvolvidos nas disputas.

Metodologia: Inicialmente, serão discutidos os Jogos Olímpicos de Verão e suas modalidades. Em seguida, o professor levará um questionamento aos alunos, assim levando as noções desenvolvidas a partir do objetivo do professor, para que seja possível desenvolver a atividade proposta. A aula terá uma duração de 100 minuntos, totalizando duas aulas. Os materiais utilizados serão: quadro, piloto, apagador e atividade impressa.

Passos para desenvolver a atividade

- Primeiro momento: Apresentar a ideia inicial sobre os jogos olímpicos. Segundo (JUNDU, 2019), os Jogos Olímpicos de Verão acontecem desde 1896, em várias cidades ao redor do mundo, com participação de diversos atletas com habilidades em vários esportes. As disputas são realizadas de quatro em quatro anos, o evento é organizado pelo Comitê Olímpico Internacional (COI). As Olimpíadas de Verão contam com vários esportes, envolvendo grandes modalidades que são divididas em categorias diferentes, sendo elas:
  - Esportes aquáticos, tal como natação e polo aquático;
  - Esportes de resistência, tal como triatlo e pentatlo moderno;
  - Saltos, como por exemplo dos saltos ornamentais ou com vara;
  - Ciclismo, assim como ciclismo de pista, ciclismo de estrada e BMX;
  - Tiro, assim como tiro com arco e tiro esportivo;
  - Artes marciais, assim como judô, karatê e taekwondo;
  - Lutas, assim como a greco-romana e a luta livre;
  - Ginástica, tal como ginásticas artística e rítmica.

  Assim dos jogos citados, inclui-se os esportes realizados em equipes. O brasil iniciou as disputas em jogos olímpicos em 1920, a partir desse momento o país continuou participando de todas as edições. com isso adquiriu 170 medalhas, sendo 40 medalhas de ouro, 49 medalhas de prata e 81 de bronze.

- Segundo momento: Inicialmente, a proprosta é o professor instigar os alunos, fazendo uma seguir pergunta: se o total de medalhas adquiridas pelo Brasil é 170, com 40 delas sendo de ouro e 49 de prata, quantas medalhas são de bronze? Observe a tabela a seguir:

Ouro	Prata	Bronze
40	49	x

- Terceiro momento: O professor poderá apresentar o resultado da seguinte forma, após o resultado dos alunos:

$$
\begin{aligned}
37+42+x &= 150\\
79+x &= 150\\
x &= 150-79\\
x &= 71.
\end{aligned}
$$

- Quarto momento: A partir dessa ideia, o professor poderá realizar a atividade chamada "Math Olímpica", que veremos está disponível no apêndice. O objetivo principal dessa atividade será trabalhar problemas existentes nas modalidades do esporte, para aprimorar o conhecimento dos alunos, assim envolver a Matemática nas competições esportivas.

5 CONCLUSÃO

Em síntese, o objetivo desse trabalho é compreender como os conceitos de Grupos e Anéis contribuem para o ensino e aprendizagem dos estudantes na Educação Básica. Para alcançarmos esse objetivo, fizemos uma fundamentação teórica baseada na discussão sobre a Álgebra e o pensamento algébrico, tratando de suas principais características e como elas estão relacionadas. Nesta perspectiva, percebemos que a Álgebra e o pensamento algébrico são dois conceitos que se complementam, sendo a Álgebra um ramo da matemática, que estuda a manipulação formal de estruturas algébricas, operações matemáticas compreendendo um conjunto em diferentes ramos da matemática e o pensamento algébrico são as habilidades desenvolvidas pelos alunos para compreender os conteúdos algébricos, como por exemplo, a capacidade de identificar padrões, regularidades, processo que envolve generalização de ideias matemáticas.

