

INSTITUTO FEDERAL DE  
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
BAHIA

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA BAHIA  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO LATO SENSU EM ENSINO DA MATEMÁTICA:  
MATEM@TICA NA PR@TICA NA  
MODALIDADE A DISTÂNCIA**

**ANDERSON LUIZ LUNARDELLI**

**APLICANDO UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA CONTENDO O JOGO DOS DISCOS  
PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DA PROBABILIDADE POR MEIO DA  
EXPERIMENTAÇÃO**

**EUCLIDES DA CUNHA  
2022**

**ANDERSON LUIZ LUNARDELLI**

**APLICANDO UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA CONTENDO O JOGO DOS DISCOS  
PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DA PROBABILIDADE POR MEIO DA  
EXPERIMENTAÇÃO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do grau de especialista, do Curso de Pós-graduação Lato Sensu em Ensino de Matemática: Matemática na Prática, pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia – Campus Euclides da Cunha.

Orientador: Prof. Dr. Heides Lima de Santana

**EUCLIDES DA CUNHA  
2022**

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO SIB-IFBA  
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA BAHIA**

L961a Lunardelli, Anderson Luiz  
Aplicando uma sequência didática contendo o jogo dos discos para o ensino e aprendizagem da probabilidade por meio da experimentação / Anderson Luiz Lunardelli ; orientador Heides Lima de Santana. - Euclides da Cunha, 2022.  
129 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Pós-graduação Lato Sensu em Ensino de Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia, 2022.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Matemática (Ensino médio). 3. Jogos educativos. 4. Probabilidades. 5. Aprendizagem - Matemática. I. Santana, Heides Lima de, orient. II. Título.

CDU 51-8:37

**ANDERSON LUIZ LUNARDELLI**

**APLICANDO UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA CONTENDO O JOGO DOS DISCOS  
PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DA PROBABILIDADE POR MEIO DA  
EXPERIMENTAÇÃO**

A banca examinadora, abaixo listada, aprova o Trabalho de Conclusão de Curso “Aplicando uma sequência didática contendo o jogo dos discos para o ensino e aprendizagem da probabilidade por meio da experimentação” elaborado por Anderson Luiz Lunardelli como requisito parcial para obtenção do grau de especialista do Curso de Pós-graduação Lato Sensu em Ensino de Matemática: Matem@tica na Pr@tica, pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia.

Cidade, xx de xxxxx de xxxx.

---

**Prof(a). (Dr Heides Lima de Santana – IFBA) (orientador)**

---

**Prof(a). (Dr(a)/Me. Xxxxxx Xxxxxxx – IFBA) (membro interno)**

---

**Prof(a). (Dr(a)/Me. Xxxxxx Xxxxxxx – INSTITUIÇÃO) (membro externo)**

## **DEDICATÓRIA**

Dedico este trabalho aos meus alunos e a todos os professores (as), em especial aos de Matemática. Ser professor é um grande desafio, temos muitos obstáculos em nossa jornada, dentre eles buscar garantir o melhor ensino e aprendizagem de nossos alunos, espero que esse trabalho possa inspirá-los e auxiliá-los nessa busca.

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus por estar onipresente em todos os momentos da minha vida e me proporcionar a capacidade de realizar esse trabalho.

A minha família em especial minha irmã Hélem e a meus pais Vera e Roberto, que sempre compreenderam minha ausência devido às escolhas que tomei em minha vida profissional e estão ao meu lado me apoiando, ainda que isso represente vê-los poucas vezes ao ano.

Aos meus amigos em especial ao Lucas, Laís e Alexia que sempre estiveram do meu lado e principalmente acompanharam minhas angústias e as noites em claro em que passei estudando.

A minha cachorrinha chamada Pandora, que ainda não entendesse o motivo pelo qual eu não estava brincando com ela, sempre vinha ao meu quarto de estudos ver como eu estava e às vezes dormia ao meu lado enquanto eu estava estudando ou escrevendo este trabalho de conclusão de curso.

Aos meus colegas de especialização do campus de Euclides da Cunha, por serem tão unidos e compartilharem as diferentes emoções que sentiram ao longo desses anos de curso e por estarem sempre incentivando uns aos outros a não desistirem mesmo quando o cansaço se fez presente.

Aos membros e amigos do grupo de pesquisa e formação CIEspMat da Unicamp, que tive o prazer de conhecer por meio das reuniões em que debates ricos foram desenvolvidos e que, em especial, me auxiliaram a ser mais crítico na elaboração deste trabalho.

Ao meu orientador Prof Dr. Heides Lima de Santana, pela orientação e auxílio não somente durante o desenvolvimento deste trabalho, mas também pelo seu trabalho enquanto tutor responsável pelo nosso campus.

Ao Instituto Federal da Bahia – IFBA, pelo oferecimento do curso de especialização em Ensino da Matemática. A todos meus professores dessa especialização, em especial ao professor e coordenador Prof. Dr. Alex Andrade Alves.

Agradecimento a todos meus alunos, em especial as três turmas das segundas séries do Ensino Médio do ano de 2022, que abraçaram com tanto carinho e dedicação a proposta que nesse trabalho que lhes é apresentado.



“Não se pode ensinar tudo a alguém, pode-se apenas ajudá-lo a encontrar por si mesmo o caminho”.

(Galileu Galilei)

## RESUMO

Na presente pesquisa tem-se a aplicação do experimento “O jogo dos discos” por meio da criação de uma sequência didática com sete atividades inspiradas no livro “O jogo dos Discos: Modulo 1” de Paulo Antônio Silvani Caetano e Roberto Ribeiro Paterlini. Na sequência didática as atividades possuem questões que foram criadas buscando desenvolver conceitos de eventos aleatórios ou não aleatórios, espaço amostral, cálculo de probabilidade simples e complementar e propor aos alunos a comparação entre o experimento feito em pequena e larga escala, por meio da análise das variações das probabilidades entre eles, bem como apresentar aplicações e um panorama histórico sobre a origem dos estudos da probabilidade. A pesquisa ora apresentada é de caráter investigativo bibliográfico e de campo, com abordagem qualitativa descritiva, desenvolvida com estudantes de três turmas da 2ª série do Ensino Médio de uma escola do estado de São Paulo. O uso de uma sequência didática diferente da tradicional possibilita ao professor - pesquisador e autor identificar ao aplicar as atividades que compõe essa sequência didática, os saberes desenvolvidos por meio de diferentes estratégias como história em quadrinhos, história da matemática e o jogo como um experimento propriamente aplicado em um ambiente escolar, a fim de evidenciar potencialidades e pontos de atenção respeito da (re)formulação de perguntas e até mesmo forma de proceder durante a aplicação da sequência didática. e, acima de tudo, inspirar outros professores a utilizarem esta sequência didática como recurso em sala de aula.

**Palavras-chave:** Jogo dos Discos. Sequência didática. Probabilidade. Ensino Médio.

## ABSTRACT

In this research, the experiment “O Jogo dos Discos” is applied through the creation of a didactic sequence with seven activities inspired by the book “O Jogo dos Discos: Modulo 1” by Paulo Antônio Silvani Caetano and Roberto Ribeiro Paterlini. In the didactic sequence, the activities have questions that were created in order to develop concepts of random or non-random events, sample space, calculation of simple and complementary probability and propose to the students the comparison between the experiment carried out on a small and large scale, through the analysis of the variations of probabilities between them, as well as presenting applications and a historical overview of the origin of probability studies. The research presented here is of an investigative bibliographic and field character, with a descriptive qualitative approach, developed with students from three classes of the 2nd year of high school at a school in the state of São Paulo. The use of a didactic sequence different from the traditional one allows the teacher - researcher and author to identify, when applying the activities that make up this didactic sequence, the knowledge developed through different strategies such as comics, history of mathematics and the game as an experiment in itself. applied in a school environment, in order to highlight potentialities and points of attention regarding the (re)formulation of questions and even the way of proceeding during the application of the didactic sequence. and, above all, inspire other teachers to use this didactic sequence as a resource in the classroom.

**Keywords:** Game of Discs. Following teaching. Probability. High school.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Primeira família de moedas brasileiras.....	22
Figura 2: Segunda família das moedas brasileiras.....	22
Figura 3: Resposta comentada do livro sobre acontecimento Previsível .....	39
Figura 4: Resposta para justificar a categoria “Atraso” .....	40
Figura 5: Resposta para justificar a categoria “Clima”.....	40
Figura 6: Resposta comentada do Livro sobre Acontecimento não previsível ou aleatório.....	44
Figura 7: Resposta para justificar as categorias “Chefe ganhar na loteria”; “Promoção da funcionária” e “Jornal” .....	44
Figura 8: Resposta para justificar a categoria “Chefe ganhar na loteria” .....	45
Figura 9: Resposta para justificar a categoria “Perder pen drive”.....	45
Figura 10: Respostas sobre definição de evento.....	46
Figura 11: Tabelas totalmente em branco.....	51
Figura 12: Tabela previamente preenchida.....	52
Figura 13: Tabela preenchida por pares de números e somas diagonais.....	52
Figura 14: Questões em destaque sobre o diâmetro ideal.....	54
Figura 15: Justificativas em destaque sobre o diâmetro ideal.....	54
Figura 16: Questão 1 da folha de atividades 5 .....	56
Figura 17 :Percentual de respostas em relação aos diâmetros e lançamentos favoráveis.....	59
Figura 18:Justificativa referente a relação diâmetro e lançamentos favoráveis.....	60
Figura 19: Apresentação da fórmula da probabilidade simples e perguntas de	

aplicação.....	61
Figura 20: Exemplos de respostas e representações.....	63
Figura 21: Definição de complementar de um evento e aplicação.....	64
Figura 22: Exemplos de respostas e representações de probabilidade complementar.....	65
Figura 23: Apresentação das diferentes formas de representar a probabilidade.....	67
Figura 24: Erro conceitual do cálculo de probabilidade de casos favoráveis e sua complementar.....	69
Figura 25: Algumas conclusões sobre análise do complementar e os casos favoráveis.....	70
Figura 26:Enunciado da questão 2. ....	72
Figura 27: Percentuais de votos em relação a quantidade de lançamentos.....	73
Figura 28: Observação do grupo 2 (G2) .....	74
Figura 29: Enunciado da questão 3.....	73
Figura 30: Enunciado da questão 4.....	76
Figura 31: Preenchimento da tabela dos grupos G1 e G18.....	79
Figura 32: Representação da probabilidade 0%.....	88
Figura 33: Representação da probabilidade nula.....	88

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Comparação dos aspectos da pesquisa qualitativa com os da pesquisa quantitativa.....	17
Quadro 2: Respostas sobre qual(is) o(s) Acontecimento(s) Previsível(is).....	37
Quadro 3: Respostas sobre qual(is) o(s) Acontecimento(s) não previsível(is) ou aleatório(s).....	42
Quadro 4: O que é um evento previsível ou não aleatório?.....	48
Quadro 5: O que é um evento não previsível ou aleatório?.....	49
Quadro 6: Justificativa sobre a criação de regras.....	57
Quadro 7: Respostas sobre a relação entre diâmetro e lançamentos favoráveis.....	59
Quadro 8: Analisando a relação diâmetro e lado do quadrado do tabuleiro.....	71
Quadro 9: Justificativa do motivo pelo qual a diferença nos resultados ao lançar 60 vezes e 200 vezes os objetos circulares experimento.....	80
Quadro 10: Cem lançamentos seriam o suficiente? – Análise das respostas.....	84
Quadro 11: Categorização das respostas para questão 3 (a).....	86

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Síntese dos resultados sobre evento previsível.....	39
Tabela 2: Síntese dos resultados sobre Evento previsível.....	44
Tabela 3: Síntese dos resultados sobre definição evento previsível.....	48
Tabela 4: Síntese dos resultados sobre definição evento aleatório.....	50
Tabela 5: Resultado sobre como garantir um padrão justo a ser cumprido durante as jogas.....	56
Tabela 6: Síntese sobre importância de regras no jogo.....	58
Tabela 7: Síntese dos tipos de respostas.....	62
Tabela 8: Análise dos resultados obtidos no cálculo da probabilidade complementar.....	65
Tabela 9: Resultados obtidos quanto a representação decimal e percentual dos casos favoráveis.....	68
Tabela 10: Resultados obtidos quanto a representação decimal e percentual das probabilidades complementares.....	68
Tabela 11: Síntese da análise do evento cujo diâmetro do objeto é maior que o quadriculado do tabuleiro.....	72
Tabela 12: Síntese das respostas da questão 2.....	73
Tabela 13: respostas da questão 3.....	75
Tabela 14: Medidas do diâmetro dos objetos utilizados no experimento .....	77
Tabela 15: Medidas apresentadas pelos grupos que realizaram o experimento Jogo dos discos.....	77
Tabela 16: Erros e acertos.....	78

Tabela 17: Síntese da Justificativa do motivo pelo qual a diferença nos resultados ao lançar 60 vezes e 200 vezes os objetos circulares.....	81
Tabela 18: Cem lançamentos seriam o suficiente? – Unidades de registro de categorias.....	85
Tabela 19: Síntese dos indicadores da Categorização das respostas para questão 3 (a).....	87

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO.....</b>	<b>12</b>
<b>2. REFERENCIAL TEÓRICO.....</b>	<b>15</b>
<b>3. O JOGO DOS DISCOS.....</b>	<b>18</b>
<b>4. APLICAÇÃO DA PESQUISA.....</b>	<b>19</b>
4.1. Contexto da Escola.....	19
4.2. Proposta Geral de Desenvolvimento das Atividades.....	20
4.3. Metodologia de aplicação das Atividades.....	21
<b>5. SEQUÊNCIA DIDÁTICA.....</b>	<b>23</b>
5.1. ATIVIDADE 1: É POSSÍVEL PREVER OU NÃO?.....	24
5.1.1. Justificativa.....	24
5.1.2. Objetivo.....	24
5.1.3. O que esperar dos alunos.....	25
5.1.4. Condução da atividade.....	25
5.2. ATIVIDADE 2: ESTUDO DA PROBABILIDADE.....	26
5.2.1. Justificativa.....	26
5.2.2. Objetivo.....	26
5.2.3. O que esperar dos alunos.....	26
5.2.4. Condução da atividade.....	26
5.3. ATIVIDADE 3: BINGO DAS PROBABILIDADES.....	28
5.3.1. Justificativa.....	29
5.3.2. Objetivo.....	29
5.3.3. O que esperar dos alunos.....	29
5.3.4. Condução da atividade... ..	30
5.4. ATIVIDADE 4: E O IMPROVISO QUE VIROU MATEMÁTICA.....	30
5.4.1. Justificativa.....	31
5.4.2. Objetivo. ....	31
5.4.3. O que esperar dos alunos.....	31
5.4.4. Condução da atividade.....	31
5.5. ATIVIDADE 5: ETAPA I - DO JOGO DOS DISCOS.....	31
5.5.1. Justificativa. ....	32
5.5.2. Objetivo.....	32
5.5.3. O que esperar dos alunos.....	32

5.5.4. Condução da atividade.....	32
5.6. ATIVIDADE 6: EPATA II- EXPERIMENTO EM LARGA ESCALA.....	33
5.6.1. Justificativa.....	33
5.6.2. Objetivo.....	33
5.6.3. O que esperar dos alunos.....	34
5.6.4. Condução da atividade.....	34
5.7. ATIVIDADE 7: EPATA III - ANÁLISE DOS EXPERIMENTOS.....	34
5.7.1. Justificativa.....	34
5.7.2. Objetivo. ....	34
5.7.3. O que esperar dos alunos.....	35
5.7.4. Condução da atividade.....	35
<b>6. DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS.....</b>	<b>35</b>
6.1. ATIVIDADE 1: É POSSÍVEL PREVER OU NÃO?.....	36
6.1.1. Evento previsível.....	37
6.1.2. Evento não previsível ou aleatório.....	42
6.1.3. Explorando o conceito de evento.....	46
6.1.4. Explorando o conceito de evento previsível e evento aleatório.....	47
6.1.4.1. Evento previsível.....	47
6.1.4.2. Evento aleatório.....	49
6.2. ATIVIDADE 3: BINGO DAS PROBABILIDADES.....	51
6.2.1. Montando a tabela de todas as possibilidades.....	51
6.2.2. O espaço amostral.....	53
6.3. ATIVIDADE 4: E O IMPROVISO QUE VIROU MATEMÁTICA.....	53
6.4. ATIVIDADE 5: ETAPA I - JOGO DOS DISCOS.....	55
6.4.1. Definindo regras.....	55
6.4.2. Por que definir regras?.....	57
6.4.3. O diâmetro dos objetos.....	58
6.4.4. Cálculo da probabilidade.....	61
6.4.5. Evento complementar.....	64
6.4.6. É hora de explorar saberes.....	67
6.5. ATIVIDADE 6: ETAPA II - EXPERIMENTO EM LARGA ESCALA.....	70
6.5.1. Quantidade de lançamentos e diâmetro .....	71
6.5.2. Comparando quantidade de lançamentos.....	72
6.5.3. Lançamentos agrupamos .....	74

6.5.4. Medindo diâmetro.....	75
6.5.5. Cálculo de probabilidades simples .....	78
6.6. ATIVIDADE 7: ETAPA III - ANÁLISE DOS EXPERIMENTOS.....	80
6.6.1. Comparando as quantidades de lançamentos .....	80
6.6.2. Cem ou duzentos lançamentos?.....	83
6.6.3. Debatendo sobre o diâmetro dos objetos.....	86
6.6.3.1. O diâmetro pode ser maior que os lados para eventos favoráveis.....	86
6.6.3.2. Probabilidade de um evento impossível.....	88
<b>7. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>89</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>91</b>
<b>APÊNDICE.....</b>	<b>94</b>

## 1. INTRODUÇÃO

Os conhecimentos sobre a probabilidade são fundamentais para a compreensão dos fenômenos naturais e do cotidiano. Sendo assim, a aprendizagem da probabilidade tem um papel de grande importância no cenário escolar, principalmente na área de Matemática e suas Tecnologias. (CAETANO; PATERLINI, 2013).

A aprendizagem de probabilidade é citada em diversos documentos educacionais oficiais.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) sugerem que o desenvolvimento da temática probabilidade seja abordado por meio de situações de aprendizagem que orientem os estudantes a coletar, organizar e analisar informações (BRASIL, 2000).

Na matriz de referência para o ENEM, tem-se que, ao final do Ensino Médio, é esperado que o discente tenha desenvolvido a competência de “Compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.” (BRASIL- Matriz de referência, 2015, p. 17).

Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a competência 3 aponta a probabilidade dentre “as habilidades indicadas para o desenvolvimento da competência que estão relacionadas à interpretação, construção de modelos, resolução e formulação de problemas matemáticos” (BRASIL, 2018, p. 527).

Apesar da importância da aprendizagem da probabilidade citada anteriormente, ainda se tem um baixo desempenho dos alunos do Brasil em relação ao tema. Segundo o relatório do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) do ano de 2017, apenas 21,7% dos estudantes conseguem compreender a probabilidade da ocorrência de um evento simples ou independente e da união de eventos (BRASIL, 2017).

Partindo do pressuposto de Gerhardt e Silveira (2009, p.12) que afirma que “Pesquisar, portanto, é buscar ou procurar resposta para alguma coisa” e pensando no contexto da importância da aprendizagem da probabilidade, surgiu a questão: “Como promover a melhor aprendizagem de probabilidade desde pensar o histórico e tomada da decisão até o cálculo de probabilidades simples e complementar, em suas diferentes formas de representação?”

A fim de buscar uma resposta mais inovadora, pensou-se na proposta da realização do trabalho de pesquisa intitulado “Aplicando uma sequência didática contendo o jogo dos discos para o ensino e aprendizagem da probabilidade por meio da experimentação”. Como aponta Alcântara (2014, p. 20), “Dentro do universo dos saberes matemáticos, é relevante a necessidade de se adotarem métodos de aprendizado ativo e interativo (jogos, experimentos, debates, etc.)”.

Além disso, vale ressaltar que:

O Jogo dos Discos desempenha um papel importante no aprendizado do conceito de probabilidade, pois possibilita, através de uma atividade lúdica e investigativa, uma comparação de mais de uma maneira de se calcular a probabilidade de ocorrência de um determinado evento. (DANTAS,2014, p.27)

Partindo desses princípios, a pesquisa foi realizada por meio sete atividades que foram uma sequência didática referente ao experimento “Jogo dos Discos” presente no livro “Jogo dos discos: módulo I” (CAETANO; PARTELINI, 2013) sendo aplicada em três turmas da segunda série do Ensino Médio de uma escola do estado de São Paulo. Valendo destacar de a atividade chamada “Bingo das probabilidades” é totalmente autoral, não sendo inspirada no livro texto, mas que ao ser inserida potencializa a sequência didática.

Durante e após a aplicação, foi realizada uma análise de como acontece o processo de ensino e aprendizagem de probabilidade levando em conta a visão dos alunos e do professor - pesquisador autor deste trabalho. Buscando desenvolver a aprendizagem dos principais conceitos relacionados a probabilidade até os cálculos propriamente ditos de probabilidade simples e/ou até mesmo condicional e constatando, por meio dos dados coletados, os pontos de relevância da aplicação de uma atividade de experimentação ao analisar como acontece a construção de pensamentos e cálculos de probabilidade dos alunos por meio da prática experimentação proposta no livro Jogo dos Discos.

Espera-se que por meio da aplicação da sequência didática promover a aprendizagem dos principais conceitos necessários para que os alunos possam desenvolver desde o pensar em relação a probabilidade até os cálculos propriamente ditos de probabilidade simples e/ou até mesmo condicional. Constatar, por meio dos dados coletados, os pontos de relevância da aplicação de uma atividade de experimentação. Analisar como acontece a construção de pensamentos e cálculos de probabilidade dos alunos por meio da prática experimentação proposta no Jogo dos

Disco. Inspirar os leitores a refletir e utilizar práticas pedagógicas voltadas à experimentação em sala de aula. Mostrando que é possível através de um experimento desenvolver o pensamento e o cálculo de probabilidade.

De forma mais detalhada no decorrer do desenvolvimento da pesquisa tem-se dois objetivos específicos a serem analisados.

O primeiro diz respeito ao que é esperado em relação aos alunos, onde se busca que eles possam compreender a importância e a história do estudo de probabilidades, desenvolvendo o pensar matemático na probabilidade; reconhecer e desenvolver o que é experimento aleatório e um evento do campo da probabilidade; calcular probabilidade simples e complementar por meio da análise da atividade de experimentação proposta e possam inferir conceitos de probabilidades.

Já o segundo parte do ponto de vista do professor - pesquisador, que é aquele que produz conhecimento enquanto ensina e vice-versa. (MARTINS; SANTOS, 2020), onde espera-se através do experimento seja possível observar como acontece o processo de experimentação dentro da sala de aula, com alunos atuando de forma coletiva e/ou de forma individual, realizar apontamentos de melhorias e pontos positivos em um modelo de aprendizagem por experimentação ao analisar como o procedimento de aplicação da sequência didática ocorreu e inferir sobre a utilização de experimentos, para desenvolver o pensamento e cálculo de probabilidades.

Do ponto de vista do professor - pesquisador, que é aquele que produz conhecimento enquanto ensina e vice-versa (MARTINS; SANTOS, 2020), espera-se que através do experimento seja possível observar como acontece o processo de experimentação dentro da sala de aula, com alunos atuando de forma coletiva e/ou de forma individual e por meio da análise das informações possa-se realizar apontamentos de melhorias e pontos positivos em um modelo de aprendizagem por experimentação ao analisar como o procedimento de aplicação da sequência didática ocorreu.

A estruturação para apresentação desta pesquisa, foi construída ao longo de sete capítulos com seções que ajudam a deixar a leitura mais dinâmica, interessante e clara.

Logo no capítulo 1 é possível compreender a proposta da pesquisa no que tange a sua intencionalidade, motivação para acontecer, objetivos gerais da pesquisa e materiais usados.

Nos capítulos 2 e 3 é apresentado ao leitor o referencial teórico da pesquisa e parte da metodologia de trabalho, a fim de que se entenda a escolha das técnicas de análises, a forma como as atividades que compõe a sequência didática e que possui diferentes questões foram elaboradas e é apresentada a proposta do trabalho no âmbito histórico da origem do Jogo dos Discos.

No capítulo 4 o leitor consegue imergir no ambiente em que a pesquisa foi desenvolvida e ter uma visão geral de como as atividades foram desenvolvidas.

Nos capítulos 5 e 6 é a apresentação detalhada de cada atividade que compõe a sequência didática e como cada uma se desenvolveu, além de uma análise das questões que compõe cada atividade, onde se tem imagens ilustrando as respostas dos próprios alunos e também quadros organizando os resultados que são analisados sob uma perspectiva que busca entender como os alunos desenvolveram as suas respostas sejam elas as esperadas ou não.

Por fim, no capítulo 7 as considerações elucidam um pouco de como aconteceu o movimento de aplicação da sequência didática levantando pontos de vista do professor-pesquisador sob o que foi possível desenvolver e propor reflexões sobre a importância de confiar que as atividades diferentes das tradicionais possuem grandes potencialidades para dentro da sala de aula. Além de, comentar sobre os resultados obtidos na pesquisa.

## **2. REFERENCIAL TEÓRICO E METODOLÓGICO**

A revisão da literatura foi feita de forma narrativa, através da análise e prática guiada pelo livro Jogo dos discos, módulo I (CAETANO; PATERLINI, 2013), que é a base para a criação das atividades presentes na pesquisa.

O uso de jogos principalmente quando trabalhado no ensino médio merece um destaque quando relacionado com o ensino da probabilidade, uma vez que Bernardes (1987) destaca:

(...) o ensino de Matemática se deve ocupar mais de uma forma de pensar do que de uma forma de escrever fórmulas ou numerais, se o ensino da Matemática se deve ocupar mais da tomada consciente de decisões do que do estrito cálculo, então a teoria das probabilidades "é fundamental".  
(BERNARDES, 1987, p.13)

Sendo assim a proposta de utilizar uma sequência didática ao qual parte dela é baseada em um jogo que consiste em repetir uma ação pelo prazer da repetição acaba por transformar o jogo de exercício em um jogo de experimentação e assim a própria atividade assume importância maior que o resultado em si, possibilitando que

os alunos analisem mais do que simplesmente as respostas mas sim o processo propiciado pelo jogo (ZAIA, 2012).

Além disso, o ato de jogar propriamente dito deve ser um processo sem pressa e explorado a cada momento em que se aplica o jogo afim de potencializar o aprendizado dos alunos, pois, como afirma DE MACEDO, PETTY e PASSOS (2000):

A ação de jogar, aliada a uma intervenção do profissional, “ensina” procedimentos e atitudes que devem ser mantidos ou modificados em função dos resultados obtidos no decorrer das partidas. Assim, ao jogar, o aluno é levado a exercitar suas habilidades mentais e buscar melhores resultados (DE MACEDO, PETTY, PASSOS, 2000, p. 20).

Em conseqüente, cabe ao profissional instigar os alunos e analisar suas ações em diferentes aspectos que vão desde a forma como jogam até mesmo as estratégias adotadas para tal ação (DE MACEDO, PETTY, PASSOS, 2000) transformando o ato de jogar em uma ação que fornece diversas possibilidades de desenvolver o conhecimento dos alunos.

A estruturação e parte das reflexões seguem a proposta de exploração de conceitos de probabilidade por meio de metodologias investigativas a fim de demonstrar a importância do conhecimento de probabilidade na formação cognitiva do aluno por meio de uma reflexão teórico-prática à luz de atividades lúdicas em destaque ao jogo dos discos (DANTAS, 2014).

A proposta da pesquisa foi adentrar, desenvolver e explorar conceitos de probabilidades por meio da sequência didática, que contém atividades com diferentes questões. Dentre estas atividades se tem a aplicação do jogo propriamente dito, que se baseia em calcular a probabilidade de um disco cair (probabilidade de casos favoráveis), ou não (probabilidade complementar), dentro do quadriculado do tabuleiro determinado pelo jogo (ALBURQUERQUE, 2015).

Na busca de estimular o desenvolvimento dos alunos dos conceitos de probabilidades que trazem do ensino fundamental e com a finalidade de aprofundar e explorar conceitos e teorias além de mostrar aplicações práticas, o uso de jogos se mostrou eficaz e dinamizou as aulas ao tornarem os alunos protagonistas do desenvolvimento dos saberes (ALCÂNTARA, 2014).

Vale ressaltar que, na pesquisa, também foi observado se as habilidades apontadas pelo Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) foram desenvolvidas durante a aplicação do experimento.

Para fundamentação da sequência didática, foram definidos dois tipos de questionamentos, sendo eles questões objetivas e questões dissertativas, isto é, os dados a serem coletados são mistos, qualitativos e quantitativos, uma vez que eles fornecem informações que se complementam (ver Quadro 1).

Quadro 1: Comparação dos aspectos da pesquisa qualitativa com os da pesquisa quantitativa

<b>Aspecto</b>	<b>Pesquisa Quantitativa</b>	<b>Pesquisa Qualitativa</b>
Enfoque na interpretação do objeto	Menor	Maior
Importância do contexto do objeto pesquisado	Menor	Maior
Proximidade do pesquisador em relação aos fenômenos estudados	Menor	Maior
Quantidade de fontes de dados	Uma	Várias
Ponto de vista do pesquisador	Externo à organização	Interno à organização
Quadro teórico e hipóteses	Definidas rigorosamente	Menos estruturadas

Fonte: GERHARDT; SILVEIRA (2009, p.33).

A coleta de dados aconteceu por questionários mistos a fim de complementar a pesquisa de dados e verificação do alcance dos objetivos previstos na pesquisa. Com base na forma de como foi feita a coleta de dados é possível observar que os dados qualitativos terão maior destaque, todavia os dados também serão quantitativos uma vez que como afirma Zanella (2013, p.96): “a pesquisa quantitativa é apropriada para medir tantas opiniões, atitudes e preferências como comportamentos”.

A coleta de dados quantitativos foi utilizada principalmente com a finalidade de quantificar a opinião dos grupos participantes perante algumas questões, cujas respostas foram analisadas partindo apenas de alguns parâmetros previamente definidos para a pesquisa, pois como aponta Zanella (2013, p. 102) “A maioria dos pesquisadores qualitativos parte de questões ou focos de interesse mais amplos, que vão se tornando mais específicos à medida que transcorre a investigação”.

Após a coleta dos dados (respostas das questões), houve a sua transcrição e as respostas das questões objetivas são analisadas por meio da frequência relativa, por meio de tabelas e conclusões. Em relação ao tratamento das questões dissertativas, optou-se por utilizar a Análise do Conteúdo por ser uma técnica de investigação confiável e com maior aceitação e utilização em trabalhos de investigação educacional, quando se trata de dados qualitativos (OLIVEIRA et al., 2003).

A análise do conteúdo baseia-se na categorização de dados classificados e reduzidos (LIMA; PACHECO, 2006) por meio da escolha de categorias que serão criadas a partir da análise dos indicadores coletados nas atividades entregues pelos alunos. Essas categorias se referem a palavras ou frases curtas que melhor possibilitam a associação dos indicadores que possuem interpretação similares, porém estão escritos de formas diferentes. Sendo assim, analisamos e comparamos as diferentes respostas coletadas e criar categorias que possibilitem uma análise mais significativa de quais conclusões os grupos chegaram (FRANCO, 2005).

### 3. O JOGO DOS DISCOS

Segundo Caetano e Paterlini (2010), a proposta do Jogo dos Discos, como chamamos atualmente, vem do século XVIII, na França onde era moda ladrilhar os pisos de castelos e jardins com retas horizontais e verticais se cruzando e formando uma espécie de malha quadriculada<sup>1</sup>.

As crianças ao observarem essa forma de ladrilhamento logo utilizaram-na como um grande tabuleiro, onde ao fazer lançamentos aleatórios de moedas nele, apostava-se que a moeda pararia no interior do ladrilho, surgindo o Jogo dos Discos.

Com o passar do tempo o jogo ao se popularizar chamou a atenção para quais seriam os fatores que contribuiriam para ganhar a aposta da moeda estar inteiramente dentro do ladrilho. Sendo assim, em 1777 o matemático e naturalista Georges Louis Leclerc, também conhecido como Conde de Buffon, discutiu através do livro a probabilidade de ganho no Jogo dos Discos e o problema da agulha, a questão de ganhos e perdas nas apostas. Em relatos históricos diz-se que esse foi o primeiro tratado conhecido sobre a Probabilidade Geométrica (CAETANO; PATERLINI, 2010),

Em relação às regras do jogo a literatura aponta basicamente duas regras (que foram tomadas como ponto de partida para a aplicação do experimento):

REGRA 1: As moedas que seriam contadas como casos favoráveis são apenas aquelas que caíssem totalmente dentro do quadriculado do tabuleiro;

REGRA 2: Moedas sobrepostas ou que saíssem do tabuleiro deveriam ser relançadas, após esses relançamentos os casos favoráveis são contabilizados e

---

<sup>1</sup> **Malha quadriculada** é um quadro com linhas e colunas que formam quadradinhos de mesma medida. Disponível em: <  
[https://sme.goiania.go.gov.br/conexaoescola/ensino\\_fundamental/malha-quadriculada/](https://sme.goiania.go.gov.br/conexaoescola/ensino_fundamental/malha-quadriculada/)> .  
Último acesso em: 06/07/2022.

registrados juntamente com os casos favoráveis já ocorridos no arremesso onde aconteceu a sobreposição das moedas ou a saída do tabuleiro.

Uma vez que jogos “envolvem regras e interação social, e a possibilidade de fazer regras e tomar decisões juntos é essencial para o desenvolvimento da autonomia” (Kammi,1992, p.172) ao discutir com os alunos maneiras de tornar o jogo mais justo definiu-se também duas novas regras:

REGRA 3: A distância do jogador ao tabuleiro é definida por uma carteira da sala de aula virada de forma vertical, o que mantém uma distância de aproximadamente 70 cm entre o jogador que arremessa e o tabuleiro.

REGRA 4: Nos grupos deve acontecer um revezamento entre os participantes ao arremessar os discos (moedas e botões).

Vale ressaltar que no decorrer das etapas do jogo, por se tratar de algo de longa duração e repetidos lançamentos, alguns grupos optaram por realizar o lançamento sentados.

#### **4. APLICAÇÃO DA PESQUISA**

Neste capítulo serão abordados os aspectos relacionados ao contexto, metodologia de aplicação das atividades, condução das atividades e metodologia de pesquisa.

##### **4.1. CONTEXTO DA ESCOLA**

A escola onde foi aplicada a pesquisa apresentada neste trabalho é uma instituição de ensino filantrópica privada e sem fins lucrativos, com cerca de 40 instituições espalhadas pelo Brasil, que busca promover educação de qualidade, humanista e gratuita desde o início da jornada escolar até a conclusão do ensino médio, atuando com a população em sua grande maioria de comunidades carentes situadas nos arredores de onde cada uma das instituições se localizam.

A instituição fica localizada na cidade de Campinas, onde aconteceu a aplicação da pesquisa, possui no ensino médio um total de nove turmas, sendo três turmas para cada série, sendo seguida uma distribuição entre dois períodos de modo que duas turmas de cada série estão no período da manhã e uma turma de cada série no período da tarde, com em média 40 alunos por turma.

Vale ressaltar que a instituição onde foi aplicada a proposta de atividade já atua com a Novo Ensino Médio<sup>2</sup> desde o ano de 2020, possuindo dois itinerários formativos: qualificação e experimentação da proporção de uma turma para duas turmas de cada itinerário respectivamente.

#### 4.2. PROPOSTA GERAL DE DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES

Ao iniciar a aplicação das atividades propostas neste trabalho, foi apresentado aos alunos um panorama geral que a sequência didática seria usada como base para a elaboração de um trabalho de conclusão de curso de um curso de especialização ao qual o professor - pesquisador estava cursando e eles haviam demonstrado grande interesse em conhecer mais sobre a universidade que estava por detrás do curso e entenderem melhor como acontece a formação continuada de um professor.

Também ficou claro para os alunos que a participação deles nas atividades seja de forma ativa ou não serviria de base para atribuir uma parte da nota da avaliação 1, que na instituição de ensino chama-se de avaliação diversificada, o que permite que atividades diferenciadas, isto é, avaliações não tradicionais que não se baseiem apenas exercícios dissertativos ou de múltipla escolha sejam aplicadas aos alunos.

Para essa sequência didática, a proposta é desenvolver alguns conceitos de probabilidade, sendo ela o primeiro contato, no Ensino Médio, dos alunos com esse tema. No decorrer das atividades a proposta foi desenvolver os conceitos de tipos de eventos, espaço amostral, probabilidade simples e complementar, cálculo de probabilidades e suas diferentes formas de representação (fracionária, decimal e percentual).

Procurou-se desenvolver a sequência didática com base nos PCNs e BNCC.

Nos PCNs do Ensino Médio (2000, p. 41), é apresentado que o professor deve propor atividades com desafios ao aluno: “(...) Habilidades como selecionar informações, analisar as informações obtidas e, a partir disso, tomar decisões exigirão linguagem, procedimentos e formas de pensar matemáticos que devem ser desenvolvidos (...)”, sendo assim, a sequência busca explorar a discussão entre pares e utilização de linguagem matemática.

---

<sup>2</sup> A Lei nº 13.415/2017 alterou a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional e estabeleceu uma mudança na estrutura do ensino médio.

Na BNCC buscou-se abordar as seguintes habilidades:

(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade. (EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos. (EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades. (BRASIL, 2018, p. 533)

Sendo assim, as atividades propostas buscaram desenvolver o pensamento matemático dos alunos por meio de desafios, reflexões, investigação, experimentação e discussões.

#### 4.3. METODOLOGIA DE APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES

As atividades buscaram desenvolver alguns dos principais conceitos de probabilidade que perpassam pela distinção dos tipos de eventos e suas conceituações, análise e construção de espaços amostrais, análise de probabilidade observando o espaço amostral, cálculo de probabilidades simples e complementar e aplicação da probabilidade em situações hipotéticas e do cotidiano. Sendo assim, essas atividades foram divididas em quatro momentos:

1º momento: Apresentação detalhada da atividade;

2º momento: Estudo do material de suporte (vídeos ou textos);

3º momento: Atividade prática (questionário de conclusões e/ou experimento)

4º momento: Considerações das atividades.

A apresentação das atividades busca orientar os alunos sobre o que é atividade e de que maneira ela será realizada (individual, em parcerias ou mistas). O material de suporte tem a função de desenvolver e guiar os alunos a realizarem as atividades e atingirem os objetivos previstos nelas e na atividade prática foram registradas e entregues ao professor pesquisador para análise e serviram como base para a realização das considerações finais das atividades.

Em relação aos materiais usados para o experimento foram usados um total de 13 potes, sendo eles: 4 potes de botões de camisa; 4 potes de botões pequenos; 3 potes de moedas de R\$ 0,10 e 2 potes de moedas de R\$ 0,25.

Em relação a utilização das moedas, vale ressaltar que é uma tarefa árdua a quem opta por aplicar o Jogo dos Discos conseguir a quantidade de moedas suficientes, observando a Figura 1 e Figura 2, as moedas de R\$ 0,10 de um modelo para outro possuem variação no diâmetro.

Figura 1: Primeira família das moedas brasileiras.

## PRIMEIRA FAMÍLIA DAS MOEDAS BRASILEIRAS

A Primeira Família de moedas do Real continua em circulação.  
Conheça todas as características técnicas.

Valor Facial (R\$)	Diâmetro (mm)	Peso (g)	Espessura (mm)	Borda	Material
0,01	20,00	2,96	1,20	Liso	Aço Inoxidável
0,05	21,00	3,27	1,20	Liso	Aço Inoxidável
0,10	22,00	3,59	1,20	Liso	Aço Inoxidável
0,25	23,50	4,78	1,40	Liso	Aço Inoxidável
0,50	23,00	3,92	1,20	Liso	Aço Inoxidável

Fonte: Banco Central do Brasil, disponível em: <  
<https://www.bcb.gov.br/cedulasemoedas/mdprimeirafamilia>> . Último acesso em: 03/07/2022

Devido ao fato de as moedas possuírem variações é importante que o professor tenha acesso às medidas oficiais também das moedas da segunda família das moedas brasileiras e assim possa comparar e verificar qual ou quais são as mais adequadas para que se mantenha um padrão na realização do experimento.

Figura 2: Segunda família das moedas brasileiras.

## SEGUNDA FAMÍLIA DAS MOEDAS BRASILEIRAS

Conheça todas as características técnicas.

Valor Facial (R\$)	Diâmetro (mm)	Peso (g)	Espessura (mm)	Borda	Material
0,01	17,00	2,43	1,65	Liso	Aço revestido de cobre
0,05	22,00	4,10	1,65	Liso	Aço revestido de cobre
0,10	20,00	4,80	2,23	Serrilhado	Aço revestido de bronze
0,25	25,00	7,55	2,25	Serrilhado	Aço revestido de bronze
0,50 (1998 a 2001)	23,00	9,25	2,85	legenda * ORDEM E PROGRESSO * BRASIL	Cuproníquel
0,50 (2002 em diante)	23,00	7,81	2,85	legenda * ORDEM E PROGRESSO * BRASIL	Aço Inoxidável
1,00 (1998 a 2001)	27,00	7,84	1,95	Serrilha intermitente	Cuproníquel (núcleo) e Alpaca (anel)
1,00 (2002 em diante)	27,00	7,00	1,95	Serrilha intermitente	Aço Inoxidável (núcleo) e aço revestido de bronze (anel)

Fonte: Banco Central do Brasil, disponível em: <  
<https://www.bcb.gov.br/cedulasemoedas/mdprimeirafamilia>> . Último acesso em: 03/07/2022.

Ao analisar as informações, definiu-se que nesse experimento seria utilizado:

No pote tipo 1: moedas de R\$ 0,10 apenas moedas de aço inoxidável e foi necessário usar também moedas de R\$ 0,05 de aço revestido de bronze, isso foi possível pois ambas tinham o mesmo diâmetro que é 22,00 mm = 2,2 cm. No pote tipo 2: moedas de R\$0,25 continham apenas moedas de aço revestido de bronze, cujo diâmetro é 25,00 mm = 2,5 cm. No pote tipo 3: Botões pequenos com diâmetro de 7 mm = 0,7 cm. No pote tipo 4: Botões de camisa com diâmetro de 11 mm = 1,1 cm.

Foram confeccionados (pelo professor-pesquisador) em cartolinas um total de 7 tabuleiros, que possuíam variação nas espessuras de suas linhas, as quais foram classificadas como fina, média e grossa, com as medidas: Fina: feita a caneta com espessura de traço de 0,4 mm; Média: feita a canetinha com espessura de traço de 1 mm e Grossa: feita com “canetão” com espessura de traço de 3 mm.

A proposta de se apresentar as informações sobre as espessuras das linhas usadas em cada tabuleiro, vem da possibilidade de em continuidade a esse trabalho desenvolver discussões sobre a influência da espessura das linhas nas probabilidades, uma vez que no Livro O jogo dos Discos, p. 19 é levantada a seguinte questão para reflexão: “4. O estudante, ao desenhar um quadriculo, usou um pincel de ponta grossa que faz linhas de 3 mm. O que muda?” e em seguida, na p. 20 faz o seguinte apontamento: “É importante que a espessura das linhas do quadriculado seja a mais fina possível, caso contrário o tamanho dessa espessura pode influenciar na probabilidade de ganho do jogador”. No presente trabalho esse tópico não será analisado, pois não faz diferença na intencionalidade do projeto de análise das probabilidades, e o foco é no processo de experimentação e os conhecimentos desenvolvidos pelos alunos.

## 5. SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo serão apresentadas as atividades aplicadas pelo professor pesquisador, seguindo a proposta do livro “*Matemática na Prática, Módulo 1*” de Paulo Antônio Silvani Caetano e Roberto Ribeiro Paterlini (2013), sendo algumas dessas atividades autorais, adaptadas e outras retiradas diretamente do livro.

O trabalho foi realizado com alunos de três turmas (aproximadamente 110 alunos), da 2ª série do Ensino Médio regular, sendo duas turmas do período da manhã e uma do período da tarde no ano de 2022. A escolha dessas turmas foi devido ao conteúdo abordado na presente pesquisa e o plano de ensino da instituição.

Durante a formulação das respostas nas folhas de atividades, procurou-se não interferir e nem dar sugestões de respostas, sendo assim nesses momentos os diálogos ficaram restritos apenas ao esclarecimento de dúvidas referente ao enunciado das perguntas.

Com o intuito de melhor explicar e detalhar a proposta que permeia cada uma das atividades que compõem a sequência didática, subdividiu-se a apresentação em partes, sendo elas: Apresentação, Justificativa; Objetivos; O que esperar dos alunos

e Condução da atividade.

### 5.1. ATIVIDADE 1: É POSSÍVEL PREVER OU NÃO?

Essa atividade trata-se da leitura de uma história em quadrinhos disponibilizada pelo livro “O jogo dos Discos” (p. 11 e 12) e presente no Apêndice I , nela é apresentada uma sequência de fatos que aconteceram em uma manhã da personagem do sexo feminino, sem nome identificado, apresenta-se algumas ilustrações e balões de falas.

Logo após a história se tem 5 perguntas dissertativas, sendo duas delas retiradas da proposta do livro texto, e três autorais com suas devidas intencionalidades.

#### 5.1.1 Justificativa

Uma questão muito presente nas aulas de Matemática são os questionamentos do porquê aprender e/ou onde será usado/ aplicado determinado conteúdo matemático, seja no cotidiano ou nas futuras profissões, e tais questionamentos devem buscar ser sanados pelo professor, pois, muitas vezes a resposta obtida é um fator decisivo no quanto o aluno dará importância em aprender tal conceito (GHIGGI, M.; VEBBER, G. C.; TRAMONTINA, 2020). Sendo assim, a atividade *é possível prever ou não*<sup>3</sup>, mostra grande potencial ao trazer aos alunos uma noção da aplicação do conceito no cotidiano além de desenvolver o pensamento do que é um acontecimento previsível e não previsível, bem como direcionar o aluno a *conceituar*<sup>4</sup> o que é um evento (de forma geral), um evento aleatório e evento não aleatório.