Em seguida, discutimos como os documentos oficiais discutem a Álgebra, analisando a BNCC e os PCN's de Matemática, abordamos o objetivo, as diferentes interpretações da Álgebra vista na Educação Básica bem como a sua importância na mesma. Os documentos afirmam que o desenvolvimento do pensamento algébrico deva ser incentivado e ensinado desde os anos iniciais do ensino fundamental, e que seu desenvolvimento seja realizado paulatinamente, durante o processo de aprendizagem, antes mesmo da abstração da Álgebra. Para isso, o professor deve ter um plano fundamentado em um planejamento adequado, para que os alunos ultrapassem as barreiras em relação às dificuldades apresentadas pelos conteúdos algébricos, desenvolvendo desde cedo o raciocínio algébrico.

Dessa forma, se torna imprenscíndivel que os professores de Matemática tenham formação adequada de modo a preparar os alunos para o desenvolvimento criativo e de padronizações, ficando claro também a importância de tratar sobre Álgebra nos cursos de Licenciatura em Matemática, relacionando-a com o ensino básico. Sobre este fato, abordamos as dificuldades apresentadas tanto do estudante, futuro professor de Matemática, quanto do estudante da Educação Básica, em conteúdos algébricos.

Sendo assim, neste trabalho, exploramos a relação entre as Estruturas Algébricas estudadas em cursos de Licenciatura em Matemática, grupos e anéis, com conteúdo de Equações do primeiro grau, vistso na Educação Básica. Neste sentido, propomos um conjunto de sequências didáticas, destacando as competências e habilidades esperada em cada uma, com base na BNCC, esperando promover uma aprendizagem significativa destes conceitos.

Para pesquisas futuras, uma das possibilidades seria aplicar as sequências didáticas nas turmas do sétimo ano do Ensino Fundamental, para concluirmos se, de fato, as sequências facilitaria e promoveria a aprendizagem esperada, ou estudo de campo com crianças desde as séries iniciais sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico. Outra possibilidade poderia ser relativo a realizar uma pesquisa envolvendo as funções sob a pespectiva de anéis, como estas podem ser caracterizadas a partir de um anel de polinômios.

REFERÊNCIAS

AGUIAR, M.; COELHO, F. U. *A história da álgebra e o pensamento algébrico: correlações com o ensino*. v. 32, p. 171–187, 2018. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/ea/a/6KryLd3HngCnBwJtWFHxSHj/>. Acesso em: 05 ago. 2024.

ARAUJO, E. A. *Ensino de álgebra e a formação de professores*. *Revista*, São Paulo, v. 10, p. 331–346, 2008. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/1740>. Acesso em: 27 mai. 2023.

BARBOSA, A.; VALE, I. Pensamento algébrico: contributo da visualização na construção da generalização. *Educação Matemática Pesquisa*, v. 21, n. 3, p. 398–418, 2019. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/29561/>. Acesso em: 15 jun. 2024.

BERTATO, F. M. *A falsa (su-) posição? Tradução dos problemas 24, 25, 26 e 27 do Papiro de Rhind*. *Revista Brasileira de História da Matemática*, v. 18, n. 36, p. 11–29, 2018. Disponível em: <https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/18/17>. Acesso em: 14 mar. 2024.

BLANTON, M.; KAPUT, J. *Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning*. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 36, p. 412–446, 2005. Disponível em: <https://pubs.nctm.org/abstract/journals/jrme/36/5/article-p412.xml>. Acesso em: 31 mar. 2024.

BONJORNO, J. R. et al. *Amplitude Matemática*. 1ª. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2022. 80–84 p.

BOYCE, W.; DIPRIMA, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da Matemática*. São Paulo: Blucher, 2012.

BRASIL, M. E. *Lei nº 9394/96, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as Diretrizes e Bases da Educação Nacional*. Brasília: MEC, 1996. Disponível em: <https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm>. Acesso em: 31 mar. 2024.

BRASIL, M. E. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 24 mai. 2024.

BRASIL, M. E. *Portaria nº 521, de 13 de julho de 2021. Institui a homologação Cronograma Nacional de Implementação do Novo Ensino Médio*. Brasília: [s.n.], 2021. 01–03 p. Disponível em: <https://abmes.org.br/arquivos/legislacoes/Portaria-mec-521-2021-07-13.pdf>. Acesso em: 07 mar. 2024.

BRASIL, S. E. F. *Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental, matemática*. Brasília: MEC, 1998. 05–122 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 15 mar. 2024.

CURY, H. N.; RIBEIRO, A. J.; MÜLLER, T. J. Explorando erros na resolução de equações: um caminho para a formação do professor de matemática. *UNIÓN - REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA*, v. 7, n. 28, 2011. Disponível em: <https://www.revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/897>. Acesso em: 01 jul. 2024.

DALARMI, T. T. Uma análise do pensamento egípicio nos problemas 24, 25, 26, 27 e 34 do papiro de rhind. Curitiba, p. 48, 2019. Disponível em: <https://acervodigital.ufpr.br/handle/1884/66454>. Acesso em: 24 mai. 2024.

DANTE, L. R. *Teláris: Matemática, 7º ano: ensino fundamental, anos finais*. 3. ed. São Paulo: Ática, 2018.

DOLZ, J.; NOVERRAZ, M.; SCHNEUWLY, B. Sequências didáticas para o oral e para o escrito: apresentação de um procedimento. In: SCHNEUWLY, B.; DOLZ, J. (Ed.). *Gêneros orais e escritos na escola*. Campinas, São Paulo: Mercado de Letras, 2004.

FILHO, E. de A. *Teoria elementar dos números*. São Paulo: Nobel, 1981.

GAY, M. R. G.; SILVA, W. R. *Araribá Mais Matemática: Ensino Fundamental - anos finais*. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2018.

GIL, A. C. *Como elaborar projetos de pesquisa*. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002. 01–176 p. Disponível em: <https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/150/o/Anexo_C1_como_elaborar_projeto_de_pesquisa_-_antonio_carlos_gil.pdf>. Acesso em: 12 ago. 2024.

GIORDAN, M.; GUIMARÃES, Y. Estudo dirigido de iniciação à sequência didática. *Especialização em Ensino de Ciências, Rede São Paulo de Formação Docente (REDEFOR).*, Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012. Disponível em: <http://www.lapeq.fe.usp.br/textos/fp/fppdf/giordan_guimaraes-redefor-sd-2012.pdf>. Acesso em: 22 ago. 2024.

GODOY, A. S. Pesquisa qualitativa: tipos fundamentais. *Revista de Administração de empresas*, v. 35, p. 20 – 29, 1995.

IEZZI, G. *Matemática e Realidade: Ensino Fundamental - Anos Finais*. 9. ed. São Paulo: Atual Editora, 2018. 239–251 p.

IEZZI, H. H. D. G. *Álgebra Moderna*. São Paulo: Atual, 2003.

JUNDU, S. Q. *Os Jogos Olímpicos de Verão: história, curiosidades, modalidades e momentos*. 2019. Disponível em: <https://superquadrajundu.com.br/jogos-olimpicos-verao/>. Acesso em: 01 de Julho 2024.

JÚNIOR, J. R. G.; CASTRUCCI, B. *A Conquista da Matemática: 8º ano - Ensino Fundamental - Anos Finais*. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018.

LELLIS, M.; IMENES, L. M. O currículo tradicional ea educação matemática. *Educação matemática em revista*, Sociedade Brasileira de Educação Matemática, v. 2, n. 2, p. 5–12, 1994. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/27687/1/Lellis2018O.pdf>. Acesso em: 04 jul. 2024.

LINS, R. C. *A framework for understanding what algebraic thinking is*. Tese (Doutorado) — School of Education, University of Nothingam, Nothingam, UK, 1992. Disponível em: <http://eprints.nottingham.ac.uk/13227>. Acesso em: 22 jul. 2024.