#### 5.1.2 Objetivo

Reconhecer o caráter aleatório de fenômenos/eventos naturais, científico-tecnológicos ou sociais, compreendendo o significado e a importância da probabilidade como meio de prever resultados e diferenciar eventos previsíveis de não

---

<sup>3</sup> - Originalmente no livro usado como base para a elaboração das atividades, a história chama-se “ Um dia de cão... É possível prever ou não?”, porém o autor decidiu por simplificar o título.

<sup>4</sup> Utilizou a palavra “conceituar” partindo que o ato de conceituar “é uma atividade de compreensão do objeto em estudo e da criação subjetiva de significados pelo estudante (LAUDARES,2013, p.9)” e “definir” refere-se a um nível de formalização matemática no que tange “manipular símbolos, registros, sinais da linguagem específica da área de conhecimento ( LAUDARES,2013, p.9 )”.

previsíveis ou aleatórios e conceituar o que é um evento, evento aleatório e não aleatório.

#### 5.1.3 O que esperar dos alunos

Espera-se que os alunos ao discutirem em grupo possam compreender o que é um acontecimento aleatório e um acontecimento previsível e consigam inferir de forma generalizada o que é no campo da probabilidade um evento, um evento aleatório e um evento não aleatório.

#### 5.1.4. Condução da atividade

No início da aula foi pedido para os alunos dividirem-se em grupos de até 6 integrantes, e explanou-se previamente que daríamos início aos nossos estudos sobre a Probabilidade e boa parte dos conceitos seriam desenvolvidos por meio de uma sequência de 7 atividades, sendo que a primeira atividade se tratava de uma história em quadrinhos.

Ao falar da primeira atividade ser uma história em quadrinhos, alguns alunos fizeram algumas indagações:

*“História em quadrinhos na aula de Matemática?!”*

*“Mas é aula de Matemática ou de Língua Portuguesa?!”*

Tal afirmação já era de se esperar tendo em vista que pouco se usa histórias em quadrinhos na área da matemática, assim, foi dito aos alunos que a proposta da sequência didática iria utilizar de formas “não tradicionais” para desenvolver os conceitos matemáticos.

Sendo assim, se deu início a atividade, entregando a cada grupo as folhas com a história em quadrinhos e após a grande maioria finalizar a leitura foi entregue a uma folha por grupo com alguns questionamentos a respeito da referida história, a intenção da entrega das perguntas somente após um tempo foi não induzir a leitura apenas focando em responder os questionamentos, mas sim envolverem-se com o que lhes era apresentado.

Após todos os grupos finalizarem foi feita uma discussão sobre as respostas e registros nos cadernos, uma vez que, as folhas unitárias foram entregues ao professor-pesquisador para análise apresentada na pesquisa.

## 5.2. ATIVIDADE 2: ESTUDO DA PROBABILIDADE

A atividade 2 refere-se ao estudo da história / origem da probabilidade, que foi desenvolvida por meio da visualização e discussão de vídeos selecionados pelo professor pesquisador e complementados por um texto base sobre a origem e aplicações da probabilidade. Sendo composta por 2 perguntas dissertativas, as duas de cunho autoral e com a proposta de síntese das informações apresentadas.

### 5.2.1. Justificativa

Mostrar a origem histórica dos saberes criados e desenvolvidos pelos matemáticos bem como construir ou dar exemplos, partindo de conceitos históricos é uma estratégia didática com grande potencial uma vez que no dia a dia da escola os alunos se deparam com conceitos, fórmulas e teoremas que são postos a eles sem mostrar de onde surgiram, porque foram criados e/ou desenvolvidas. Além disso, tal abordagem acaba por fornecer um contexto e desenvolver a um entendimento mais profundo do que está sendo apresentado (BERLINGHOFF, 2010).

A atividade leva aos alunos a pesquisar sobre a história de como surgiu o interesse pelo estudo das probabilidades e também algumas de suas aplicações.

### 5.2.2. Objetivo

Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não e investigar implicações no cálculo de probabilidades e levar os alunos a inferir que o estudo da probabilidade se deu a partir da necessidade e/ou curiosidade em relação ao funcionamento de algo ou acontecimento rotineiro presente no cotidiano e perceber que a probabilidade está presente no dia a dia em situações diversas.

### 5.2.3. O que esperar dos alunos

Espera-se que os alunos compreendam e entendam de onde surgiu a necessidade de se estudar probabilidade e como ela se desenvolveu ao longo dos tempos e o quanto ela é utilizada diariamente ainda que não seja de maneira explícita.

### 5.2.4. Condução da atividade

A aula teve início com a apresentação da proposta de trabalho, isto é, foi dito aos alunos que iríamos abordar a parte histórica e aplicações dos conceitos de

probabilidade e a mesma aconteceria inicialmente por meio dois vídeos e em seguida um texto de apoio, foi orientado que eles poderiam anotar informações dos vídeos em seus cadernos, pois, na sequência haveria uma atividade sobre o assunto. Sendo assim, houve a apresentação vídeo “*Dicas TV Escola [16] Jogos e Probabilidade*”<sup>5</sup> que se trata de um vídeo introdutório ilustrativo que mostra rapidamente a relação da probabilidade com jogos de azar e seu desenvolvimento e utilização no cotidiano.

Em seguida foi proposto o vídeo “*História da Matemática - Aula 14 – Probabilidade*”<sup>6</sup> que relaciona as escolhas com a probabilidade, enfatizando a relação entre as noções de probabilidade com eventos aleatórios. No decorrer desse vídeo pausas foram feitas e apontamentos foram levantadas algumas discussões:

- Após 1min23s o vídeo foi pausado para retomada do que é um evento aleatório, tomando como base a atividade 1 e os apontamentos feito sobre a temática “escolhas” apresentados logo no início desse vídeo;

- Aos 2min58s houve novamente uma pausa para refletir comentar sobre o que é um dado estatístico “honesto” e ressaltar a fala “*seria difícil formular uma teoria das probabilidades uma vez que eles não tinham um grande registro de dados*”, essa fala forneceu uma ponte para já comentar que no decorrer das aulas, dentro da sequência de atividades, os alunos iriam desenvolver um experimento onde iriam registrar uma grande quantidade de informações e fariam sua análise, sendo assim era de extrema importância que os dados coletados fossem seguindo as normas previamente definidas para que os mesmos fossem o mais “honestos” possíveis;

- Aos 3min10s houve uma pausa para que os alunos respondessem de forma oral a questão levantada no vídeo “*O que é maior? O número de palavras que começam com TRA ou que têm A na terceira letra?*”. Os alunos fizeram apontamentos diversos e então na lousa retomamos os conceitos de combinatória vistos no início do primeiro bimestre. Foi uma discussão rica com muitas retomadas que variavam de levantamentos como:

“*Temos que definir quantas letras queremos para a composição das palavras*”

“*Pode ou não repetir letras?*”

---

<sup>5</sup> Vídeo disponível em: < <https://youtu.be/cV5mh6rU8us> > , último acesso em 16 de junho de 2022.

<sup>6</sup> Vídeo disponível em: < [https://youtu.be/r0GnS\\_SWU2s](https://youtu.be/r0GnS_SWU2s) >, último acesso em 16 de junho de 2022

*“Quantas letras que vamos usar? todas do alfabeto?”*

*“Tem que ser palavras com sentido ou qualquer uma poderia?”*

- Aos 5min16s uma pausa foi feita para discutir que muitos conceitos matemáticos surgem da necessidade de compreender fatos, como no caso da probabilidade que surgiu e teve maior destaque quando foi estudada com a finalidade de entender e fazer mais bem apostas em jogos de azar;

- Aos 6min51s o vídeo foi pausado e comentei com os alunos o que era um espaço amostral e calculamos na lousa os espaços amostrais apresentados no vídeo, os alunos fizeram alguns apontamentos:

*“Usamos bastante combinatória para calcular espaço amostral né professor?”*

Ainda que o vídeo tenha 17min13s ele foi dado como finalizado aos 6min52, pois, na sequência ele abordaria outros conceitos que no momento não eram o foco da atividade e ainda vale ressaltar que alguns deles seriam abordados na atividade 3 e os adiantar sobre o assunto poderia atrapalhar no alcance e discussões da atividade.

Após os vídeos serem exibidos foi solicitado aos alunos que se agruparam novamente em grupo de no máximo 6 pessoas, não sendo necessariamente os mesmos integrantes da atividade anterior e então foi entregue a cada grupo a folha da atividade 2 que era composta por um texto base que se dividia em *“Origem<sup>7</sup>”* e *“Aplicações<sup>8</sup>”*, no verso da atividade havia duas perguntas dissertativas e uma referente a parte histórica e outra referente ao uso da probabilidade no cotidiano.

Vale ressaltar que alguns alunos pediram se poderiam fazer mais pesquisas para realizar a síntese e assim o uso do celular foi liberado nesse momento.

### 5.3. ATIVIDADE 3: BINGO DAS PROBABILIDADES

Esta atividade foi desenvolvida pelo autor e trata de uma adaptação do bingo tradicional com espaço amostral de aproximadamente 90 números, para um bingo com o espaço amostral formado pela soma dos valores obtidos ao se lançar dois dados e a montagem da cartela feita pelo próprio jogador e tendo a possibilidade de repetir números, além de regras próprias.

---

<sup>7</sup> A parte Origem foi retirada de < <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/historia-probabilidade.htm>> último acesso em 16 de junho de 2022

<sup>8</sup> A parte Aplicações foi retirada do livro “O jogo dos Discos” p 14 e 15.

Logo após a realização do "*Bingo das Probabilidades*" um questionário (Apêndice 5) foi entregue aos alunos e as respostas serviram como base da análise e também explorou conceitos da probabilidade.

### 5.3.1 Justificativa

A utilização de jogos tem mostrado de grande valia no processo de ensino e aprendizagem da matemática, sendo um recurso que vai além da intencionalidade de aprendizagem do conteúdo e desenvolvimento do raciocínio lógico, se mostrando um instrumento motivacional, capaz de desenvolver habilidades de concentração, observação e até mesmo generalização; possibilitando ainda uma quebra de bloqueio que normalmente os alunos têm em relação a matemática (BRAZ.; MIRANDA,; BARBOSA, 2018), porém, principalmente no ensino médio esse tipo de atividade é deixada de lado, sendo assim a proposta da atividade três vem para mostrar o quão significativo é a utilização de uma atividade lúdica (no caso um jogo) para alunos do Ensino Médio.

Nessa atividade em específico em relação a probabilidade a ideia é auxiliar no desenvolvimento do conceito de espaço amostral e do cálculo de probabilidades.

### 5.3.2. Objetivo

Reconhecer o caráter aleatório de fenômenos e eventos naturais, científico-tecnológicos ou sociais, compreendendo o significado e a importância da probabilidade como meio de prever resultados. Identificar, descrever e construir o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade; analisar maiores e menores probabilidades de ocorrer um evento dentro do espaço amostral e elaborar e resolver problemas que envolvam espaço amostral, eventos e cálculo de probabilidade por observação do espaço amostral (pois, nesse momento, ainda não se apresentou formas de calcular probabilidade, apenas como analisar perante a um espaço amostral).

### 5.3.3. O que esperar dos alunos

Espera-se que os alunos durante o bingo analisem e questionem "o porquê" tem números que saem com maior frequência e outros com menor frequência, e

observem que a escolha dos números bem como sua localização dentro da cartela do bingo é favorecida ao analisar a probabilidade de sair determinado número.

Ao irem para a folha da atividade escrita é esperado que compreendam que o espaço amostral é os conjuntos de todos os possíveis resultados, consigam fazer comparações entre maiores e menores probabilidades de determinados eventos ocorrerem com base no espaço amostral.

#### 5.3.4. Condução da atividade

No início da aula foi dito aos alunos que hoje jogaríamos Bingo, e lhes foi perguntado se conheciam o funcionamento de um bingo, a grande maioria conhecia, então, perguntaram se haveria prêmios.

A Fim, de tornar o jogo mais próximo da realidade foi anunciado os prêmios: *“Quatro cantos, cinquina na horizontal ou vertical, diagonal valeriam um acréscimo de um ponto bônus na avaliação 1 (que já havia sido aplicada), e cartela cheia seriam 2 pontos e uma calculadora. E os pontos podem ser doados como presente a algum amigo que esteja na mesma série ainda que não esteja na mesma turma.”*

Após o anúncio dos prêmios foram retomados quais eram as formas de lhes obter, sendo necessário em algumas turmas desenhar a cartela na lousa e colocar as possíveis formas de premiação (verbalmente alguns alunos tiveram dificuldades em compreender), as cartelas individuais foram entregues e as regras de preenchimento da cartela foi apresentada.

#### 5.4. ATIVIDADE 4: O IMPROVISO QUE VIROU MATEMÁTICA...

Essa atividade trata-se de uma introdução ao Jogo dos Discos que foi adaptada do texto<sup>9</sup> presente no livro: “O jogo dos Discos- Módulo 1” (CAETANO; PATERLINI, 2013) onde é apresentado aos alunos um contexto sobre o surgimento do jogo e levantado algumas questões que foram discutidas com os alunos a respeito do diâmetro de discos em tamanho dos lados onde do quadrado onde os discos seriam jogados.

---

<sup>9</sup> No livro esse texto se encontra nas páginas 16 e 17.

#### 5.4.1 Justificativa

Contextualizar os alunos sobre o que lhes será proposto é de grande importância no desenvolvimento de atividades, assim, a ideia de apresentar um texto introdutório se torna de grande valia, pois, além de ser um disparador de reflexões sobre o que lhes será proposto ajuda a criar uma atmosfera mais tranquila em relação ao que lhes seria proposto em seguida.

#### 5.4.2 Objetivo

Apresentar o contexto em que a proposta do experimento do jogo dos discos foi criada e analisar a relação diâmetro do disco e lado do quadrado dentro do contexto e regras da aplicação do jogo dos discos.

#### 5.4.3. O que esperar dos alunos

Espera-se que os alunos ao lerem a proposta sintam-se inspirados a realizar as atividades seguintes, uma vez que elas se trata da prática do jogo dos discos e também que compreendam que o diâmetro ideal do disco para que o jogo seja possível deve ser menor que o lado dos quadrados que compõem o tabuleiro do jogo.

#### 5.4.4. Condução da atividade

Apresentação da folha de atividades e leitura compartilhada em duplas ou trios (dependendo da sala), em seguida discussão oral sobre as reflexões ao final do texto que se referiram a relação diâmetro do disco e lado do quadrado do tabuleiro.

### 5.5. ATIVIDADE 5: ETAPA I - DO JOGO DOS DISCOS

Esta atividade trata-se da primeira etapa da aplicação do Jogo dos Discos, e baseia-se em definir algumas regras iniciais, o que será tomado como evento favorável e não favorável dentro da perspectiva do jogo e familiarizar os alunos com os materiais a serem utilizados e os processos de lançamentos e contagem de casos favoráveis.

Além disso, esta atividade desenvolve a fórmula do cálculo de probabilidades e as diferentes formas de escrever uma probabilidade (fracionária, decimal e percentual).

### 5.5.1. Justificativa

Ainda que supostamente simples, o Jogo dos Discos desempenha um importante papel no desenvolvimento e aprendizagem de conceitos relacionados à probabilidade, além disso, vale ressaltar que essa atividade lúdica e investigativa se torna ainda mais potente ao comparar diferentes formas de calcular e expressar as probabilidades (DANTAS, 2014).

### 5.5.2. Objetivo

Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade (BRASIL, 2018). Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos (BRASIL, 2018). Calcular probabilidades simples e a escrever na forma de fração, número decimal, valor percentual e compreender / calcular probabilidade complementar.

### 5.5.3. O que esperar dos alunos

Espera-se que os alunos entendam o funcionamento do experimento, criem suas estratégias em grupo de como farão para lançar, recolher peças e anotar resultados. Além disso, a proposta é que os alunos desenvolvam os conceitos de cálculo de probabilidades e suas representações na forma fracionária, decimal e percentual.

### 5.5.4. Condução da atividade

Foi indicado aos alunos que se organizassem em grupos e que desta vez o grupo seria fixo para a realização das atividades 5, 6 e 7.

Após os alunos organizados lhes foi explicado como funcionaria o jogo, inicialmente de forma geral a todos, e depois de forma individual a cada grupo após os tabuleiros e folha de registro da atividade 5 ser entregue.

Iniciou-se o processo de experimentação que durou ao todo cerca de 2 aulas de 50 minutos, entre orientações iniciais, organização de grupos, entrega de material, processos de lançamentos consecutivos com os 4 discos de tamanhos diferentes, registros e cálculos de probabilidade indicados na atividade.

Algumas falas durante aplicação me chamaram a atenção:

*“Professor estou gostando dessa atividade, assim mudamos um pouco de sempre usar somente o caderno”*

*“Nossa as peças caem sempre no chão, precisamos pensar em um jeito mais prático para isso”*

*“É normal não ter nenhum evento favorável?”*

*“Qual é a regra para ganhar?”*

*“Por que os tabuleiros são diferentes? com linhas grossas e finas?”*

*“E não vai dar diferença pelo peso da moeda usar moedas de valores mesmo se elas têm o mesmo diâmetro?”*

Vale ressaltar que a fala referente a linhas diferentes foi intencional, porém a falta de peso das moedas de mesmo diâmetro diz respeito ao fato da limitação de recursos, por não ter moedas suficientes foi decidido por usar moedas de diâmetros iguais e a questão do peso poderá ser discutida em análises futuras.

## 5.6. ATIVIDADE 6: ETAPA II EXPERIMENTO EM LARGA ESCALA

Esta atividade tratou-se da aplicação da mesma atividade 5, porém, em larga escala, com mais lançamentos e também se levantou alguns questionamentos sobre a necessidade ou não de lançar muitas vezes. Essa proposta veio diretamente do livro *“O Jogo dos Discos”* (CAETANO; PATERLINI; 2013, p. 19 a 23), apenas com o acréscimo de definição de diâmetro e alguns comentários de retomada.

### 5.6.1 Justificativa

A justificativa é a mesma da atividade 5, com um acréscimo, de promover a vivência por parte dos alunos na realização de um experimento em larga escala buscando refinar dados de probabilidade.

### 5.6.2 Objetivo

Além dos já citados na atividade 5, um objetivo geral é promover a experimentação dos alunos na prática do processo de refinamento de dados probabilísticos.

### 5.6.3 O que esperar dos alunos

Espera-se que os alunos compreendam como se desenvolvem teorias a partir de um experimento, que se trata de um processo longo e muitas vezes até mesmo cansativo.

### 5.6.4. Condução da atividade

Os procedimentos foram os mesmos da atividade 5, com duração de aproximadamente 2 aulas e meia de 50 minutos, os alunos fizeram alguns comentários que gostaria de destacar:

*“Nossa que processo longo... tem como fazer ser mais rápido?”*

*“lançar 100 e lançar 200 vezes são basicamente os mesmos resultados, está certo?”*

*“Eu posso apenas lançar 100 e repetir os resultados para 200?”*

*“A intensidade/ força com que jogamos as moedas alteram nos resultados, vamos definir apenas um jogador para jogar cada tipo de objeto (disco)”*

Os questionamentos foram respondidos em grupos e alguns discutidos em sala, todavia, no trabalho não haverá aprofundamento sobre tais discussões, tendo em vista a intencionalidade da pesquisa.

## 5.7. ATIVIDADE 7: ETAPA III - ANÁLISE DOS EXPERIMENTOS

Essa atividade trata-se de uma reflexão guiada para comparar os resultados obtidos nas atividades 5 e 6, essa proposta veio diretamente do livro “O Jogo dos Discos” (CAETANO; PATERLINI, 2013; p. 23 e 24).

### 5.7.1 Justificativa

Após realizar uma atividade de experimentação refletir e analisar resultados é imprescindível, sendo assim, esta atividade serve para guiar os alunos e seus integrantes do grupo a refletirem sobre resultados.

### 5.7.2 Objetivo

Realizar análises comparativas guiadas pela atividade.

### 5.7.3. O que esperar dos alunos

Espera-se que os alunos percebam a atividade 5 não lhes forneceu dados tão refinados quanto a atividade 6, porém, que talvez não houvesse a necessidade de lançar 200 vezes na atividade apenas 100 seriam o suficiente.

### 5.7.4. Condução da atividade

Após o término da atividade 6 foi entregue a atividade 7 e em grupos eles discutiram sobre resultados e entregaram a folha de respostas dessa última atividade no dia seguinte onde foi fornecido mais 15 minutos para finalização dessa atividade.

## 6. DESCRIÇÃO E ANÁLISE DE RESULTADOS

A pesquisa se trata de uma sequência didática que coletou diferentes tipos de dados por meios das questões contidas nas diferentes atividades propostas, sendo assim, algumas serão apresentadas e analisadas.

No decorrer da aplicação das atividades, era esperado que houvesse algumas dificuldades tais como:

- Não compreensão do porquê de determinada proposta, uma vez que, algumas delas iam muito além do que os alunos estavam acostumados como estratégias didáticas em aulas de matemática, como por exemplo a história em quadrinhos da atividade 1 ou até mesmo a análise de experimento.
- Falta de comprometimento de alguns alunos, principalmente por serem atividades a serem devolvidas em sua grande maioria em grupos.
- Conhecimento insuficiente por parte dos alunos para resolver os questionários.

Para buscar superá-las diálogos iniciais foram feitos por parte do professor-pesquisador explicando a intencionalidade das atividades sempre que uma atividade era proposta. Além disso, foi proposto aos alunos que trabalhassem em grupos definidos por eles mesmos e orientado que definissem funções a serem revezadas entres eles e foi permitido aos alunos pesquisas online e foram fornecidos textos de apoio e até mesmo apresentados nas atividades alguns conceitos conforme descritos nas atividades no Apêndice.

Em relação à organização e análise dos dados que nessa pesquisa baseou-se em quantitativos e qualitativos com a finalidade de complementação de informações e

para facilitar a análise de alguns questionamentos mais diretivos<sup>10</sup> aos alunos fez-se uso do Excel para quantificar dados e transcrever respostas qualitativas das questões.

Quando se analisou questões dissertativas foi feito o uso da Análise do Conteúdo, criando categorias e indicadores.

Vale levantar que nas atividades 1, 2, 3 e 4 onde é apresentado a análise da atividade<sup>11</sup> foram coletada de cada grupo de alunos evidências e usou-se “EVx”, com  $x = 1, 2, \dots, 18$  como abreviação para “Evidência x”, pois, as evidências apresentadas são de diferentes formações em grupos dos alunos que variaram de acordo com a atividade, por exemplo, a abreviação “EV1” utilizada na atividade 1 refere-se as respostas de um determinado grupo que não necessariamente o mesmo grupo chamado “EV1” nas atividades 2, 3 e 4, sendo assim, a sigla apenas tem a funcionalidade de distinguir as respostas (que chamamos de evidências) e não comparar respostas de um mesmo grupo em cada atividade.