PAPIRO, R. Disponível em: <http://www.fisica-interessante.com/image-files/egitorhind1.jpg>. Acesso em: 15 abr. 2024.

PERETTI, L.; COSTA, G. M. T. Sequência didática na matemática. *REI – Revista de Educação do Ideau*, v. 8, n. 17, p. 1–15, 2013. Disponível em: <https://www.bage.ideau.com.br/wp-content/files_mf/7ff08743d52102854eaaf22c19c4863731_1.pdf>. Acesso em: 22 abr. 2024.

RHIND, P. Disponível em: <http://www.fisica-interessante.com/image-files/egito-rhind1.jpg>. Acesso em: 29 ago. 2024.

SAMPAIO, F. A. *Trilhas da Matemática*. São Paulo: Editora Saraiva, 2018. 113–115 p.

SQUALLI, H. *Une reconceptualisation du curriculum d'algèbre dans l'éducaction de base*. Tese (Doutorado) — Québec: Faculté des Sciences de l'Éduction, Université Laval, 2000. Disponível em: <https://library-archives.canada.ca/eng/services/services-libraries/theses/Pages/item.aspx?idNumber=1006925190>. Acesso em: 22 mai. 2024.

YARTEY, J. N. A. *Álgebra II*. Salvador - Bahia: UFBA, 2017.

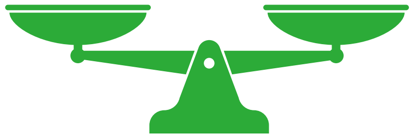
ZABALA, A. *A prática educativa: como ensinar*. Porto Alegre: Artmed, 1998. 18 p.

ZALCMAN, F. L. *Quantas medalhas o Brasil já ganhou em Jogos Olímpicos*. 2024. Disponível em: <https://olympics.com/pt/noticias/quantas-medalhas-brasil-ganhou-jogos-olimpicos>. Acesso em: 04 de Julho 2024.

APÊNDICE A – SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Prof	Data
Aluno	Série

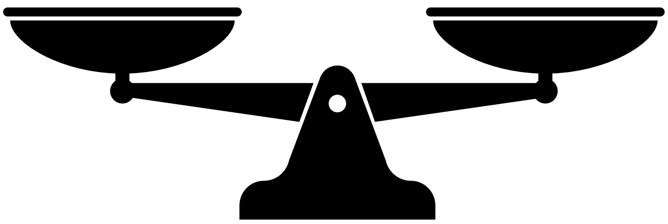
MANIPULAÇÃO DE PESOS



Atividade sobre manipulação na balança de dois pratos

Olá turma, estudamos a manipulação de frutas na balança de dois pratos, lembrando que poderíamos também manipular alguns objetos na balança. Com isso, vamos preencher a tabela abaixo de acordo com tudo aquilo que aprendemos na aula, espero que tenham prestado bastante atenção. Sucesso!

1 Vamos supor que cada peso da tabela está representado na balança, complete-a.



Balança	Prato 1	Prato 2	A balança está equilibrada ou desequilibrada?	O que fazer para equilibrar?
01	2	4		
02	3	1		
03	5	2		
04	3	3		
05	1	2		
06	4	4		
07	2	3		

2 Na balança abaixo tem-se 3 laranjas em cada prato. Responda o que se pede:

O que pode acontecer se retirarmos uma laranja do primeiro prato?

____

E se retirarmos duas laranjas do segundo, sabendo que já retiramos uma do primeiro?

____

Permanecendo a ideia anterior, agora e se adicionarmos mais uma laranja no segundo prato?

____

E se multiplicarmos a quantidade de laranjas nos dois pratos?

____

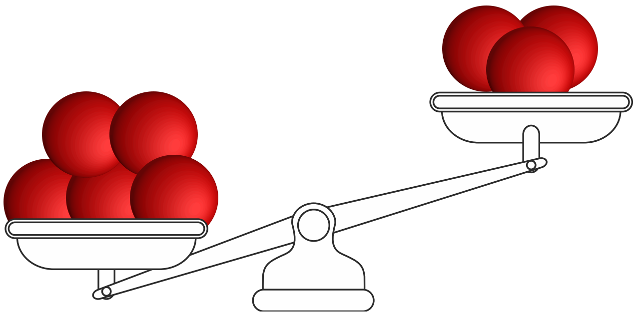
Comente sobre seu entendimento em relação a essa questão.

____

____

____

3 Observe a figura a seguir. Suponha que as bolas tenham o mesmo peso e responda o que se pede:



Quantas bolas tem em cada prato da balança?

____

Como equilibrar a balança?

____

____

E se dobrarmos o número de bolas no segundo prato atingiremos o equilíbrio? Justifique a sua resposta.

____

____

____

____

____

____

Prof	Data
Alunos	Série

INÚMEROS PADRÕES

Atividade sobre sequências

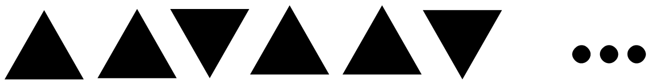
1 Classifique as sequências em recursivas ou não recursivas e complete-as:

5 $\xrightarrow{+3}$ ( ) $\xrightarrow{+3}$ ( ) $\xrightarrow{+3}$ ( ) $\xrightarrow{+3}$ ( )

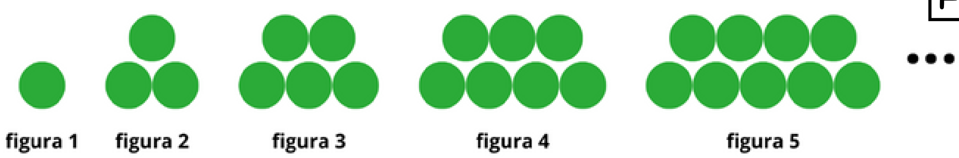
múltiplos de 6

1º termo	6
2º termo	
3º termo	
⋮	⋮
10º termo	

7	14	21		



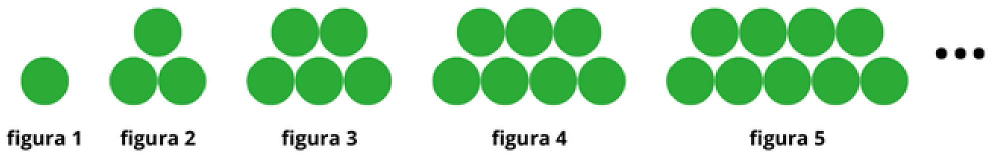
2 Bruna estava brincando com algumas bolas e as organizou conforme a imagem abaixo:



Padrões de bolinhas

Figura 1	
Figura 2	
Figura 3	
Figura 4	
Figura 5	
Figura 6	

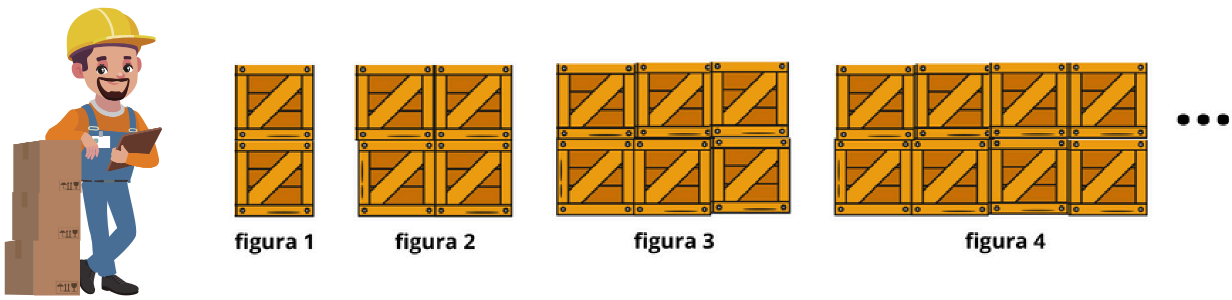
a) Preencha a tabela ao lado, conforme a quantidade de bolinhas em cada figura que Bruna organizou:



b) Existe um padrão nas figuras? Qual?