Nas atividades 5, 6 e 7, usou-se “Gx”, com  $x = 1, 2, \dots, 16$ , para abreviar “Grupo x”, uma vez que, as respostas coletadas foram de um grupo fixo e apontam regularidade em relação a quem foram os autores das atividades, isto é, os grupos dessas atividades foram grupos fixos, logo, o G1, G2, ..., G16 trata-se das respostas dadas pelos mesmos grupos de alunos nas atividades 5,6 e 7 o que possibilita comparação da evolução dos grupos ao longo das atividades.

Tais estratégias de abreviaturas foram escolhidas a partir da aplicação, onde nas atividades 1, 2, 3 e 4 os alunos não precisam ter grupos fixos, o que possibilitou a socialização entre eles, já para as atividades 5, 6 e 7 por serem atividades sequenciais de análise conjunta de dados foi orientado que os alunos definissem grupos fixos.

## 6.1 ATIVIDADE 1: É POSSÍVEL PREVER OU NÃO?

Essa atividade teve como objetivo desenvolver o conhecimento dos alunos em relação aos tipos de eventos (aleatórios e não aleatórios), promovendo a reflexão e análise por meio de uma história em quadrinhos retirada do livro “Matemática na Prática- Módulo I - Jogo dos discos”, ainda nessa atividade se tem a intencionalidade de definir/inferir o que é um evento, o que é um evento previsível (não aleatório) e não

---

<sup>10</sup> Questionamentos diretivos nesse contexto foram tomados em relação a criação de questões objetivas.

<sup>11</sup> As demais análises serão apresentadas por meio de artigos a serem produzidos e publicados em revistas e eventos.

previsível (aleatório). Esta atividade é composta por 5 perguntas todas qualitativas (dissertativas) e foram coletadas as conclusões de 18 grupos, isto é, tem-se 18 evidências a serem analisadas.

#### 6.1.1. Evento previsível

A análise inicial das respostas partiu da criação de categorias para classificar e organizar as evidências (Quadro 1), ao realizar várias leituras das respostas foram criadas seis categorias descritas de forma resumida, sendo elas: “Clima”, ‘Objetos”, “Perder Hora”, “Reunião”, “Erros” e “Outros”.

A escolha do termo “Clima” partiu das respostas que se remeteram, em sua grande maioria, ao fato de na história em quadrinhos acontece uma chuva, sendo assim, como as respostas, por exemplo, EV17 e EV18 (ver Quadro 2) ainda que não cite diretamente a palavra “chuva” fazem referência a um clima chuvoso, assim, optou-se por sintetizar os dados na categoria “Clima”.

O termo “Objetos” busca representar as ações referentes a perda ou esquecimento de algum objeto presente na história, e todos os grupos de alunos remeteram tal fato a um evento previsível de acontecer, isto é, ainda que os objetos fossem distintos todos classificavam-se em uma mesma ação com características comuns.

A categoria “Atraso” busca sintetizar as evidências que relataram o fato de que a personagem havia “perdido” a hora para acordar, perda do ônibus e conseqüentemente o atraso para chegar ao trabalho.

A palavra “Reunião” remete às evidências que citavam a reunião que a personagem tem marcada com seu chefe.

E por fim, a categoria “Erros” são apontamentos de situações que não se referem a um evento previsível, mas sim a um evento não previsível ou aleatório e a categoria “Outros” são eventos que não são nem previsíveis e nem aleatórios apenas situações que aconteceram ao longo da história.

Quadro 2: Respostas sobre qual(is) o(s) acontecimento(s) previsível(is)

<b>Categorias</b>	<b>Indicadores</b>
Reunião	EV10: reunião
	EV12: reunião marcada;
Atraso	EV1: a moça chegar atrasada na reunião
	EV3: atraso

	EV5: chegar atrasada no trabalho
	EV7: perdeu a hora, automaticamente ela se atrasaria para o trabalho
	EV8: acordar atrasada;
	EV9: chegar atrasada no trabalho
	EV18: perder hora
Clima	EV1: acabar se molhando por causa da chuva
	EV3: chuva
	EV6: ter chovido
	EV8: o ônibus atrasar por conta da chuva
	EV12: chuva
	EV13: chover
	EV14: chover
	EV15: o acontecimento é a probabilidade de chuva
	EV16: chuva
	EV17: nuvens cinzas no céu
	EV18: chegar molhada no trabalho
Objetos	EV2: meias na gaveta de meia
	EV4: "meias na gaveta de meias, conforme esperado"
	EV8: a perda do pen drive; não achar o guarda-chuva
	EV12: perder o guarda-chuva
	EV18: meias na gaveta; pegar bolsa; pegar o pen-drive
Outros	EV3: jornal
	EV18: oferecer o lugar pra grávida; correr para o ponto de ônibus
Erros	EV10: saber se o bebê é menino ou menina
	EV11: se o bebê da mulher grávida é menino ou menina

Fonte: arquivo do autor, 2022.

A fim de melhor discutir os resultados e possíveis acertos e erros e até mesmo o motivo pelo qual não houve a identificação de alguns termos o Tabela 1, uma síntese dos resultados em relação a sua frequência absoluta (Nº) e relativa (%) em que as evidências corresponderam às categorias criadas para análise. Vale ressaltar que a soma da frequência absoluta (nº) ultrapassará 18, isso porque algumas evidências

foram desmembradas em função da questão permitir que os alunos indicassem mais de um acontecimento.

Tabela 1: Síntese dos resultados sobre evento previsível

Ordem	Categorias	Unidades de registro	
		Nº	%
1º	Clima	11	37,9
2º	Atraso	7	24,1
3º	Objetos	5	17,2
4º	Reunião	2	6,9
5º	Erros	2	6,9
6º	Outros	2	6,9

Fonte: arquivo do autor, 2022.

De um total de 29 indicadores a serem categorizados pode-se observar que três deles tiveram maior destaque se referindo em ordem decrescente ao “Clima”, “Atraso” e “Objetos”, o que no contexto da atividade é algo positivo uma vez que, esses mesmos fazem parte das respostas comentadas indicadas no Livro texto “O jogo dos discos” (CAETANO; PATERLINI, 2013), conforme pode-se ver na Figura 3.

Figura 3: Resposta comentada do livro sobre acontecimento previsível

<p>Dentre os possíveis acontecimentos que a personagem poderia prever, você pode ter identificado:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• A perda do emprego devido à sua chegada atrasada na reunião, justificada pelo conhecimento das políticas da empresa e da personalidade de seu chefe;</li> <li>• O dia ser chuvoso e frio, justificada pelas nuvens cinzentas;</li> <li>• Ter facilidade para encontrar as meias e dificuldade para encontrar o guarda-chuva, justificada por haver um lugar específico onde ela guarda suas meias.</li> </ul>
---

Fonte: CAETANO; PATERLINI (2013, p.13).

Vale ressaltar que a justificativa dos participantes não foram as mesmas indicadas no livro, por exemplo, boa tarde dos grupos relacionaram o “Atraso” não a perda do emprego, mais sim, a ao fato dela ter perdido o horário para se levantar, não citando em nenhuma justificativa que ela iria perder o emprego e alguns até criaram hipóteses além do que lhes era apresentado para justificar o “Atraso” ser algo previsível (Figura 4).

Figura 4: Resposta para justificar a categoria “Atraso”

EV7:	Perdeu hora e só tinha 10 min para se arrumar.
EV8	≅ ter trabalhado até tarde na noite anterior
EV18:	Foi dormir tarde e não acordou

(perdeu a hora e só tinha 10 min para se arrumar)

(ter trabalhado até tarde na noite anterior)

(foi dormir tarde e não acordou)

Fonte: arquivo do autor, 2022.

Observando a Figura 4, é possível analisar que a EV7 se refere o atraso a falta de tempo para se arrumar, a EV8 sugere que o atraso aconteceu pelo fato de a personagem ter trabalhado até tarde, ainda que a história em quadrinhos não tenha mencionado nada, e a EV18 relaciona o atraso sendo acarretado com o tempo de sono da personagem - uma ação não apresentada na história em quadrinhos que foi analisada.

No que diz respeito a “Clima” e “Objetos” os grupos justificaram de forma parecida com o livro (Figura 3), alguns deles ainda buscaram até mesmo discorrer ao apontar esses eventos como previsíveis (Figura 5).

Figura 5: Resposta para justificar a categoria “Clima”

EV6:	Ter nuvens cinzas fora da janela
EV14:	Por causas das nuvens cinzas no céu que sugere frio e chuva.
EV17:	tem uma grande probabilidade que irá chover
EV18:	Pois esqueceu o Guarda-Chuva

(ter nuvens cinzas fora da janela)

(por causas das nuvens cinzas no céu que sugere frio e chuva)

(tem uma grande probabilidade que irá chover)

(pois esqueceu o guarda-chuva)

Fonte: arquivo do autor, 2022.

Na EV6, EV14 e EV17 é feita uma previsão de que se tem nuvens cinzas haverá previsão de chover. Já na EV18 toma-se como ponto de partida que a chuva já aconteceu e por isso se molhou.

Em relação a categoria “Reunião”, que não é apontada como possível resposta pelo livro (Figura 3), os alunos buscaram justificar que era um evento previsível uma vez que, no contexto da história a mesma já havia sido marcada a algum tempo, isto é, a personagem já sabia que aconteceria a reunião com seu chefe.

A categoria “Outros” no que diz respeito à EV3: *Jornal* (Quadro 2) os alunos justificaram que seria um evento previsível pois “*chega no mesmo horário todo dia*” – todavia, essa informação não é apresentada no contexto da história; já a EV18: *Oferecer o lugar pra grávida e Correr para o ponto de ônibus*; os alunos também partiram de justificativas não apresentadas na história, mas sim, em relação às suas vivências, uma vez que justificaram respectivamente que o oferecer o lugar é previsível, pois, a mulher está grávida e deve-se oferecer o lugar; e se você está atrasado é previsível que você irá correr atrás no ônibus.

Quanto aos “Erros” onde ambas as evidências se referem ao sexo do bebê, as justificativas ficaram em torno de ser previsível, pois, se sabe que pode ser menino ou menina, o que revela um possível não entendimento de forma totalitária da definição de um evento previsível.

#### 6.1.2. Evento não previsível ou aleatório

No Quadro 3 abaixo, temos os resultados da categorização a partir dos indicadores, referente a questão onde partindo da história em quadrinho (Apêndice 1), os alunos em grupos deveriam indicar qual(is) o(s) acontecimento(s) não previsível(is) ou aleatório(s). Para essa questão foram criadas seis categorias sendo elas: “Jornal”; “Chefe ganhar na loteria”; “Promoção da funcionária”; “Perder o pen-drive” e “Erros”.

Onde as categorias “Chefe ganhar na loteria”, “Promoção da funcionária” e “Perder o pen drive” são por si só auto descritivas, porém, pode-se detalhar que respectivamente, elas dizem respeito à: a dificuldade de alguém ganhar na loteria e ele ser o chefe da protagonista da história, a funcionária ainda que tenha passado por adversidades ter chance se ser demitida acaba sendo promovida e ao ato de não encontrar o pen-drive com a apresentação para a reunião.

Na categoria “Grávida” faz-se citações sobre encontrar a mulher grávida no ônibus e na categoria “Erros” tem-se a apresentação de indicadores de acontecimentos previsíveis para acontecimentos não previsíveis.

Quadro 3: Respostas sobre qual(is) o(s) acontecimento(s) não previsível(is) ou aleatório(s)

<b>Categorias</b>	<b>Indicadores</b>
Grávida	EV3: grávida
	EV8: 2 - mulher grávida no ônibus
	EV15: o acontecimento é a mulher enxergar a grávida no ônibus
Jornal	EV2: a queda do avião
	EV8: 1- tropeçar no jornal e ver o acidente de avião
	EV12: avião cair
	EV13: queda do avião
	EV18: 6 -tropeçar no jornal; 7 - acidente de avião
Chefe ganhar na loteria	EV1: o chefe dela ganhou na loteria sozinho
	EV5: o chefe ganhou na loteria
	EV6: o cara ficar rico e ir viajar
	EV8: 3 - o chefe ganhar na loteria;
	EV9: o chefe ganhou na loteria
	EV10: chefe ganhou na loteria;
	EV11: o chefe ganhou na loteria
	EV12: chefe ganhar na loteria
	EV13: ganhar na loteria
	EV18: 2 - chefe ganhar na loteria;
Promoção da funcionária	EV1: (...) ela virou a nova chefe
	EV3: promoção
	EV8: 4 - ela ser a próxima chefe
	EV10: ela foi promovida
	EV14: ela ser a nova chefe
	EV16: promoção no trabalho
	EV18: 4 - virar chefe
Perder pen drive	EV3: pen- drive

	EV4: " perdi o pen-drive"
	EV7: perdeu o pen drive na catraca do ônibus
	EV10: perdeu o pen-drive no ônibus;
	EV13: perder o pen drive
	EV18: 3 - perder o pen drive;
Erros	EV10: perdeu a hora; começou a chover;
	EV11: ela perdeu a hora;
	EV17: perder o emprego por chegar atrasada
	EV18: 1- chuva; 5 - guarda-chuva

Fonte: arquivo do autor, 2022.

Seguindo a linha de análise da situação anterior temos na Tabela 2, os indicadores em ordem de acordo com sua frequência absoluta (Nº) e relativa (%).

Tabela 2: Síntese dos resultados sobre Evento previsível

Ordem	Categorias	Unidades de registro	
		Nº	%
1	Chefe ganhar na loteria	10	28,6
2	Promoção da funcionária	7	20
3	Perder pen drive	6	17,1
4	Jornal	5	14,3
5	Erros	4	11,4
6	Grávida	3	8,6

Fonte: arquivo do autor, 2022.

Assim, pode-se observar que dentre um total de 33 indicadores a serem categorizados alguns deles tiveram maior destaque, ordem decrescente: “Chefe ganhar na loteria”; “Promoção da funcionária” e “Jornal”, o que no contexto da atividade é algo positivo, uma vez que, esses mesmos fazem parte das respostas comentadas indicadas no Livro texto “O jogo dos Discos” (CAETANO; PATERLINI, 2013), conforme pode-se ver na Figura 6.

Figura 6: Resposta comentada do livro sobre acontecimento não previsível ou aleatório

Dentre os acontecimentos aleatórios que a personagem não poderia prever, você pode ter identificado:	chuvoso e horário de tráfego intenso;
<ul style="list-style-type: none"> <li>• O sexo do bebê, pois as chances são iguais para menino ou menina;</li> <li>• A manchete do jornal sobre a queda do avião, por se tratar de um evento raro, não esperado.</li> <li>• O ônibus ter chegado rápido, por se tratar de um dia</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• O chefe ter ganho sozinho na loteria, pois se trata de um acontecimento extremamente raro, de natureza imprevisível.</li> <li>• A promoção para o cargo de chefia, pois dependeu do fato de o chefe ter ganho sozinho na loteria.</li> </ul>

Fonte: CAETANO; PATERLINI (2013, p.13).

Ao analisar as evidências pode-se perceber que na categoria “Grávida” obtida pelas respostas dos alunos não se referem ao sexo do bebê (como proposto do livro – Figura 6), mas sim a situações que envolviam encontrar alguém grávida (ver Quadro 4). Na categoria “Erros” é possível observar uma tendência nas respostas correspondente ao fato de saber que o sexo do bebê é menino ou menina ser tido como um evento previsível, isto é, não levaram em consideração que ser menino ou menina é algo aleatória de acontecer (deixando de lado conceitos genéticos).

Já nas categorias “Chefe ganhar na loteria”, “Promoção da funcionária” e “Jornal” os grupos em suas justificativas usaram palavras parecidas com o sugerido pelo livro (Figura 6), como pode-se ver na Figura 7 abaixo:

Figura 7: Resposta para justificar as categorias “Chefe ganhar na loteria”; “Promoção da funcionária” e “Jornal”,

EV2:	foi um acidente inesperado (foi um acidente inesperado)
EV8:	3 - O chefe ter apostado na loteria e ter sorte ✓ (o chefe ter apostado na loteria e ter sorte)
EV16:	era imprevisível porque ela pensava que seria demitida por conta do atraso e porque o chefe não ia com a cara dela (era imprevisível porque ela pensava que seria demitida por conta do atraso e porque o chefe não ia com a cara dela).

Fonte: arquivo do autor, 2022.

Algumas justificativas que chamam a atenção em relação a evidências da categoria “Chefe ganhar na loteria” foram as seguintes (Figura 8):

Figura 8: Resposta para justificar a categoria “Chefe ganhar na loteria”

<p>• É um acontecimento não previsível, pois em nenhum momento foi citada a compra do bilhete da loteria.</p> <p>EV5: (é um acontecimento não previsível, pois, em nenhum momento foi citado a compra do bilhete da loteria)</p>
<p>não tínhamos pista de que ele tinha jogado na loteria</p> <p>EV6: (não tínhamos pista de que ele tinha jogado na loteria)</p>

Fonte: arquivo do autor, 2022.

Ambas as evidências (EV5 e EV6) destacam-se pela observação crítica da história em quadrinhos, ao levantarem que ela não revelou tal fato, logo, seria um evento não previsível.

Analisando as categorias é possível perceber que nenhuma se refere a respostas indicadas no livro (Figura 6) que diz “O ônibus ter chegado mais rápido, por se tratar de um dia chuvoso e horário de tráfego intenso”.

Em contrapartida alguns grupos levantam indicadores que possibilitaram a criação da categoria “Perder pen drive”, que ainda que não apresentada como possível resposta pelo livro possuem argumentos fortes para classificá-la como um evento não previsível (ver Figura 9):

Figura 9: Resposta para justificar a categoria “Perder pen drive”

<p>* Perdi o pen-drive com toda a apresentação da reunião não estava no planejamento da menina.</p> <p>EV4: (perder o pen-drive com toda a apresentação da reunião não estava no planejamento da menina)</p>
<p>• Ela não imaginava perder o pen-drive no ônibus lotado</p> <p>EV18: (ela não imaginava perder o pen-drive no ônibus lotado.)</p>

Fonte: arquivo do autor, 2022.

As argumentações a respeito do pen drive perdido no ônibus sem um evento não previsível, partem de um princípio da perda de algo, isto é, consideram um evento

não previsível algo que não foi planejado acontecer (não planejou e/ou queria perder o pen drive).

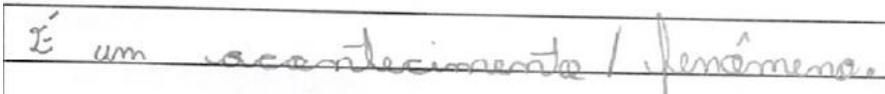
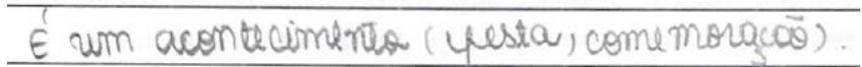
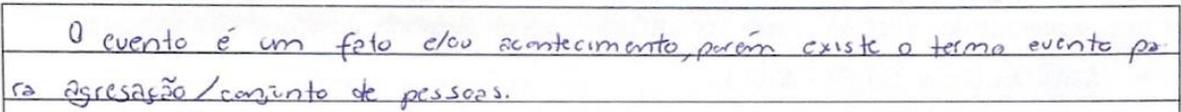
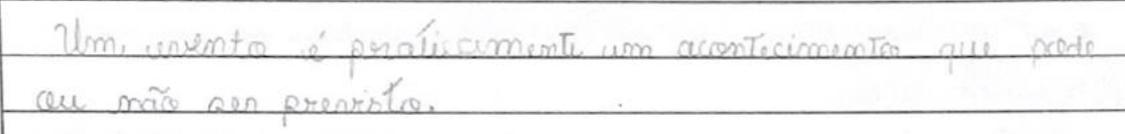
Em relação a categoria “Erros” nele se tem novamente indicadores obtidos devido a não compreensão e/ou confusão entre o que é evento não previsível e previsível.

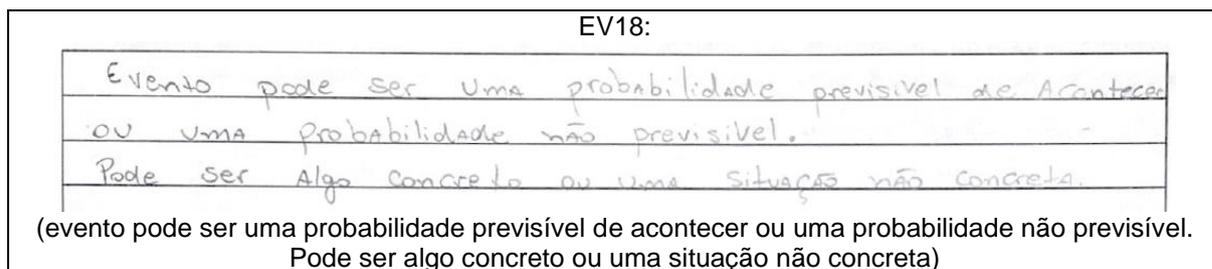
### 6.1.3. Explorando o conceito de Evento

A proposta de explorar o conceito de evento, busca compreender o que os alunos ao debaterem entre membros de seu grupo entendem como um evento.

Assim, dentre as 18 evidências coletadas, apenas uma evidência (EV2) foi entregue em branco (sem resposta), as demais - que totalizaram 17 delas (94%), apontaram ainda que com palavras diferentes, que evento se relaciona com um acontecimento e/ou fenômeno. Vale destacar algumas delas (Figura 10):

Figura 10: Respostas sobre definição de evento

EV1:
 <p>(é um acontecimento/fenômeno)</p>
EV7:
 <p>(uma coisa que pode acontecer)</p>
EV14:
 <p>(é um acontecimento (festa, comemoração))</p>
EV15:
 <p>(o evento é um fato e/ou acontecimento, porém existe o termo evento para agregação/conjunto de pessoas)</p>
EV16:
 <p>(um evento é praticamente um acontecimento que pode ou não ser previsto)</p>



Fonte: arquivo do autor, 2022.

Assim, após analisar as respostas pode-se concluir que os alunos têm uma boa noção do que é um evento, e o grupo que não se pronunciou pode compreender após apresentarmos um breve diálogo sobre as possíveis respostas.

#### 6.1.4. Explorando o conceito de Evento Previsível e Evento aleatório

Após explicado ou desenvolvido conceito inicial do que é um evento, a proposta agora ser analisada, busca captar dos alunos uma explicação do que é um evento previsível e um evento não aleatório.

Nesta seção será discutido os resultados a cerca de duas questões referentes a eventos:

*“O que é um evento previsível ou não aleatório?” e “O que é um evento não previsível ou aleatório?”*

Essas questões foram respondidas por 18 grupos diferentes e cada resposta foi transcrita e tida como "Evidências" abreviadas por “EVx” com  $x = 1, 2, \dots, 18$ , em seguida, após feita a leitura delas diversas vezes, criou-se categorias buscando analisar e organizar o conteúdo contido nas respostas.

##### 6.1.4.1 Evento previsível

A fim de melhor analisar as respostas à pergunta: *O que é um evento previsível ou não aleatório?* criou-se duas categorias para classificar os indicadores (as evidências) apresentadas pelos grupos de alunos, sendo elas: *“Algo que irá acontecer”*, *“Outros”* e *“Sem resposta”* (ver Quadro 4).

A categoria *“Algo que irá acontecer”* remete-se a respostas que deixavam claro que um evento previsível é algo que se sabe que vai acontecer ou que já se sabe o que acontecerá. A categoria *“Outros”* abrange afirmativas que deixavam uma certa incerteza sobre ser um evento previsível ou não previsível e a categoria *“Sem resposta”* remete a evidência que não estavam respondidas nas folhas, isto é, foram deixadas em branco pelo grupo de alunos.

Quadro 4: O que é um evento previsível ou não aleatório?

<b>Categorias</b>	<b>Indicadores</b>
Algo que irá acontecer	EV1: é quando já imaginava o que vai acontecer EV3: o evento previsível é quando estamos cientes de que aquilo irá acontecer EV4: o evento previsível é algo esperado e planejado e não aleatório EV5: é um evento que você pode saber o que vai acontecer. O não aleatório pode ser previsto com certeza EV6: algo que acontece, mas você já sabe, por causa de algum fator ou evidência EV7: é uma coisa que você "sente" que pode acontecer EV8: um acontecimento com situações geradas antes que podem resultar em um evento previsível, não sendo uma "surpresa" para o indivíduo EV9: exemplo: eu ir a um lugar sabendo que ali é perigoso e pode acontecer algo ou por exemplo a chuva ela é prevista EV11: algo que foi planejado ou esperado EV12: evento previsível - planejado antes; não aleatório - não planejado EV13: quando acontece algo que já é esperado EV14: um evento previsível ou não aleatório é um acontecimento que pode se esperar, a partir da observação de fatos que o poderiam justificar EV17: é algo ou alguma situação que está prestes a acontecer, algo previsto, exemplo: reunião de trabalho, férias e feriado
Outros:	EV10: não aleatório acontecimentos ou situações cujos resultados não podem ser previsto com certeza EV14: um evento previsível é algo inevitável é um evento improvável que não ocorra EV15: um evento previsível é ter noção do que virá pela frente mesmo não sabendo de todo o enredo EV16: um evento previsível é uma coisa que tem uma grande probabilidade de acontecer
Sem resposta	EV2

Fonte: arquivo do autor, 2022.

Tomando como ponto de partida que um evento previsível é um evento que já se sabe o que irá acontecer antes mesmo de acontecer, as evidências (chamadas de indicadores) contidas na categoria “*Algo que irá acontecer*” pode ser tida como respostas corretas e a “*Outros*” por não serem precisas nas afirmações serão consideradas inadequadas. Para melhor analisar o desempenho dos alunos e discutir as definições, criou-se uma tabela síntese com frequências absolutas e relativas (Quadro 7).

Tabela 3: Síntese dos resultados sobre Definição Evento previsível.

Ordem	Categorias	Unidades de registro	
		Nº	%
1	Algo que irá acontecer	13	72,2
2	outros	4	22,2
3	Sem resposta	1	5,5

Fonte: arquivo do autor, 2022.

Temos assim que mais de 70% dos grupos conseguiram se aproximar de uma ideia do que é um evento previsível, valendo ressaltar que alguns deles usaram apenas ou complementaram suas definições por meio de exemplos.

Quanto aos demais grupos, que apresentaram definições inadequadas observou-se a necessidade de retomada sobre o que é evento previsível e também se pode justificar esses equívocos tendo em vista que a atividade anterior (de classificar eventos) não havia sido corrigida, uma vez que, a aplicação tinha a intencionalidade de analisar conhecimentos prévios e / ou desenvolvê-los nos alunos de forma mais autônoma e em grupo, sem a intervenção direta do professor.

#### 6.1.4.2. Evento aleatório

Em relação a eventos aleatórios, que é o tipo de evento utilizado em estatística, partindo da pergunta: *“O que é um evento não previsível ou aleatório?”*, criou-se quatro categorias para classificar os indicadores (as evidências) apresentadas pelos grupos de alunos, sendo elas: “Imprevisível”, “Inesperado”, “Independente” e “Sem resposta” (Quadro 5).

A categoria “Imprevisível” destina-se a indicadores/evidências que apresentam a ideia oposto a algo previsível, isto é, deixam que um evento aleatório é algo que acontece, porém não podemos prever o resultado. Já a categoria “Inesperado” baseia-se em evidências que falam que evento é algo que acontece de forma inesperada apenas, de “surpresa”. Por fim, a categoria “Independente” trata-se de evidências que desenvolvem a ideia que é um acontecimento que não depende do outro e não estão fazendo apontamentos diretivos sobre resultados que não se prevê, mas sim, em algumas delas comentam apenas que são resultados que não dependem de outro.

Quadro 5: O que é um evento não previsível ou aleatório?

Categorias	Indicadores
Imprevisível	EV3: o evento aleatório é quando não estamos cientes de que aquilo irá acontecer EV4: o evento não previsível é inesperado que não planejamos e não esperado considerado aleatório no nosso dia a dia EV5: é um evento que você não pode saber o que vai acontecer. Evento aleatório pode ser entendido como um fenômeno que quando repetido várias vezes de forma parecida apresenta resultados Imprevisíveis EV12: evento não previsível - não planejado; aleatório - não previsto EV14: um evento não previsível é um evento que "não" tem como prever

	EV10: um evento aleatório pode ser entendido como um fenômeno que, quando repetido várias vezes de forma semelhante apresenta resultados não previsíveis EV17: um evento não previsível é uma coisa que acontece aleatoriamente, que você prevê EV18: É algo ou alguma situação que não se pode ter certeza ou situação não concreta. Exemplo: chuva, árvore cair, avião cair ou morte
Inesperado	EV1: é quando não se tem noção do que vai acontecer ou quando acontece algo que não imaginava EV6: algo que acontece, mas você não esperava, como por exemplo um acidente EV7: é uma coisa que acontece inesperadamente EV9: ex: estar andando de bike e ocorrer de um carro me bater EV11: algo que não foi planejado e nem esperado EV13: quando acontece algo que não é provável. Acontecimentos acidentais por exemplo EV15: um evento não previsível é quando há algo acontece e você não tinha noção que iria acontecer EV16: um evento não previsível ou aleatório é um acontecimento que não possui indícios de que ocorrerá
Independente	EV8: um acontecimento que não depende de outro antes para acontecer
Sem resposta	EV2

Fonte: arquivo do autor, 2022.

Partindo do princípio de que um evento aleatório é um evento que acontece e não se consegue prever com exatidão o resultado, temos que, a categoria “Inesperado” e “Imprevisível” são as que mais se aproximam de uma conceituação correta referente a um evento aleatório e para melhor observar o desempenho dos alunos os dados foram organizados de acordo com sua frequência relativa e absoluta (Tabela 4), o que possibilita compreender melhor se o grau de compreensão pode ser considerado satisfatório.

Tabela 4: Síntese dos resultados sobre definição evento aleatório

Ordem	Categorias	Unidades de registro	
		Nº	%
1	Inesperado	8	44,5
2	Imprevisível	8	44,5
3	independente	1	5,5
4	Sem resposta	1	5,5

Fonte: arquivo do autor, 2022.

Pode-se observar que para eventos aleatórios aproximadamente 85% dos alunos se aproximaram da definição (mais informal) desse tipo de evento tendo apenas 5,5% que se distanciou ao afirmar que ser um evento aleatório é ser independente e a mesma porcentagem que deixou a resposta em branco.

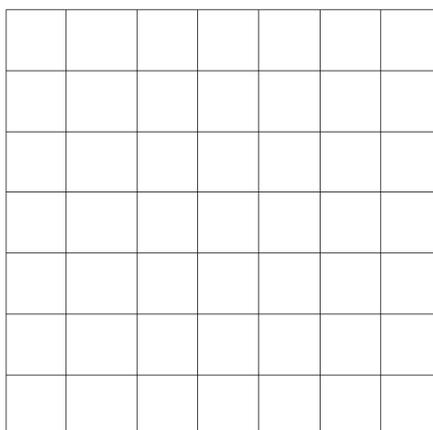
## 6.2. ATIVIDADE 3: BINGO DAS PROBABILIDADES – EXPLORANDO O JOGO

Trata-se de uma atividade autoral (feita por mim mesmo) e se baseia na aplicação de um bingo envolvendo os possíveis valores obtidos pela soma de dois dados. O objeto utilizado para o sorteio online é evidenciar o que é um dado honesto. A atividade tem dois momentos: momento 1: montagem da ficha de jogo (individual) e sorteio dos valores sendo 4 possíveis vitórias. momento 2: preenchimento da ficha em grupo com análise e conceituações de espaço amostral, eventos favoráveis e discussão de probabilidades sem utilizar as fórmulas tradicionais, apenas analisando o espaço amostral. Esta atividade é composta por 5 perguntas todas qualitativas (dissertativas) sendo uma delas com 3 itens, totalizando 7 respostas por folha (ver Apêndice 3) e foram coletadas as respostas de 16 grupos o que gerou 16 evidências para serem realizadas.

### 6.2.1. Montando a tabela de todas as possibilidades.

A proposta de montagem da tabela com todas as possibilidades de somas de dois dados é mais uma etapa importante para construir o espaço amostral. Para essa atividade os alunos possuíam uma tabela com 7 linhas e 7 colunas vazias (Figura 11).

Figura 11: Tabela totalmente em branco




Fonte: arquivo do autor, 2022.

Após aplicar a atividade na primeira sala foi possível observar uma certa dificuldade em compreender como preencher a tabela, em relação às laterais, assim a partir das próximas atividades optou-se em fornecer tabelas com a primeira linha e primeira coluna numerada (Figura 12).

Figura 12: Tabela previamente preenchida

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Fonte: arquivo do autor, 2022.

Em relação a formulação interna das tabelas (apresentação da soma) não houve dificuldades - após definidas as duas colunas laterais (Figura 13), porém uma forma que se destacou em relação ao preenchimento foi uma tabela (Figura 13) onde as somas não foram diretamente preenchidas internamente mais sim por uma linha diagonal, o que mostra que o grupo de alunos observou que havia um padrão nas somas.

Figura 13: Tabela preenchida por pares de números e somas diagonais.

X	1	2	3	4	5	6	
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	7
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	8
3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	9
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	10
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	11
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	12

Fonte: arquivo do autor, 2022.

Em destaque temos que as setas diagonais estão indicando a soma dos números ao qual a linha diagonal passa são as mesmas, sendo uma maneira prática de representar as somas sem perder a essência de quais números em suas devidas posições lhes formaram.

Organizar a tabela dessa forma facilita ao utilizá-la para resolver situações problemas com probabilidades condicionais, como por exemplo “Qual a probabilidade de sair a soma 7 sabendo que em um dos dados já saiu o número 3?”, assim utilizá-la em sala de aula nesse formato é mais prático e produzirá boas discussões em relação aos entendimentos de situações problemas como a citada anteriormente, além de tornar a tabela “mais universal” de fácil preenchimento quando resolver trabalhar com outras operações entre dois dados.

#### 6.2.2. O Espaço amostral

A fim de reforçar o que é espaço amostral numericamente falando, aplicou-se a questão enunciada como “*Se o espaço amostral a probabilidade é o conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório, qual a quantidade de elementos desse espaço amostral?*”, foi intencional contextualizar o que é espaço amostral a fim de que percebam que a tabela do exercício 2, correspondia à tabela a ser usada em exercícios futuros de probabilidade.

Nesta questão não houve erros, mostrando que os alunos puderam compreender como o que é um espaço amostral e possivelmente como calcular ele numericamente.

#### 6.3. ATIVIDADE 4: E O IMPROVISO QUE VIROU MATEMÁTICA

Com o intuito de apresentar o experimento O jogo dos Discos a atividade quatro chamada “*E o improviso que virou matemática*” se trata de uma atividade introdutória ao que é o jogo dos discos, partindo de um referencial textual extraído do livro Matemática na Prática - Módulo I - Jogo dos discos, e sequenciado de duas perguntas para reflexão. Essa atividade foi feita de forma oral com os alunos.

Dentre as anotações feitas pelo professor-pesquisador e autor desta pesquisa destacamos algumas falas dos alunos.

Na pergunta “*Qual seria o diâmetro ideal para a situação descrita?*”, proporcionou algumas respostas que se destacaram (Figura 14):

Figura 14: Questões em destaque sobre o diâmetro ideal

<p>→ O diâmetro tem que ser menor.</p> <p>(O diâmetro ideal teria que ser menor)</p>
<p>Menor que o quadrado seria ideal</p> <p>(Menor que o quadrado seria ideal)</p>
<p>Menor</p> <p>(Menor)</p>
<p>talvez 1,5 cm</p> <p>(talvez 1,5 cm)</p>

Fonte: arquivo do autor, 2022.

Assim, é possível observar o entendimento por parte dos alunos sobre o funcionamento do jogo, uma vez que, pontua-se somente quando o círculo estiver dentro do quadrado, logo se o diâmetro for muito grande não haverá pontuação.

Referente ao segundo questionamento “O que temos que levar em conta ao pensar no tamanho do disco, pensando que o jogo acontece sob um tabuleiro quadriculado?”, algumas respostas sintetizam as discussões (Figura 15).

Figura 15: Justificativas em destaque sobre o diâmetro ideal

<p>→ Pois se ele for muito grande ele pode sair do tabuleiro</p> <p>(Pois se ele for muito grande ele pode sair do tabuleiro)</p>
<p>Temos que levar em conta o tamanho do tabuleiro</p> <p>(Temos que levar em conta o tamanho do tabuleiro)</p>
<p>Quanto menor a área do disco maior é a chance dele acertar o alvo</p> <p>(Quanto menor a área do disco maior é a chance dele acertar o alvo)</p>
<p>Ele não pode ultrapassar as barreiras.</p> <p>(Ele não pode ultrapassar as barreiras)</p>

Fonte: arquivo do autor, 2022.

Ao analisar as evidências elas apresentam respostas diversas, dentre elas duas enunciam que se o tamanho do disco for muito grande ele poder-se-á ultrapassar/sair do tabuleiro. Outra aponta que temos que levar em conta é o tamanho do tabuleiro e faltam argumentos para concluir se eles se referiam ao quadriculado do tabuleiro ou a área total ocupada pelo tabuleiro, dentre as falas em destaques temos

uma fala que se remete a quanto menor o disco mais chances de acertos, tendo em vista que o propósito do jogo é acertar dentro do quadrado sem tomar as laterais do quadriculado.

#### 6.4. ATIVIDADE 5: ETAPA 1 - JOGO DOS DISCOS

A primeira etapa do jogo dos discos é uma atividade de introdução ao funcionamento do jogo dos discos, onde os alunos têm seu primeiro contato com o tabuleiro e "peças" e regras.

A partir dessa atividade assumimos a nomenclatura "Gx" para "Grupo x" com  $x = 1, 2, \dots, 16$ , tal mudança foi assumida tendo em vista que agora os grupos serão fixos e temos um total de 16 grupos, logo, nas atividades 5, 6 e 7 quando nos referirmos a G1 em uma atividade é o mesmo grupo G1 em qualquer uma das outras.

Nessa etapa são feitos 6 lançamentos com dez peças e registrados em tabelas os casos favoráveis. Durante a atividade se tem perguntas tanto sobre jogos quanto introduções e cálculo de probabilidades. Essa atividade contém 9 questionamentos, sendo eles: um de múltipla escolha, cinco de preenchimentos de tabelas (passíveis de comparação: acertos e erros) e três dissertativos. Foram coletadas informações de 16 grupos.

##### 6.4.1. Definindo regras

Para iniciar o jogo a definição de regras é fundamental sendo assim a primeira questão "*Definindo regras*" busca realizar a discussão da pergunta 1 do livro "O jogo dos Discos" quando é indicado na p.19: "*Algumas questões para pensar*" e na questão 1 se tem: "*Como proceder com os lançamentos para que sejam aleatórios*" e questão 2: "*Um jogador, ao lançar uma moeda, chega bem perto e mira no centro de um quadrado. Seu lançamento é aleatório?*". Assim, a fim de criar uma questão qualitativa, que englobasse as duas questões criou-se a seguinte questão (Figura 16):

Figura 16: questão 1 da folha de atividades 5

- 1). Como garantir que teremos lançamentos aleatórios, isto é, como garantir que não teremos um padrão justo ao realizarmos os lançamentos?
- a). Definir uma distância padrão para lançar os dados.
  - b). Ficar o mais próximo possível do tabuleiro e jogar na posição vertical das moedas.
  - c). Colocar uma venda em quem jogar os dados.
  - d). Revezar em cada momento um integrante do time jogar.

Esse questionamento foi muito importante, pois, a partir das respostas criamos algumas regras para a realização do jogo já citadas anteriormente. Vale ressaltar, que foi permitido que os grupos destacam mais de uma alternativa, assim, ao organizar e contabilizar as respostas dos 16 grupos obteve-se o seguinte resultado:

Tabela 5: Resultado sobre como garantir um padrão justo a ser cumprido durante as jogadas.

QUESTÃO 1		
Opção	Votos	Grupos
A	8	G1, G7, G10, G11, G12, G14, G15, G16
B	0	-----
C	1	G1
D	4	G3, G4, G6, G13
NÃO OPINOU	4	G2, G5, G8, G9

Fonte: arquivo do autor, 2022.

Sendo assim, foi possível concluir que os alunos apontaram como principais soluções as alternativas: “a) Definir uma distância padrão para lançar os dados” e “d) Revezar em cada momento um integrante do grupo”, ao discutir com os alunos eles apontaram que a alternativa (a) garantiria que não houvesse trapaças, principalmente por se tratar de um jogo e ainda apontaram:

*“Professor, é bom deixarmos combinado de ninguém esticar o braço, pois, aí seria uma forma de trapacear e quebrar a regra”*

*“Para garantir a distância vamos colocar todos jogando as peças atrás de uma carteira, assim fica mais difícil não cumprir com o combinado e também o obstáculo maior chama mais a atenção que uma linha no chão”*

Já a alternativa (d) foi apontada como importante, pois, além de garantir que a função não ficaria apenas a um integrante do grupo teríamos que a questão de força colocada nos lançamentos se tornaria uma variável que não teria importância no experimento, como podemos observar na fala de alguns alunos:

*“Como estamos vendo aqui que são muitos lançamentos melhor revezar”*

*“Melhor revezar assim todos jogam”*

*“Bom de reverter é que ninguém se cansa”*

*“Também revezando fica mais legal porque assim cada um tem uma força para jogar não tem como roubar nos pontos”*

Também foram levantadas algumas indagações como:

“*Mas vamos revezar de que forma? Cada um joga uma vez ou cada um joga um tipo de objeto?*” – quanto a essa questão observei que alguns grupos até colocaram os nomes de quem lançou cada vez.

“*Eu acho melhor um só jogar porque aí sim garante que vai dar resultados justos*” – quanto a esse questionamento e o anterior foi indicado que cada grupo se organizasse da forma que achassem mais justa, pois, a intenção na questão um era apenas definir regras gerais e deixar que os alunos em grupo se organizassem, buscando desenvolver neles a autonomia, a ética e trabalho em grupo.

#### 6.4.2. Por que criar regras?

A fim de discutir a importância de regras buscando a opinião dos alunos em relação ao porquê regras são importantes principalmente quando falamos de jogo, levando o aluno a refletir ao questionar: “Criar regras para realizar os lançamentos partindo das ideias propostas na questão 1 é importante? Justifique.”

A partir dessa questão foram criadas três categorias (Quadro 6) que englobam de forma excludente os indicadores (respostas de cada grupo: G1, G2, ..., G16). Na categoria “Jogo justo com padrões” destacou-se e as justificativas evidenciaram que na opinião dos grupos padrões devem ser criados para que não haja “trapaça” e alterações nos resultados. Na categoria “Jogo organizado” a resposta foi bem direta e diziam respeito a manter uma estrutura fixa no jogo. Na categoria “outros” temos justificativas que focam em regras ou comentam sobre o jogo não justificando necessariamente o porquê da criação de regras.

Quadro 6: Justificativa sobre a criação de regras.

Categorias	Indicadores
Jogo Justo com padrões	G1: sim, para deixar o jogo mais justo G2: Sim, sem as regras os lançamentos seriam irregulares e não ter parâmetros atrapalha os resultados G3: Sim, pois os lançamentos serão mais justos já que não haverá padrões G4: Sim, pois com as regras, é possível realizar o jogo de forma justa, ou seja, garantir que os lançamentos não sejam planejados ou trapaceados G7: sim, para que haja um padrão justo dos resultados G9: sim, pois dependendo de onde você se posiciona para lançar é mais de acertar G11: sim, para haver uma comparação justa e não ter desavenças G12: sim, pois garante que um padrão justo para lançamentos será estabelecido e os cálculos de probabilidade não serão afetados ou prejudicados

	G13: Sim, para não haver conflitos e ser justo G14: sim, para estabelecer padrões e deixar o jogo justo G15: sim, pois obteremos resultados justos e honestos G16: sim, pois garante um lançamento mais "justo" onde exige a sorte e não habilidade, além de dificultar trapaças
Jogo organizado	G5: sim, pois as regras servem para deixar o jogo organizado
Outras	G6: os jogadores serão alternados já que cada pessoa tem um jeito diferente de jogar e uma força diferente G8: sim as chances são menores de acertar no lugar certo G10: desde que não possua totalmente da linha sabia, apenas para botões

Fonte: arquivo do autor, 2022.

Para melhor analisar qual resposta deve maior destaque os dados foram quantificados (Tabela 6), a fim de se ter uma síntese dos resultados de cada categoria e a partir daí discutir sobre a posição de cada grupo perante o questionamento.

Tabela 6: Síntese sobre importância de regras no jogo

Ordem	Categorias	Unidades de registro	
		Nº	%
1	Jogo Justo com padrões	12	75
2	Outros	3	18,75
3	Jogo organizado	1	6,25

Fonte: arquivo do autor, 2022.

Ao observar os resultados sintetizados pode-se perceber que a grande maioria dos grupos de alunos acreditam que a função das criações de regras serve para criar um “Jogo justo com padrões”, essa pergunta foi feita e analisada buscando incentivar os alunos em seus grupos a seguirem as regras ao refletir e escrever sobre sua importância.

#### 6.4.3. O diâmetro dos objetos

Discutir e firmar a noção da relação entre diâmetro do objeto e lado dos quadrados que formam o tabuleiro é um conceito aparentemente simples, porém de extrema importância, assim, realizou-se uma adaptação do questionamento indicado no livro “O jogo dos discos” (CAETANO; PATERLINI, 2013, p. 19) enunciada: “*O que acontece se fizermos 1000 lançamentos com uma moeda cujo diâmetro é maior que o lado do quadrado quadriculado?*”, para “(b). *O diâmetro dos objetos tem alguma*

*relação com a quantidade de lançamentos favoráveis obtidos nessas jogadas iniciais? Comente sobre sua resposta.*” com a finalidade de levar os alunos a fazerem uma maior reflexão em relação ao diâmetro dos objetos circulares e sua relação com os casos favoráveis de acontecer o evento de acertar o objeto dentro do quadriculado.