____

3 João desempenha suas atividades em uma empresa, onde sua tarefa consiste em empilhar caixotes. Seguindo a ilustração abaixo, ele empilhou os caixotes de acordo com o padrão apresentado. Analise atentamente e responda às questões correspondentes.



a) Quantos caixotes há em cada figura?

b) Desenhe a figura 5. Quantos caixotes possuem?

c) Podemos determinar a figura 10? Como?

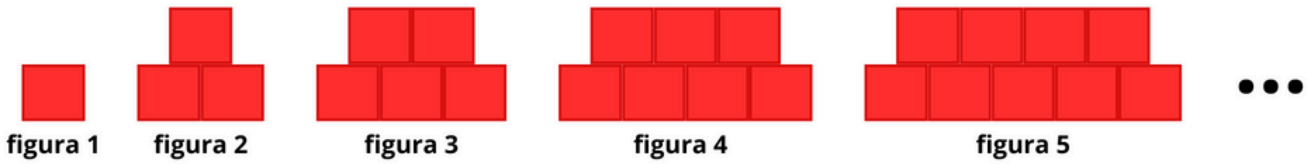
____

____

d) Existe regularidade nas figuras? Qual?

____

4 Observe o padrão das figuras abaixo.

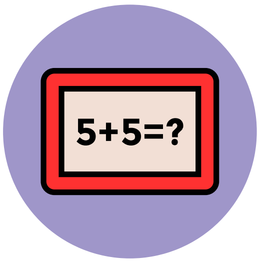


Robson, Flavi e Brena escreveram a lei de formação que determina a sequência, conforme a tabela a seguir:

Robson	$2(x+1)-4$
Flavi	$(x-6)+(x+5)$
Brena	$2x-1$

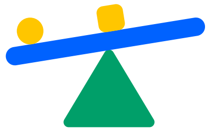
Há semelhança nas expressões? Qual? Elas são equivalentes? Explique.