E obteve-se os seguintes resultados em relação a influência dos diâmetros em relação aos lançamentos favoráveis:

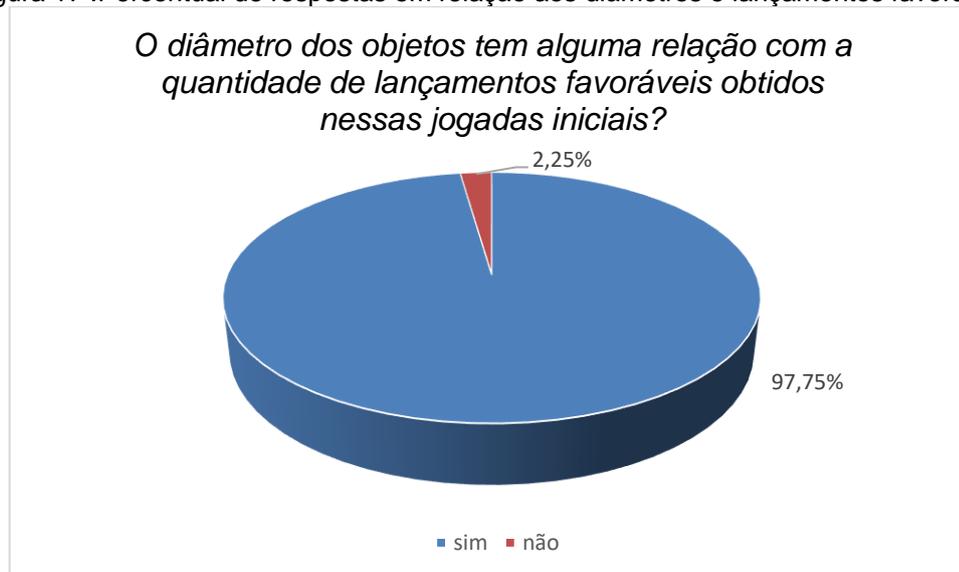
Quadro 7: Respostas sobre a relação entre diâmetro e lançamentos favoráveis

RELAÇÃO DIÂMETRO E LANÇAMENTOS FAVORÁVEIS		
SIM	15	G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7, G9, G10, G11, G12, G13, G14, G15, G16
NÃO	1	G8

Fonte: arquivo do autor, 2022.

Para melhor analisar as informações temos a representação dos resultados por meio da frequência relativa em percentual (Figura 17).

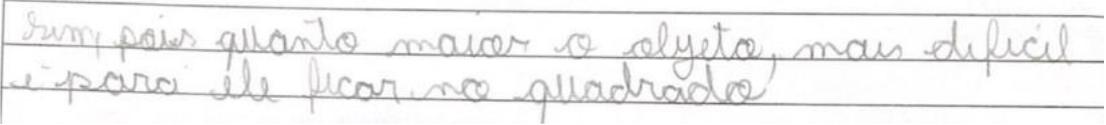
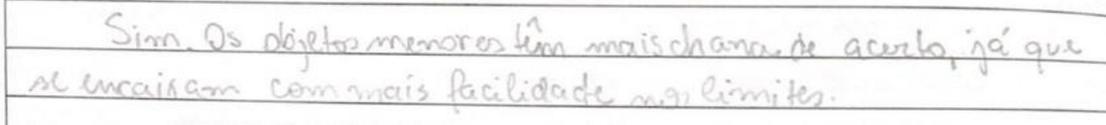
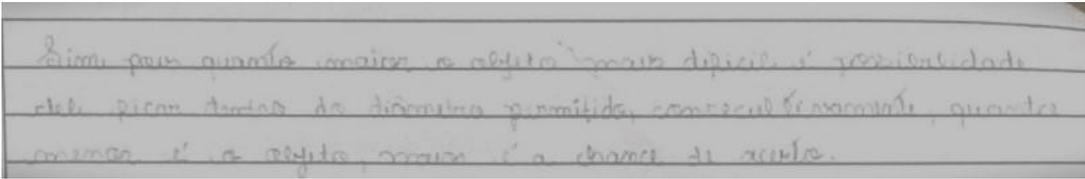
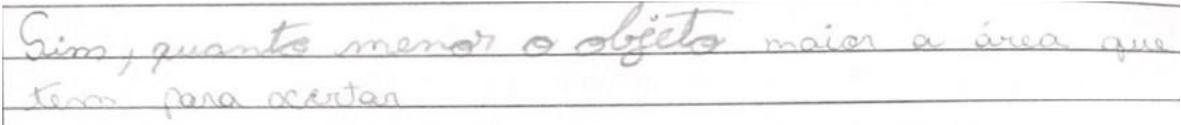
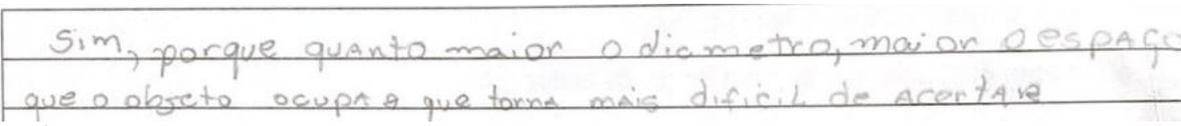
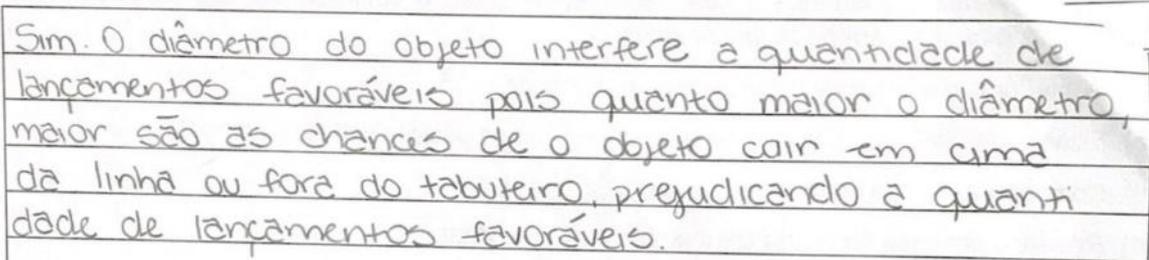
Figura 17 :Percentual de respostas em relação aos diâmetros e lançamentos favoráveis



Fonte: arquivo do autor, 2022.

Observa-se assim que 15 grupos (93,75%) dentre o total dos 16 grupos apontaram que acreditam que têm influência em diâmetro e número de casos favoráveis, e justificaram ou fizeram apontamentos (ver Figura 18) de que discos maiores têm menos possibilidades e/ou que discos menores têm maiores possibilidades de casos favoráveis.

Figura 18 :Justificativa referente a relação diâmetro e lançamentos favoráveis

G1:

(sim, pois quanto maior o objeto, mais difícil é para ele ficar no quadrado)
G2:

(Sim. Os objetos menores têm mais chance de acerto, já que se encaixam com mais facilidade nos limites)
G4:

(sim, pois quanto maior o objeto mais difícil é a possibilidade dele ficar dentro do diâmetro permitindo, consecutivamente, quanto menor é o objeto, maior é a chance de acerto)
G10:

(Sim, quanto menor o objeto maior a área que ele tem para acertar)
G11:

(pode se dizer que sim pois quanto menor o tamanho, maior a probabilidade de lançamentos favoráveis já que o objeto pode entrar facilmente nos espaços)
G12:

(Sim. O diâmetro do objeto interfere a quantidade de lançamentos favoráveis, pois, quanto maior o diâmetro, maior as chances de o objeto cair em cima da linha ou fora do tabuleiro prejudicando a quantidade de lançamentos favoráveis)

Fonte: arquivo do autor, 2022.

Dentre as justificativas a apontada pelo G4 no trecho “diâmetro permitido” se destacou, pois, é apresentada noções claras que o tamanho do quadrado do tabuleiro tem uma relação com o tamanho do diâmetro do objeto para que ocorram casos favoráveis, ou seja, se aumentarmos os tamanhos dos quadrados poderemos aumentar o tamanho dos objetos e também que se os objetos possuírem diâmetros

maiores não teremos casos favoráveis pois os seus diâmetros irão além do “diâmetro permitido” pelos quadrados que formam o tabuleiro.

Também vale ressaltar que no apontamento do G10 os alunos trazem a possibilidade de relacionar área com números de acertos.

Sobre o G8 que optou por não ter relação, a justificativa foi: “*não, pois se encontramos no mesmo lugar na hora do lançamento*”, eles assumem que apenas a posição em que se encontram ao lançarem influenciam no número de casos favoráveis.

#### 6.4.4. Cálculo da probabilidade

Ao adentrar no cálculo de probabilidades propriamente tem-se a questão “c” com a apresentação da definição de probabilidade como a relação de casos favoráveis e casos possíveis (Figura 19).

Figura 19: Apresentação da fórmula da probabilidade simples e perguntas de aplicação.

(c). O cálculo da probabilidade é feito por meio da razão:

$$\frac{\text{casos favoráveis}}{\text{casos possíveis}}$$

Partindo dessa ideia, calcule a probabilidade obtida em cada um dos lançamentos:

MOEDAS DE 10 CENTAVOS	MOEDAS DE 20 CENTAVOS
BOTÕES DE CAMISA	BOTÕES PEQUENOS

Fonte: arquivo do autor, 2022.

Para analisar essa questão criou-se 7 padrões de análise sendo eles:

- “*Não fez*” para respostas não respondidas
- “*Errou conceito*” para casos em que houve a tentativa de realizar a atividade, porém ela teve erros conceituais.
- “*Errou cálculo*” para acertos de conceitos, porém, erros na realização da simplificação ou cálculo da porcentagem em decimal ou percentual.
- “*Acertou (sem simplificar ou forma decimal)*” para aplicações corretas da fórmula, porém, sem simplificar ou escrever na forma decimal.
- “*Acertou e simplificou*” para casos em que além da aplicação da fórmula corretamente houve ainda a simplificação quando possível.
- “*Acertou e escreveu de forma decimal também*” acertos de fórmulas escrita na forma decimal, porém, não simplificação das frações.

- “Acertou e simplificou e escreveu na forma decimal” esse tipo de resposta seria o acerto de todas as formas de escrever e simplificação.

Para melhor analisar os resultados e o grau de compreensão dos grupos de alunos, os tipos de acertos foram apresentados relacionando com quais grupos os tiveram (Tabela 7).

Vale ressaltar que criar esses diversos critérios permite uma melhor análise do professor sobre pontos de atenção e retomada das atividades e até mesmo maneiras de avançar com os alunos.

Tabela 7: Síntese dos tipos de respostas

CÁLCULO DE PROBABILIDADE DE CASOS FAVORÁVEIS		
Tipo de resposta	quantidade	Informação referente ao grupo
não fez	0	-----
errou conceito	0	-----
errou cálculo	0	-----
acertou (sem simplificar ou forma decimal)	7	G4, G5, G8, G11, G12, G15, G16 E
acertou e simplificou	6	G1, G3, G7, G9, G10, G14
acertou e escreveu de forma decimal também	2	G2, G6
acertou e simplificou e escreveu na forma decimal	1	G13

Fonte: arquivo do autor, 2022.

Dos resultados obtidos pode-se observar que a grande maioria das respostas ficaram na representação de frações feitas de forma correta sem simplificação ou forma decimal e acertos com simplificações (fração irredutível), o que apresenta que os alunos recordam noções de simplificação de frações e divisores comuns entre números.

Sobre as operações alguns alunos apresentaram as etapas outros não (Figura 20), e pode-se observar uma divergência nos resultados no número devido a individualidade dos arremessos, porém, o numerador é o mesmo (sessenta) devido a orientação de mesma quantidade de lançamentos.

Figura 20: Exemplos de respostas e representações de probabilidade simples.

Acertou (sem simplificar ou forma decimal)			
G12:	MOEDAS DE 10 CENTAVOS	$\frac{17}{60}$	
	BOTÕES DE CAMISA	$\frac{25}{60}$	
	MOEDAS DE 20 CENTAVOS	$\frac{2}{60}$	
	BOTÕES PEQUENOS	$\frac{34}{60}$	
Acertou e simplificou			
G11:	MOEDAS DE 10 CENTAVOS	$\frac{6}{60} = \frac{1}{10}$	
	BOTÕES DE CAMISA	$\frac{22}{60} = \frac{11}{30}$	
	MOEDAS DE 20 CENTAVOS	$\frac{2}{60} = \frac{1}{30}$	
	BOTÕES PEQUENOS	$\frac{33}{60} = \frac{11}{20}$	
Acertou e escreveu de forma decimal também			
G2:	MOEDAS DE 10 CENTAVOS	$\frac{13}{60} \approx 0,21$	
	BOTÕES DE CAMISA	$\frac{29}{60} \approx 0,4$	$\frac{290}{60} = 4,83$
	MOEDAS DE 20 CENTAVOS	$\frac{12}{60} = 0,2$	$\frac{12}{60} = 0,2$
	BOTÕES PEQUENOS	$\frac{45}{60} \approx 0,7$	$\frac{450}{60} = 7,5$
Acertou e simplificou e escreveu na forma decimal			
G13:	MOEDAS DE 10 CENTAVOS	$\frac{10}{60} = \frac{1}{6} = 0,16$	
	BOTÕES DE CAMISA	$\frac{27}{60} = \frac{9}{20} = 0,4$	
	MOEDAS DE 20 CENTAVOS	$\frac{5}{60} = \frac{1}{12} = 0,08$	
	BOTÕES PEQUENOS	$\frac{37}{60} = 0,6$	

Fonte: arquivo do autor, 2022.

Em relação a forma decimal, ainda que o conceito não tenha sido apresentado foi interessante observar que alguns grupos relacionaram a representação de fração com uma divisão onde o numerador é o dividendo e o denominador é o divisor e o quociente é uma forma de representar probabilidade ainda que tenha sido apresentado apenas a fórmula em forma de fração.

#### 6.4.5. Evento complementar

Com a ideia de desenvolver outros conceitos de probabilidade foi criada a questão “d” que não é indicada no livro texto do experimento, porém, foi criada com a intencionalidade de explorar potencialidades do experimento, a mesma foi enunciada contendo um texto orientativo (Figura 21).

Figura 21: Definição de complementar de um evento e aplicação.

(d). Agora monte a probabilidade complementar de cada um dos eventos.

São os eventos que se completam em relação ao espaço amostral. O evento complementar **A**, associado a uma experiência aleatória e denotado por  $\bar{A}$ , só ocorre se **A** deixar de ocorrer, isto é, é o evento formado por todos os elementos do espaço amostral que não pertencem a **A**.

EX: Se jogo um dado com 6 faces enumeradas de uma a seis, meu espaço amostral são os números: 1,2,3,4,5 e 6.

Dentro desse experimento eu crio um evento: “sair um número maior de 4” temos:  
Casos favoráveis é sair os números 5 ou 6, probabilidade  $2 / 6$  (dois sextos).

MOEDAS DE 10 CENTAVOS	MOEDAS DE 20 CENTAVOS
BOTÕES DE CAMISA	BOTÕES PEQUENOS

Fonte: arquivo do autor, 2022.

É importante evidenciar que além da leitura e discussão em grupo, alguns grupos solicitaram orientações sobre a temática para o professor e pesquisador deste trabalho.

Assim, para analisar a eficácia da implementação dessa atividade na sequência didática criou-se alguns critérios de análise e tabelou-se os resultados (Tabela 8).

Tabela 8: Análise dos resultados obtidos no cálculo da probabilidade complementar.

CÁLCULO DE PROBABILIDADE COMPLEMENTAR - direta		
Tipo de resposta	quantidade	Informação referente ao grupo
não fez	0	-----
errou conceito	1	G1
errou cálculo	0	-----
acertou (s/ simplificar ou forma decimal)	7	G4, G5, G8, G11, G12, G15, G16
acertou e simplificou	5	G3, G7, G9, G10, G14
acertou e escreveu de forma decimal também	2	G2, G6
acertou e simplificou e escreveu na forma decimal	1	G13

Fonte: arquivo do autor, 2022.

Aqui observa-se que o conceito foi bem compreendido, pois, levando em conta dentre os 16 grupos, 15 deles acertaram, se tem um bom indicativo referente a compreensão do conceito de probabilidade complementar, pois, além de acertaram alguns grupos ainda as escreveram de formas diferentes. (Figura 21) e um grupo apresentou erro de conceito repetindo os mesmos valores do item c da questão (Figura 22).

Figura 22: Exemplos de respostas e representações de probabilidade complementar.

Errou conceito	
MOEDAS DE 10 CENTAVOS $\frac{15}{60}$	MOEDAS DE 20 CENTAVOS $\frac{7}{60}$
BOTÕES DE CAMISA $\frac{20}{60}$	BOTÕES PEQUENOS $\frac{39}{60}$
G1:	
acertou (s/ simplificar ou forma decimal)	

<p>G12:</p> <table border="1"> <tr> <td>MOEDAS DE 10 CENTAVOS</td> <td><math>\frac{43}{60}</math></td> </tr> <tr> <td>BOTÕES DE CAMISA</td> <td><math>\frac{35}{60}</math></td> </tr> </table>	MOEDAS DE 10 CENTAVOS	$\frac{43}{60}$	BOTÕES DE CAMISA	$\frac{35}{60}$	<table border="1"> <tr> <td>MOEDAS DE 20 CENTAVOS</td> <td><math>\frac{58}{60}</math></td> </tr> <tr> <td>BOTÕES PEQUENOS</td> <td><math>\frac{26}{60}</math></td> </tr> </table>	MOEDAS DE 20 CENTAVOS	$\frac{58}{60}$	BOTÕES PEQUENOS	$\frac{26}{60}$
MOEDAS DE 10 CENTAVOS	$\frac{43}{60}$								
BOTÕES DE CAMISA	$\frac{35}{60}$								
MOEDAS DE 20 CENTAVOS	$\frac{58}{60}$								
BOTÕES PEQUENOS	$\frac{26}{60}$								
acertou e simplificou									
<p>G9:</p> <table border="1"> <tr> <td>MOEDAS DE 10 CENTAVOS</td> <td><math>\frac{48 \div 6}{60 \div 6} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}</math></td> </tr> <tr> <td>BOTÕES DE CAMISA</td> <td><math>\frac{31}{60}</math></td> </tr> </table>	MOEDAS DE 10 CENTAVOS	$\frac{48 \div 6}{60 \div 6} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$	BOTÕES DE CAMISA	$\frac{31}{60}$	<table border="1"> <tr> <td>MOEDAS DE 20 CENTAVOS</td> <td><math>\frac{56 \div 2}{60 \div 2} = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}</math></td> </tr> <tr> <td>BOTÕES PEQUENOS</td> <td><math>\frac{23}{60}</math></td> </tr> </table>	MOEDAS DE 20 CENTAVOS	$\frac{56 \div 2}{60 \div 2} = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}$	BOTÕES PEQUENOS	$\frac{23}{60}$
MOEDAS DE 10 CENTAVOS	$\frac{48 \div 6}{60 \div 6} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$								
BOTÕES DE CAMISA	$\frac{31}{60}$								
MOEDAS DE 20 CENTAVOS	$\frac{56 \div 2}{60 \div 2} = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}$								
BOTÕES PEQUENOS	$\frac{23}{60}$								
acertou e escreveu de forma decimal também									
<p>G6:</p> <table border="1"> <tr> <td>MOEDAS DE 10 CENTAVOS</td> <td><math>\frac{51}{60} = 0,85</math></td> </tr> <tr> <td>BOTÕES DE CAMISA</td> <td><math>\frac{32}{60} = 0,533</math></td> </tr> </table>	MOEDAS DE 10 CENTAVOS	$\frac{51}{60} = 0,85$	BOTÕES DE CAMISA	$\frac{32}{60} = 0,533$	<table border="1"> <tr> <td>MOEDAS DE 20 CENTAVOS</td> <td><math>\frac{57}{60} = 0,95</math></td> </tr> <tr> <td>BOTÕES PEQUENOS</td> <td><math>\frac{29}{60} = 0,5</math></td> </tr> </table>	MOEDAS DE 20 CENTAVOS	$\frac{57}{60} = 0,95$	BOTÕES PEQUENOS	$\frac{29}{60} = 0,5$
MOEDAS DE 10 CENTAVOS	$\frac{51}{60} = 0,85$								
BOTÕES DE CAMISA	$\frac{32}{60} = 0,533$								
MOEDAS DE 20 CENTAVOS	$\frac{57}{60} = 0,95$								
BOTÕES PEQUENOS	$\frac{29}{60} = 0,5$								
acertou e simplificou e escreveu na forma decimal									
<p>G13:</p> <table border="1"> <tr> <td>MOEDAS DE 10 CENTAVOS</td> <td><math>\frac{50}{60} = \frac{5}{6} = 0,83</math></td> </tr> <tr> <td>BOTÕES DE CAMISA</td> <td><math>\frac{33}{60} = \frac{11}{20} = 0,55</math></td> </tr> </table>	MOEDAS DE 10 CENTAVOS	$\frac{50}{60} = \frac{5}{6} = 0,83$	BOTÕES DE CAMISA	$\frac{33}{60} = \frac{11}{20} = 0,55$	<table border="1"> <tr> <td>MOEDAS DE 20 CENTAVOS</td> <td><math>\frac{55}{60} = \frac{11}{12} = 0,91</math></td> </tr> <tr> <td>BOTÕES PEQUENOS</td> <td><math>\frac{23}{60} = 0,38</math></td> </tr> </table>	MOEDAS DE 20 CENTAVOS	$\frac{55}{60} = \frac{11}{12} = 0,91$	BOTÕES PEQUENOS	$\frac{23}{60} = 0,38$
MOEDAS DE 10 CENTAVOS	$\frac{50}{60} = \frac{5}{6} = 0,83$								
BOTÕES DE CAMISA	$\frac{33}{60} = \frac{11}{20} = 0,55$								
MOEDAS DE 20 CENTAVOS	$\frac{55}{60} = \frac{11}{12} = 0,91$								
BOTÕES PEQUENOS	$\frac{23}{60} = 0,38$								

Fonte: arquivo do autor, 2022.

É importante levar em conta que essa “repetição” de atividades, uma vez que é parecida com a anterior, além de possibilitar a exploração da complementar de um número promove o exercício de aplicação de conceitos sem que haja diretamente uma lista de exercícios.

#### 6.4.6. É hora de explorar saberes

Assim como na questão anterior a questão “hora de explorar” trata-se de uma questão autoral, dessa vez com a intencionalidade de ampliar e/ou visitar as diferentes formas de escrever probabilidade além de servirem como base para os alunos responderem a seguinte questão: *O que se pode concluir analisando as probabilidades complementares e as favoráveis do acontecimento de um evento?*

Antes de chegar à questão final da atividade 5, foi apresentado aos alunos um texto de auxílio para recordar as formas de representar as frações (Figura 23).

Figura 23: Apresentação das diferentes formas de representar a probabilidade.

	<p>&gt;&gt; A probabilidade pode ser representada como fração, como porcentagem ou como número decimal. &gt;&gt; A probabilidade é sempre um número decimal entre 0 e 1, ou uma porcentagem entre 0% e 100%.</p>																				
<p><b>&gt;&gt; Mas como se representa essas probabilidades?? &lt;&lt;</b></p>																					
<p>A probabilidade em frações você já fez anteriormente... A probabilidade como número decimal é o resultado da divisão da probabilidade em forma de fração. Para calcular ela em forma de porcentagem basta multiplicar a probabilidade na forma decimal por 100 e inserir o símbolo da porcentagem. Complete a tabela:</p>																					
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 25%;">EVENTO</th> <th style="width: 25%;">Fração</th> <th style="width: 25%;">Decimal</th> <th style="width: 25%;">Porcentagem</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>MOEDA DE 10 CENTAVOS</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>MOEDA DE 25 CENTAVOS</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>BOTÃO DE CAMISA</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>BOTÃO PEQUENO</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>		EVENTO	Fração	Decimal	Porcentagem	MOEDA DE 10 CENTAVOS				MOEDA DE 25 CENTAVOS				BOTÃO DE CAMISA				BOTÃO PEQUENO			
EVENTO	Fração	Decimal	Porcentagem																		
MOEDA DE 10 CENTAVOS																					
MOEDA DE 25 CENTAVOS																					
BOTÃO DE CAMISA																					
BOTÃO PEQUENO																					
<p><b>&gt;&gt;&gt; HORA DE EXPLORAR &lt;&lt;&lt;</b></p>																					
<p>Representa agora as probabilidades complementares:</p>																					
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 25%;">EVENTO</th> <th style="width: 25%;">Fração</th> <th style="width: 25%;">Decimal</th> <th style="width: 25%;">Porcentagem</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>MOEDA DE 10 CENTAVOS</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>MOEDA DE 25 CENTAVOS</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>BOTÃO DE CAMISA</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>BOTÃO PEQUENO</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>		EVENTO	Fração	Decimal	Porcentagem	MOEDA DE 10 CENTAVOS				MOEDA DE 25 CENTAVOS				BOTÃO DE CAMISA				BOTÃO PEQUENO			
EVENTO	Fração	Decimal	Porcentagem																		
MOEDA DE 10 CENTAVOS																					
MOEDA DE 25 CENTAVOS																					
BOTÃO DE CAMISA																					
BOTÃO PEQUENO																					
<p>➤ O que se pode concluir analisando as probabilidades complementares e as favoráveis do acontecimento de um evento?</p>																					
<p>#DICA: faça a soma das duas probabilidades para cada caso e veja se acontece algo.</p>																					

Nesse momento da atividade acontece a formalização dos diferentes tipos de representação bem como uma atividade seguida para praticarem as diferentes formas de representação os resultados obtidos foram analisados e agrupados (Tabela 9).

Tabela 9: Resultados obtidos quanto a representação decimal e percentual dos casos favoráveis

REPRESENTAÇÃO DAS PROBABILIDADES DE CASOS FAVORÁVEIS		
Tipo de resposta	Quantidade	Informação referente ao grupo
não fez	0	---
errou conceito	1	G8
errou cálculo	0	---
acertou todas as representações	14	G2, G3, G4, G5, G6, G7, G9, G10, G11, G12, G13, G14, G15, G16
acertou fracionária	1	G1
acertou decimal	1	G1

Fonte: arquivo do autor, 2022.

Também foram analisadas as representações das probabilidades complementares (Tabela 10).

Tabela 10: Resultados obtidos quanto a representação decimal e percentual das probabilidades complementares

REPRESENTAÇÃO DAS PROBABILIDADES COMPLEMENTARES		
Tipo de resposta	Quantidade	Informação referente ao grupo
não fez	0	---
errou conceito	2	G8
errou cálculo	0	---
acertou todas as representações	14	G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7, G9, G10, G11, G12, G13, G14, G15, G16.
acertou fracionária	0	---
acertou decimal	0	---
acertou percentual	0	---

Fonte: arquivo do autor, 2022.

Como pode-se perceber o G1 na atividade seguinte conseguiu resolver corretamente como os demais grupos, exceto o G8 (grupo 8) que cometeu um erro conceitual (Figura 24)

Figura 24: Erro conceitual do cálculo de probabilidade de casos favoráveis e sua complementar.

Probabilidade de casos favoráveis			
EVENTO	Fração	Decimal	Porcentagem
MOEDA DE 10 CENTAVOS	$\frac{13}{100}$	0,13	13%
MOEDA DE 25 CENTAVOS	$\frac{15}{100}$	0,15	15%
BOTÃO DE CAMISA	$\frac{31}{100}$	0,31	31%
BOTÃO PEQUENO	$\frac{26}{100}$	0,26	26%

Probabilidade do complementar			
EVENTO	Fração	Decimal	Porcentagem
MOEDA DE 10 CENTAVOS	$\frac{47}{100}$	0,47	47%
MOEDA DE 25 CENTAVOS	$\frac{45}{100}$	0,45	45%
BOTÃO DE CAMISA	$\frac{29}{100}$	0,29	29%
BOTÃO PEQUENO	$\frac{34}{100}$	0,34	34%

Fonte: arquivo do autor, 2022.

Sobre o erro conceitual do G8 pode-se observar (Figura 23) que o mesmo se deu exclusivamente por ter colocado 100 no denominador e não 60, e, analisando que anteriormente o grupo havia acerto é possível concluir que o grupo foi induzido pela representa percentual (“por cem”) e acabou colocando o cem no denominador.

Ainda nessa sequência havia o seguinte questionamento: “O que se pode concluir analisando as probabilidades complementares e as favoráveis do acontecimento de um evento?” a proposta de tal pergunta é os alunos verificarem de forma indireta que a soma dos casos favoráveis de um evento com seu complementar

em frações dará a fração inteira, em percentual 100% ou algo muito próximo devido a arredondamentos e por fim que a probabilidade máxima em numeral é 1, isto é, “ dado um evento A, temos que a probabilidade de A é  $0 \leq P(A) \leq 1$  , e isso ocorreu quando os alunos realizaram as somas (Figura 25).

Figura 25: Algumas conclusões sobre análise do complementar e os casos favoráveis.

EV3:
<p><i>Somando as duas probabilidades:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- no caso de decimal, o resultado será 1;</li> <li>- no caso de fração e porcentagem, o resultado será 100%.</li> </ul> <p>Portanto, a soma das probabilidades complementares e as favoráveis do acontecimento de um evento nunca será maior que 1 e/ou 100%.</p>
<p>(somando as duas probabilidades: - no caso de decimal o resultado será 1; - no caso de frações e porcentagem o resultado será 100%. Portanto, a soma das probabilidades complementares e as favoráveis do acontecimento de um evento nunca será maior que 1 e/ou 100%)</p>
EV4:
<p><i>Ao analisar as probabilidades complementares e as favoráveis é possível concluir, ao fazer a soma, para cada caso o resultado será de 0,99 ; 99% ou 100%.</i></p>
<p>( Ao analisar as probabilidades complementares e as favoráveis é possível concluir, ao fazer a soma, para cada caso o resultado será de 0,99 ; 99% ou 100%</p>
EV7:
<p><i>A soma dos resultados favoráveis e complementares equivalem a seu inteiro. Logo, se ao somá-los isso não ocorrer, alguma coisa foi feita errada.</i></p>
<p>( A soma dos resultados favoráveis e complementares equivalem a seu inteiro. Logo, se ao somá-los isso não ocorrer, alguma coisa foi feita errada)</p>

Fonte: arquivo do autor, 2022.

Dentre as evidências citadas vale destacar o uso desse conceito de soma como parâmetro de verificação de acerto de exercícios (EV7) , a aproximação de 99% ou 100% (EV4) e também a conclusão que as probabilidades não ultrapassam 1 ou 100% (EV3).

## 6.5. ATIVIDADE 6: ETAPA II - EXPERIMENTO EM LARGA ESCALA

Com o intuito de proporcionar a vivência a experimentação, a atividade 6 trata-se da aplicação do experimento “Jogo dos Discos” em larga escala, a fim de, levar os alunos a entender os refinamentos de dados estatísticos e refletir sobre algumas

questões referentes a peças do jogo e possíveis equívocos. Essa atividade é composta por 6 questionamentos sendo eles: dois de múltipla escolha, um dissertativo, três de preenchimentos de tabelas (coleta de dados e passíveis de comparação). Foram coletadas informações de 16 grupos.

### 6.5.1. Quantidade de lançamentos e diâmetro

A questão 1 desta atividade busca explorar o que foi observado na atividade 5 em relação ao número de casos favoráveis e sua relação com o diâmetro dos objetos circulares lançados ao longo do experimento “O jogo dos discos”. A questão é enunciada como: “*O que acontece se lançarmos 100 moedas cujo diâmetro seja maior do que o lado do quadrado, no tabuleiro quadriculado?*”

Os resultados obtidos foram divididos em duas categorias: “Não será possível” e “Pode ser acontecimento possível” e observando os indicadores (Quadro 8) é possível verificar que a diferença entre essas categorias se dá pela força na afirmativa, isto é, os que estão na categoria “Não será possível” tem a certeza de que o evento de jogar um círculo de diâmetro maior que o lado do quadrado não acarretará casos favoráveis seguindo as regras já apresentadas e acordadas.

Quadro 8: Analisando a relação diâmetro e lado do quadrado do tabuleiro.

Categorias	Indicadores
Não será possível	G1: irá cair para fora do espaço ou em cima da linha G3: não fará pontos G4: se lançarmos moedas de circunferência maior que o lado do quadrado não será possível somar pontos, pois este só será válido se estiver dentro do quadrado e ele sendo maior será impossível. G5: nenhuma moeda vai cair dentro G6: nenhuma cairá dentro de quadrado, pois as moedas têm diâmetro maior G7: nenhuma vai ficar dentro 100% G8: sempre que as moedas forem lançadas irão cair em cima da linha ocupando sempre dois quadriculados nunca irá cair certo dentro do quadriculado como as regras determinam G9: as moedas lançadas não vão encaixar nos quadrados do tabuleiro G11: não iremos acertar nenhuma moeda G13: não iremos acertar o quadrado, pois o diâmetro da moeda é maior G16: irá cair fora da área do tabuleiro ou em cima da linha
Pode ser acontecimento possível	G2: provavelmente, nenhum lançamento será acertado, pois o diâmetro não se encaixa no quadrado G10: a maioria das moedas cairia para fora dos quadrados, por ser maior que ele G12: o número de lançamentos favoráveis provavelmente será pequeno G14: a chance de mais moedas acertarem os quadrados será menor G15: não iram entrar todas dentro do quadrado, apenas algumas

Fonte: arquivo do autor, 2022.

A fim de ter um panorama geral de como estão distribuídas as respostas nas categorias é importante apresentar a frequência relativa e absoluta (Tabela 11) de cada e assim continuar a análise.

Tabela 11: Síntese da análise do evento cujo diâmetro do objeto é maior que o quadrado do tabuleiro

Ordem	Categorias	Unidades de registro	
		Nº	%
1	Não será possível	11	68,75
2	Pode ser acontecimento possível	5	31,25

Fonte: arquivo do autor, 2022.

Ao analisar os dados é possível observar que ainda existem incertezas em relação aos casos favoráveis serem possíveis mesmo com objetos circulares com diâmetro maiores que os lados do quadrado do tabuleiro ou em relação às regras de que se as moedas tocarem as linhas não devem ser contadas como casos favoráveis. Tal situação é apresentada por 5 dos 16 grupos, isto é, aproximadamente 31% dos alunos ainda não conseguiram concluir esse aspecto do experimento.

Sobre a categoria “Não será possível”, vale ressaltar a palavra “nenhuma” que nos contextos afirmam a não possibilidade de cair moedas dentro dos quadrados e a frase “será impossível” do G4, abrem a possibilidade de discutir sobre o que seriam eventos impossíveis e que sua probabilidade é zero.

### 6.5.2. Comparando quantidade de lançamentos

A fim de discutir a necessidade da quantidade de arremesso, foi criada uma questão autoral (Figura 26) que busca analisar a percepção dos alunos em relação ao que esperam dos resultados agora no experimento em larga escala. Sendo a questão dois uma questão de múltipla escolha, com a possibilidade de assinalar apenas uma alternativa.

Figura 26:Enunciado da questão 2

- 2). No experimento anterior cada moeda foi lançada 6 vezes, vocês acham que lançar mais vezes 100, 200 vezes o que acontecerá com o resultado?
- Manterá o mesmo
  - Mudará muito pouco.
  - Terá uma diferença considerável.
  - Terá uma diferença muito grande.

Fonte: arquivo do autor, 2022.

Em relação aos resultados obteve-se votos diversos entre os grupos (Tabela 12) e alguns grupos assinalaram mais de uma opção, sendo assim compilar os dados para contagem é uma boa estratégia.

Tabela 12: Síntese das respostas da questão 2

QUESTÃO 2		
opção	votos	grupos
A	3	G4, G6, G7
B	6	G8, G10, G12, G13, G14
C	4	G1, G3, G11, G16
D	3	G5, G9, G15
OUTRO	1	G2
NÃO OPINOU	0	---

Fonte: arquivo do autor, 2022.

Em dados percentuais temos uma melhor visualização da distribuição dos votos dos grupos ( Figura 27 ).

Figura 27: Percentuais de votos em relação a quantidade de lançamentos



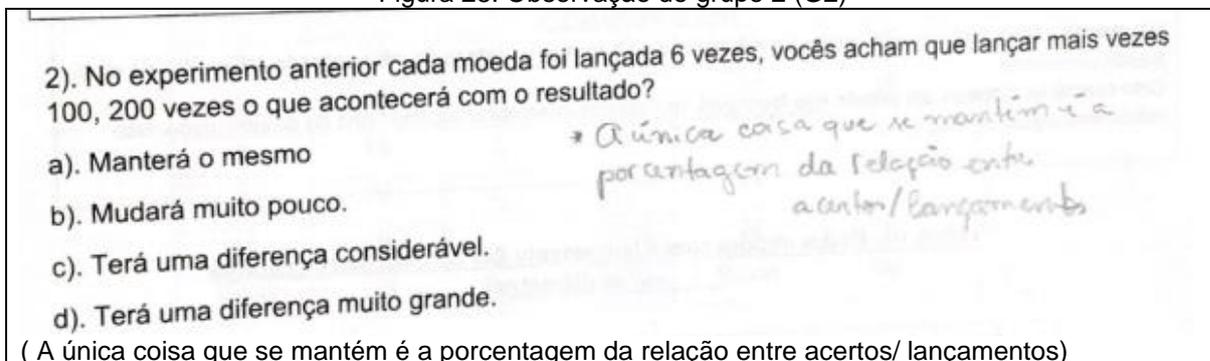
Fonte: arquivo do autor, 2022.

Em relação aos resultados pode-se analisar que a maioria dos grupos esperam que aconteça uma variação de probabilidades (alternativas b, c, d) de nível muito pouco ou considerável de diferença em relação aos experimentos com 6 lançamentos

de 10 moedas e 20 lançamentos de 10 moedas.

Valendo ressaltar que o G2 não assinalou nenhuma das alternativas, mas apresentou uma outra opinião (Figura 28).

Figura 28: Observação do grupo 2 (G2)



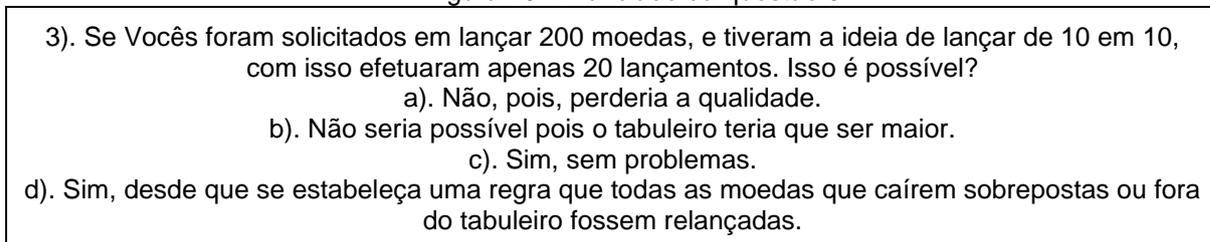
Fonte: arquivo do autor, 2022.

Tal observação diz respeito a manter apenas a relação em casos favoráveis e possíveis (razão apresentada na atividade 5, que diz respeito à escrita na forma fracionária).

### 6.5.3. Lançamentos agrupamos

Partindo da questão 6 (CAETANO; PATERLINI, 2013, p.19) do livro O jogo dos discos, que dizia: “Um estudante foi solicitado pelo professor a fazer 200 lançamentos de uma determinada moeda. Teve a seguinte ideia para acelerar a contagem: arrumou dez moedas iguais e lançava as dez simultaneamente. Assim, fez 20 lançamentos, mas contou 200, isso pode?”, essa questão foi apresentada na sequência de atividades como uma questão de múltipla escolha (Figura 27).

Figura 29: Enunciado da questão 3.



Fonte: arquivo do autor, 2022.

As alternativas criadas foram desenvolvidas ao refletir sobre a questão inicial e com a intencionalidade de direcionar as respostas a esses quatro casos específicos (Tabela 13).

Tabela 13: Respostas da questão 3.

QUESTÃO 3		
opção	votos	Grupo
A	0	-----
B	0	-----
C	1	G4
D	14	G1, G2, G3, G5, G6, G7, G8, G9, G10, G11, G12, G13, G14, G15
NÃO OPINOU	1	G16

Fonte: arquivo do autor, 2022.

Dos resultados obtidos pode-se notar a importância já definida nas regras do jogo, no que diz respeito a sobreposição de moedas serem lançadas novamente - uma questão relevante levantada que ao analisar os dados me questionei foi:

*“Não está claro se ao retirar as moedas sobrepostas elas devem ser lançadas como as moedas não sobrepostas ainda no tabuleiro ou se devem ser lançadas após já contabilizadas as moedas não sobrepostas”*

Sendo assim, é válido ressaltar que nesse experimento todos os grupos fizeram o processo de retirar as moedas sobrepostas, contabilizar os casos favoráveis e retirar todas as moedas do tabuleiro e lançar novamente somente as que foram retiradas por estarem sobrepostas.

#### 6.5.4. Medindo diâmetro

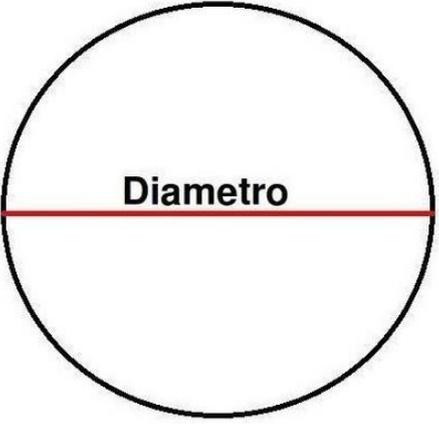
A questão sobre medir diâmetro (Figura 28), trata-se de medir o diâmetro das moedas, a ideia no contexto do experimento guiado no livro é trabalhar probabilidade geométrica, porém, no contexto dessa sequência de atividades inspiradas no livro no que diz respeito à questão presente no livro O jogo dos Discos (CAETANO, PATERLINI, 2013, p. 24): *“ Que dificuldades podemos encontrar para medir o diâmetro de uma moeda ou de botões usando régua? Verifique qual a melhor forma de obter essa medida. Você consegue fazer uma estimativa para o erro em seu método de medição?”*;

No presente trabalho a proposta é analisar a variação de medidas obtidas pelos grupos e também quais e se usaram unidades de medidas nos registros. Para isso,

foi apresentado uma retomada do que é diâmetro e em seguida um quadro para registros da medição do diâmetro sem apresentar unidades de medida previamente,

Figura 30: Enunciado da questão 4

4). Antes de partir para a etapa 2 registrem aqui o diâmetro de cada objeto circular.



Qualquer segmento de reta que toque uma circunferência em dois pontos e passe pelo seu centro será o seu diâmetro, é o maior segmento de reta possível que se pode traçar dentro de uma circunferência.

OBJETO	DIÂMETRO
Moeda de 10 centavos	
Moeda de 25 centavos	
Botão de camisa	
Botão pequeno	

Fonte: arquivo do autor, 2022.

Assim, espera-se que os alunos não tenham grandes variações nas medidas dos diâmetros tendo em vista que no Livro texto O jogo dos Discos (CAETANO, PATERLINI, 2013, p. 25) o autor leva a seguinte reflexão sobre o processo de medição das moedas: *“Uma boa forma de medir diâmetros de discos é usar um paquímetro. Se usarmos uma régua numerada com centímetros, a precisão obtida será de 1 mm, isto se a régua foi bem fabricada. Uma forma de melhorar essa precisão é enfileirar dez discos, colocá-los bem alinhados, medir o total dos diâmetros e dividir por 10, isto dá uma precisão de 0,1mm”*. Assim, partindo dessa reflexão será analisado os resultados obtidos pelos alunos que nesse experimento optaram por usar como instrumento de medição uma régua graduada em cm e mm e mediram as moedas de formas unitárias.

Conforme descrito em Capítulo 1 para esse experimento utilizaremos como parâmetro de comparação as seguintes medidas:

Tabela 14: Medidas do diâmetro dos objetos utilizados no experimento

Objeto	Diâmetro
Moedas de R\$0,10/R\$0,05 <sup>12</sup>	22 mm ou 2,2 cm
Moedas de R\$0,25	25 mm ou 2,5 cm
Botões pequenos	7 mm ou 0,7 cm
Botões de camisa	11 mm ou 1,1 cm

Fonte: arquivo do autor, 2022.

Das respostas dos grupos obtivemos:

Tabela 15: Medidas apresentadas pelos grupos que realizaram o experimento Jogo dos discos

Opção	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9	G10	G11	G12	G13	G14	G15	G16
R\$0,10/R\$0,05	2,1	2 cm	2,0 cm	21mm	2	20 mm	2 cm	2 cm	22 mm	2,3 cm	2,1	2,00 mm	2,2	2 cm	2,1 cm	2,1
R\$0,25	2,3	3 cm	2,5 cm	24mm	2,4	23,5 mm	3 cm	2,50 cm	23,5 mm	2,4 cm	2,5	23,5 mm	2,5	2,5 cm	2,5 cm	2,3
CAMISA	1,1	1 cm	1 cm	11mm	1,1	15mm	1 cm	1,50 cm	não sei	1,1 cm	1	1,1 cm	1	1 cm	1,1 cm	1,1
BOTÃO PEQUENO	0,9	0,8 cm	0,7 cm	7 mm	0,6	10 mm	0,5 cm	0,5 cm	não sei	0,6 cm	0,7	0,6 cm	0,7	0,5 cm	0,8 cm	0,9

Fonte: arquivo do autor, 2022.

Tomando como parâmetro a Tabela 14 e comparando com a tabela 15, pode-se notar que:

Em relação a medidas das moedas de R\$0,10/R\$0,05 elas variaram entre 20 e 23 mm, sendo uma variação de 2 mm a menos e 1 mm a mais do valor original expresso na Tabela 14 o que em comparação com a proposta do jogo de enfileirar 10 moedas para obter uma variação de erro de 1mm não deixou a desejar tendo em vista que os alunos utilizaram apenas a régua como instrumento de medição e alguns deles apontaram dificuldade em encontrar o centro da moeda.

Em relação a medida das moedas de R\$0,25 elas variaram entre 23.5 e 30 mm, sendo uma variação de 1,5 mm a menos e 5mm a mais do valor original.