Prof	Data
Aluno	Série

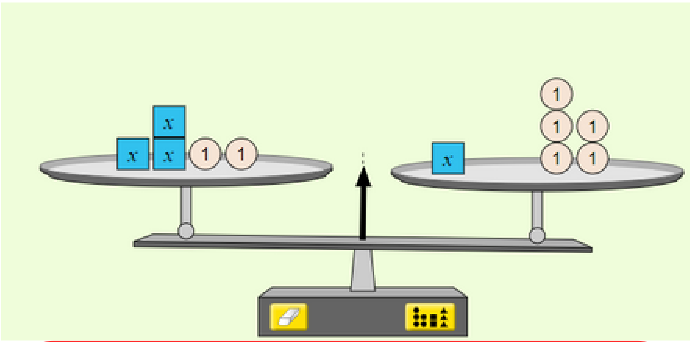


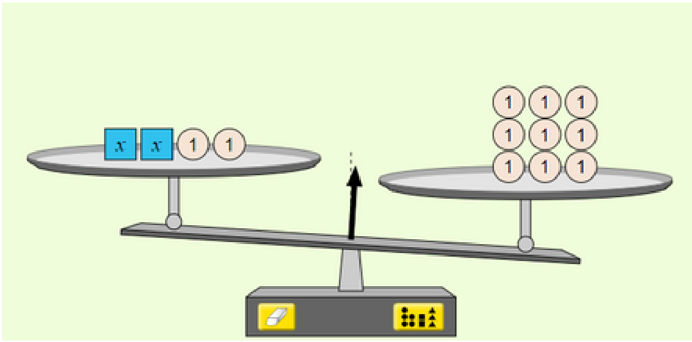
EQUACIONANDO

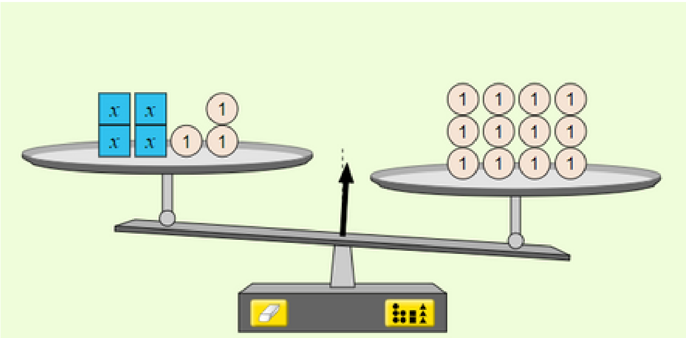
Equação polinomial do 1° grau

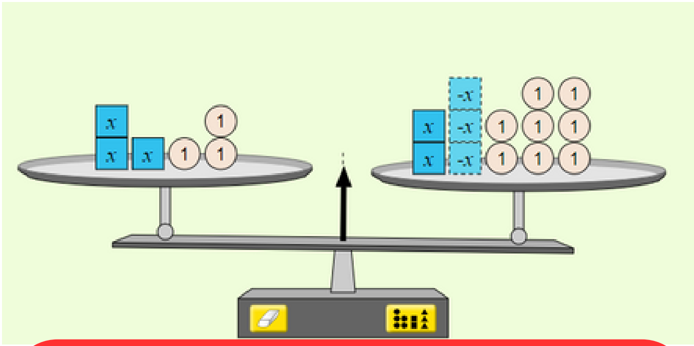


1 Transcreva qual expressão correspondente com os valores que estão no peso da balança:









2 Crie uma situação problema de equação do 1º grau e resolva:

____

____

____

____

3 O jogador Erisson organizou um torneio simples, definiu que os três times finalistas irão dividir o prêmio no valor de R$ 17.100,00 da seguinte forma:

1º lugar: ganha o triplo do valor do 2º colocado;
2º lugar: ganha o dobro do valor do 3º colocado;
3º lugar: ganha um valor X.

Quanto recebeu o 1º, 2º e o 3º colocados? Qual sentença representa o problema?

4 Agora, vamos praticar, resolva as equações a seguir:

$x-12=5$

$-x+8=2x$

$3x-1=7+1$

$5x-3=3x+4+3$

$4x-8=2x+6$

$12-2x=4x$

Prof	Data
Aluno	Série

MATH OLÍMPICA

Equação polinomial do 1° grau

1 Nos Jogos Olímpicos de Verão, realizados em Tóquio, no ano de 2020, o Brasil adquiriu nas disputas um total de 21 medalhas, sendo 6 medalhas de prata e 8 de bronze. Quantas medalhas de ouro foram adquiridas pelo país? .

____

____

____

cálculo

2 Na disputa, cada medalha vale um determinado peso. Determine quanto vale a medalha de prata.

Quanto vale o peso da medalha de prata?				
Locais dos jogos	**Ouro – peso 5**	**Prata – peso x**	**Bronze – peso 2**	**Total**
Rio 2016	7	6	6	65
Londres 2012	3	5	9	48
Pequim 2008	3	4	10	47
Antenas 2004	5	2	3	37

3 Em uma disputa de triatlo, esporte que consiste em três provas consecutivas: natação, ciclismo e corrida, uma atleta brasileira completou a competição em 7 horas. Ela gastou o dobro do tempo da natação no ciclismo e 60 minutos correndo. Quanto tempo a atleta gastou em cada prova?

4 Numa competição de ginástica rítmica, a pontuação é dada por três jurados, com notas que variam de 0 a 10. As notas dadas pelos dois primeiros jurados foram:

- 1º jurado: 8,4
- 2º jurado: 9,2

Sabendo que a soma das notas dos três jurados foram 26 pontos. Qual será a nota do 3º jurado?