Em relação a medida do botão de camisa, elas variaram entre 10 e 15 mm,

<sup>12</sup> Os modelos dessas moedas possuem o mesmo diâmetro e estão descritos no Capítulo 1 desse trabalho.

sendo uma variação de 1mm a menos e 4mm a mais em relação ao valor original.

Em relação a medida do botão pequeno, elas variaram entre 5 e 10 mm, sendo uma variação de 2 mm a menos e 3 mm a mais em relação ao valor original.

Assim, podemos concluir que levando em conta o método expresso indicado no livro que era que o enfileiramento de 10 objetos para depois calcular o diâmetro, resultaria em uma variação de 1mm para mais ou menos, em comparação com o método utilizado pelos alunos com exceção das medidas com moedas de R\$0,10/R\$0,05, nos demais objetos a técnica de medida unitária utilizada pelos alunos se mostrou menos eficiente e com grande variação em relação a medida original.

#### 6.5.5. Cálculo de probabilidades simples

A terceira etapa é uma compilação dos dados obtidos na etapa 2 que se tratava dos registros dos lançamentos em tabelas.

Nessa etapa iremos analisar os resultados em 2 momentos, um deles em relação ao acerto ou erro e outro em relação variação dos resultados em relação ao tipo de tabuleiro.

Tabela 16: Erros e acertos

CÁLCULO DE PROBABILIDADE SIMPLES		
Tipo de resposta	contagem	grupos
não fez	3	G5, G8, G9
errou conceito	2	G1, G16
errou cálculo	0	-----
acertou (sem simplificar)	5	G3, G6, G11, G12, G13, G15
acertou e simplificou forma fracionária	4	G4, G7, G10, G14
acertou e escreveu de forma decimal	5	G2, G3, G10, G13, G14
acertou e escreveu na forma percentual	3	G2, G10, G14

Fonte: arquivo do autor, 2022.

Em relação a essa etapa de modo geral 11 grupos (73,3%) acertaram os cálculos das probabilidades, 3 grupos (18%) não realizaram essa etapa, porém, fizeram as demais e por fim 2 grupos (12%) erraram conceitualmente o cálculo das probabilidades.

Os grupos G1 e G16 tiveram o mesmo equívoco durante o preenchimento das tabelas (Figura 31) eles colocaram a quantidade de lançamentos igual a 20 no lugar de 200

Figura 31: Preenchimento da tabela dos grupos G1 e G16.

G1:

Lado do quadrado do quadriculado = 3cm				
<i>Tipo de disco</i>	<i>Diâmetro (cm)</i>	<i>Quant. De lançamentos</i>	<i>Eventos favoráveis</i>	<i>Probabilidade de ganho P(d)</i>
Moeda de 10 centavos	2,2	20	30	$\frac{30}{20}$
Moeda de 25 centavos	2,3	20	9	$\frac{9}{20}$
Botão de Camisa	4,1	20	80	$\frac{80}{20}$
Botão de pequeno	0,9	20	106	$\frac{106}{20}$

G16:

Lado do quadrado do quadriculado = 3cm				
<i>Tipo de disco</i>	<i>Diâmetro (cm)</i>	<i>Quant. De lançamentos</i>	<i>Eventos favoráveis</i>	<i>Probabilidade de ganho P(d)</i>
Moeda de 10 centavos	2,2	20	34	$\frac{34}{20}$
Moeda de 25 centavos	2,3	20	13	$\frac{13}{20}$
Botão de Camisa	4,1	20	97	$\frac{97}{20}$
Botão de pequeno	0,9	20	132	$\frac{132}{20}$

Fonte: arquivo do autor, 2022.

Pode-se concluir que o erro aconteceu por uma questão de falta de interpretação ou até mesmo de clareza no enunciado da atividade, pois, foram feitos 20 lançamentos, porém, de dez moedas o que totalizam 200 lançamentos. Ainda sobre isso, é válido lembrar que em ambos os casos as probabilidades foram escritas na forma fracionária e que talvez se os grupos tivessem escrito na forma decimal ou percentual observaram que na forma decimal dariam mais que 1 e no percentual mais

de 100% o que lhes permitiria uma vez que recordam que isso não poderia acontecer a reanalisar sua resposta.

## 6.6. ATIVIDADE 7: ETAPA III - ANÁLISE DOS EXPERIMENTOS

É uma etapa conclusiva onde os grupos de alunos irão mostrar suas conclusões comparando as atividades 5 e 6. Essa atividade é composta por 4 questionamentos sendo eles dissertativos (qualitativos).

### 6.6.1. Comparando as quantidades de lançamentos das etapas do experimento

Partindo do questionamento: *“Qual a probabilidade encontrada no lançamento de 200 moedas de 10 centavos? Compare este valor com o valor encontrado no exemplo da Figura 7. Os dois resultados são muito diferentes? Por que isso acontece?”*<sup>13</sup>, houve uma necessidade de adequação da escrita ao formular as questões da sequência didática a ser aplicada para: *“Comparando as probabilidades dos lançamentos de moedas de 10 centavos lançadas na atividade 5 (onde lançamos apenas 6 vezes) e a probabilidade obtida no experimento 6 (onde lançamos 200 vezes). Os resultados são diferentes? Por que isso acontece?”*

Ao analisar as respostas dos grupos, todos responderam sim quanto a pergunta “Os resultados estão diferentes?”, partindo dessa conclusão coletiva, iremos analisar as justificativas do “Porque isso acontece?”.

Para melhor analisar essas questões partindo dos indicadores criou-se as categorias: *“Proporcionalidade entre lançamentos e chances de acerto”*; *“Maior precisão nos resultados em larga escala”*; *“Diferença entre quantidade de lançamentos”* e *“Outros”* que se relacionam com seus respectivos indicadores (Quadro 9).

Quadro 9: Justificativa do motivo pelo qual a diferença nos resultados ao lançar 60 vezes e 200 vezes os objetos circulares.

Categorias	Indicadores
Proporcionalidade entre lançamentos e chances de acerto	G4: sim, pois quanto mais vezes jogamos maior a chance de acerto G8: sim são diferentes, pois havia mais chances, ou seja, uma probabilidade maior onde lançaram 200 vezes G10: sim, pois quanto menos vezes, maior será a porcentagem de acerto das moedas G11: sim, pois lançamos mais vezes, aumenta as probabilidades de acerto G13: sim, pois lançamos mais vezes, aumentando a probabilidade de acerto

<sup>13</sup> Questão disponível no livro O jogo dos Discos, p. 23, questão 1.

Maior precisão nos resultados em larga escala	G2: sim, os resultados são diferentes. Não é nada muito gritante, mas como os exercícios foram feitos com mais objetos, os números são mais precisos e as porcentagens mais confiáveis G7: os resultados foram diferentes porque a quantidade de tentativas fora diferente e isso influencia no melhor resultado G9: sim, pois no experimento 6 lançamentos mais vezes do que na atividade 5, assim os resultados foram mais "exatos" G12: sim, no lançamento de 6 vezes houve mais acertos, porém no cálculo da probabilidade parece ter mais exatidão nas respostas ao lançarmos em larga escala. G14: sim, quanto mais chance de acertos, mais chance de pontuar, portanto existe diferença de resultado de um conjunto de 60 chances para um conjunto de 200 chances e essa diferença torna o resultado de probabilidade mais confiável. G16: sim, na etapa 5 os resultados foram maiores, porque foram poucas tentativas, na etapa 6 os resultados são honestos/precisos porque jogou várias vezes/vários testes
Diferença entre quantidade de lançamentos	G1: sim, porque a quantidade de lançamentos então foi maior G3: sim, porque o número de lançamentos é maior G5: sim, porque é a quantidade de lançamentos é diferente G6: sim estão diferentes, pois a quantidade de lançamentos foi maior na segunda
Outros	G15: sim, pois depende dos fatores

Fonte: arquivo do autor, 2022.

Para melhor discutir e observar os resultados sintetizar os dados os mesmos foram apresentados de do mais citado para o menos citado e apresentou-se as frequências absolutas e relativas (Tabela 17).

Tabela 17: Síntese da Justificativa do motivo pelo qual a diferença nos resultados ao lançar 60 vezes e 200 vezes os objetos circulares.

Ordem	Categorias	Unidades de registro	
		Nº	%
1	Maior precisão nos resultados em larga escala	6	37,5
2	Proporcionalidade entre lançamentos e chances de acerto	5	31,25
3	Diferença entre quantidade de lançamentos	4	25
4	Outros	1	6,25

Fonte: arquivo do autor, 2022.

No livro texto de referência das questões o autor sugere como “Resposta comentada<sup>14</sup>” que a resposta para o questionamento seria “O valor encontrado com o lançamento de 200 moedas provavelmente foi diferente daquele encontrado na situação da Figura 7, com apenas 5 moedas. Dificilmente, com 5 lançamentos, você

<sup>14</sup> Vale lembrar que essa resposta se remete a pergunta original já citada na nota de rodapé 10. Esta resposta comentada encontra-se disponível no livro O jogo dos discos, p. 24.

*obtem uma boa estimativa da probabilidade em questão*

Ainda que não se tenha uma categoria que se remeta a boa estimativa, pode-se observar que 6 grupos evidenciaram que os resultados são diferentes, pois havia *“Maior precisão nos resultados em larga escala”* evidenciando assim que os alunos entenderam que no processo de experimentação são necessários vários testes para se obter resultados mais precisos, ou ainda que, no processo de experimentação os resultados estimados se tornam mais precisos conforme ele é feito mais vezes ou em maior escala.

Quando a categoria *“Proporcionalidade entre lançamentos e chances de acerto”*, obteve-se que cinco desses grupos acreditam que quanto mais vezes lançarem mais resultados favoráveis aconteceriam o que de certo modo não está errado, porém, percebe-se que os alunos não observaram as probabilidades que é o que a questão enuncia como ponto de referência para comparação, acredita-se que uma reformulação da parte inicial da pergunta: *“Comparando as probabilidades dos lançamentos de moedas de 10 centavos lançadas na atividade 5 (onde lançamos apenas 6 vezes) e a probabilidade obtida no experimento 6 (onde lançamos 200 vezes). Os resultados estão diferentes?”* para uma versão mais diretiva como: *“Os resultados das probabilidades obtidas no lançamento das moedas de 10 centavos na atividade 5 e na atividade 6 são diferentes?”*, poderiam levar os alunos a terem uma conclusão dentro da intencionalidade da questão.

Também observa-se que quatro dos grupos se encaixam na categoria *“Diferença entre quantidade de lançamentos”*, o que a vista do professor pesquisador foi uma resposta sem explicações suficientes, pois, ainda que tenha possibilitado a criação é uma categoria que não fornece informações suficientes se essa justificativa se remete a uma proporcionalidade entre quantidade de lançamentos ou ainda a uma maior precisão de acordo com os lançamentos, acredita-se que essa questão poderia ser reformulada no final substituindo o *“Por que isso acontece?”* para *“Calcule a diferença e explique porque houve ou não diferença entre as probabilidades”*, pois, assim poderia levar o aluno a discorrer ainda mais dando mais evidência para análise e categorização.

E ainda vale apontar que, um grupo o justifica com: *“sim, pois depende dos fatores”*, uma resposta válida, porém não bem explicada, pois, se indicado quais os fatores poder-se-ia melhor categorizar as respostas e buscar compreender o que os alunos concluíram sobre a questão.

Por fim, nessa questão o que ficou evidente é uma necessidade de readequação da formulação da pergunta tendo em vistas as respostas obtidas pelos alunos, sendo assim, em uma reaplicação do experimento o ideal (na visão do professor pesquisador) seria: *“Os resultados das probabilidades obtidas no lançamento das moedas de 10 centavos na atividade 5 e na atividade 6 são diferentes? Calcule a diferença e explique por que houve ou não diferença entre as probabilidades”*

#### 6.6.2. Cem ou duzentos lançamentos?

Essa questão busca discutir a necessidade de lançamento para obtenção de poucas casas decimais ao se aplicar o experimento com 100 ou 200 lançamentos, ela enuncia: *“Como podemos decidir se 200 lançamentos são o suficiente para obter uma precisão de uma casa decimal apenas entre as probabilidades? Seriam necessários mais lançamentos? Será que 100 lançamentos não seriam suficientes? - Reflita e comente.<sup>15</sup>”*

No livro texto de referência das questões o autor sugere como “Resposta comentada<sup>16</sup>” que a resposta para o questionamento seria *“Como não conhecemos o valor exato da probabilidade, não temos como precisar quantas casas decimais exatas entramos com 200 lançamentos. Quanto mais lançamentos fizermos com discos de um determinado diâmetro, maiores serão as chances de obtermos uma estimativa melhor de probabilidade. Esta experiência, com grupos de estudantes que realizaram essa atividade, sugere que 200 é uma quantidade adequada. Você, professor, também poderia investigar isto.”*

Sobre a resposta comentada, pode-se observar uma abertura a uma investigação por parte do professor - pesquisador em relação a quantidade de lançamentos.

Sendo assim, a análise dessa questão partirá inicialmente da análise das respostas dos alunos referente às categorias e em seguida ao ponto de vista do professor pesquisador e autor deste trabalho ao analisar a probabilidade dos dados

---

<sup>15</sup> Essa questão passou por uma adequação mínima à questão proposta no Livro O Jogo dos Discos, p. 23, que originalmente é: “Como você pode decidir se 200 lançamentos são suficientes para obter uma precisão de uma casa decimal no valor de  $p(d)$ ? Não seriam necessários mais lançamentos? Será que 100 lançamentos não seriam suficientes?”

<sup>16</sup> Vale lembrar que essa resposta se remete a pergunta original já citada na nota de rodapé 10. Esta resposta comentada encontra-se disponível no livro O jogo dos discos, p. 25.

coletados.

Para melhor analisar as respostas algumas categorias foram criadas partindo dos indicadores, ambos foram relacionados (Quadro 10). As categorias foram: “100 lançamentos seriam suficientes”, “100 lançamentos NÃO SERIAM suficientes” e “Outros”.

Quadro 10: Cem lançamentos seriam o suficiente? – Análise das respostas

Categorias	Indicadores
100 lançamentos seriam suficientes	G1: através dos lançamentos, não seriam necessários mais lançamentos pois a diferença de 200 a 100 jogadas não foi muita G2: as probabilidades ainda seriam mais precisas, podemos ver isso nas colunas divididas de 100 em 100 jogadas. Os resultados totais nessas colunas são parecidos. Assim as probabilidades também são parecidas G3: os 100 lançamentos já seriam suficientes, pois a diferença entre 200 e 100 lançamentos é de pouca diferença G4: 100 lançamentos são suficientes porque já entram em uma casa decimal. Daria para ter uma média da probabilidade G6: com apenas 100 lançamentos já seria possível, pois manteve o mesmo padrão (72,71) G8: 100 lançamentos seria necessário com esse tanto de lançamentos daria uma precisão de casas decimais G10: acho que 100 seria suficiente, pois 200 foi muito, mas 6 foi pouco, então 100 seria o ideal
100 lançamentos NÃO SERIAM suficientes	G12: com 200 lançamentos, o resultado é mais preciso que com 100 lançamentos, da mesma forma que 100 da mais resultados que 50, pois com maior quantidade de lançamentos o resultado é mais preciso G14: podemos observar que dos lançamentos da moeda de 10 centavos, há uma diferença de 8 pontos entre os 60 arremessos para os 200 arremessos. Assim como há uma diferença de 15 pontos dos lançamentos da moeda de 25 centavos entre 60 e 200 lançamentos, portanto há uma diferença considerável que demonstra que com quanto mais oportunidades de lançar possibilita uma maior quantidade de acertos, com isso os 200 lançamentos seriam mais possível obter uma precisão de uma casa decimal apenas entre as probabilidade G16: quanto mais lançamentos, mais precisão, assim 200 lançamentos são mais precisos que 100 lançamentos
outros	G5: quanto mais lançamentos mais casas decimais vai ter G7: 100/200 G11: quanto mais lançamentos forem feitos, as chances de acertar serão maiores G13: quanto mais lançamentos forem feitos, as chances de acertar se tornarão maiores G15: se os lançamentos começaram a ser semelhantes/ iguais. Sim, para receber resultados mais precisos. Depende de como a pessoa joga
Não respondeu	G9

Fonte: arquivo do autor, 2022.

Por se tratar de respostas longas nos indicadores para ter uma visão geral os dados serão analisados de formas sintetizadas (Tabela 18).

Tabela 18: Cem lançamentos seriam o suficiente? – Unidades de registro de categorias.

Ordem	Categorias	Unidades de registro	
		Nº	%
1	100 lançamentos seriam suficientes	7	37,5
2	Outros	5	31,25
3	100 lançamentos NÃO SERIAM suficientes	3	18,75
4	Não respondeu	1	6,25

Fonte: arquivo do autor, 2022.

Pelas respostas coletadas dos 16 grupos participantes, sete deles apontaram de 100 lançamentos seriam o suficientes para obter a precisão indicada nas questões porém, ao analisar as folhas de respostas e até mesmo as tabelas apresentadas não foi exigido o cálculo das probabilidades do experimento em larga escala (200 lançamentos) em forma decimal e nem mesmo uma tabela orientativa que indique a necessidade de calcular a diferença entre os resultados obtidos na atividade 5 e na atividade 6, o que desde já é algo a ser refletido em futuras aplicações bem como a ser incrementado no livro O Jogo dos Discos. Todavia, nos indicadores dessa categoria observa-se que ainda que os alunos não tenham necessariamente calculado eles fizeram uma comparação entre as colunas que se dividiam de 100 em 100 lançamentos, tomando como referência o indicador G6: “*com apenas 100 lançamentos já seria possível, pois manteve o mesmo padrão ( 72,71)*” pode se observar que alguns alunos compreendem que por exemplo calcular  $72/100$  ou  $(72+71)/200$  são bem parecidos e sustentando a argumentação da não necessidade de fazer os 200 lançamentos.

Na categoria em que se enuncia “*100 lançamentos NÃO SERIAM suficientes*”, as justificativas abordam duas temáticas diferentes os indicadores G12 e G15 apresentam que os 200 lançamentos se fazem necessário por acreditarem em refinamento de dados, mas explicitamente em uma maior precisão, já o indicador G14 retoma a discussão de que olhar para os casos favoráveis obtidos no lugar das probabilidades obtidas, pois, usa como justificativa que mais lançamentos dariam mais casos favoráveis. Dentre os indicadores o G12 e G15, acredita-se que a argumentação está bem fundamentada uma vez que, ao discutir experimento pensado em processos longos com vários testes, já no indicador G14 é observado a necessidade de uma retomada destacando que os resultados favoráveis não são as

probabilidades.

Na categoria “*Outros*”, não houve uma indicação se os grupos achavam que 100 lançamentos seriam ou não suficientes, porém, dos indicadores G11 e G13 pode-se observar novamente uma confusão com lançamentos favoráveis (acertos) com probabilidades como acontece no indicador G14 citado acima. Nos indicadores G5 e G7 não consegui inferir conclusões, acredito que faltou informações. No indicador G15 acontece uma justificativa dos fatores citados na questão 1. Por fim, temos a categoria não respondida onde temos que o indicador G9 não compreendeu o questionamento.

### 6.6.3. Debatendo sobre o diâmetro dos objetos

Nessa questão dissertativa busca-se discutir os resultados em relação ao diâmetro dos objetos.

#### 6.6.3.1. O diâmetro pode ser maior que os lados para eventos favoráveis?

A questão 3 item a, busca analisar as conclusões gerais dos alunos em relação ao diâmetro dos objetos circulares e lado dos quadriculados no tabuleiro, observando tanto a conclusão quanto a forma como justificam as mesmas.

A questão enuncia o seguinte: “*a). Sabendo que os quadrados do tabuleiro têm 3 cm, e pensando na regra para considerar um lançamento favorável, o que aconteceria se pegássemos um objeto circular com 3,5 cm de diâmetro? Qual seria a probabilidade? Seria um evento possível de acontecer ter casos favoráveis ao lançar um objeto circular com esse diâmetro? – Comente sobre.*”

Por se tratar de vários questionamentos em uma mesma pergunta, a análise partirá do que aconteceu de forma comum (Quadro 11), que em síntese se baseia em afirmar que o objeto com mais de 3,5 cm não caberia no quadrado, a probabilidade seria zero e o evento não teria casos favoráveis, cabendo então discutir apenas os comentários feitos pelos grupos.

Quadro 11: Categorização das respostas para questão 3 (a)

Categorias	Indicadores
Objeto maior que o quadriculado do tabuleiro	G1: não teria casos favoráveis, pois o objeto é maior que os quadrados do tabuleiro G2: a chance de acertar dentro da casinha é nula, já que o objeto é maior que a capacidade do quadrado, logo a probabilidade é zero e o evento é impossível, sem casos favoráveis G4: não é possível, pois o diâmetro do objeto seria maior que o "permitido" pelo quadrado

	<p>G5: a probabilidade iria ser 0 , pois o diâmetro é maior que o lado do quadrado</p> <p>G6: não seria possível pois o objeto é maior que os quadrados do tabuleiro, não importa a quantidade de tentativas nunca será possível</p> <p>G8: seria um evento impossível de acontecer, o quadrado seria menor que o diâmetro do objeto e por conta disso sempre que o objeto fosse lançado cairia fora do quadrado e em cima da linha</p> <p>G9: não seria possível ter casos favoráveis nessa situação, pois o objeto lançado possui um diâmetro maior do que os quadrados do tabuleiro.</p> <p>G10: não, seria impossível, afinal seria maior que e a área do quadrado</p> <p>G11: não haveria eventos favoráveis, pois o diâmetro do objeto seria maior, ultrapassando as linhas</p> <p>G12: a probabilidade seria zero, pois nenhuma estaria no diâmetro por ser maior que ele. Não seria um evento possível</p> <p>G13: não haveria eventos favoráveis, pois o diâmetro do objeto seria maior, ultrapassa as linhas</p> <p>G14: não seria favorável esses lançamentos, pois as moedas ultrapassariam um quadrado podendo valer mais de um, ou seja, dependendo da regra aumentaria a chance de acerto se valesse uma moeda entre dois quadrados. Ou então haveria uma redução de possibilidades, necessitando de uma regra que pudesse valer a moeda em cima da linha.</p> <p>G15: O objeto não caberia dentro dos quadrados do tabuleiro. Não, a probabilidade seria nula.</p> <p>G16: não, não é possível de acontecer por conta que o quadrado do tabuleiro é menor, com 3 cm, e o objeto é maior, com 3,5 cm</p>
Diâmetro quadrado e diâmetro circunferência	G3: não teria probabilidade de cair, pois o diâmetro do objeto é maior que o diâmetro do espaço, fazendo com que saia do espaço estabelecido
Outro	G7: o objeto não cairá nenhuma vez dentro do quadrado - probabilidade 0

Fonte: arquivo do autor, 2022.

As frequências absolutas e relativas ajudam a concluir o grau de conhecimento desenvolvido assim no Tabela 19 temos a síntese das respostas.

Tabela 19: Síntese dos indicadores da Categorização das respostas para questão 3 (a)

Ordem	Categorias	Unidades de registro	
		Nº	%
1	Objeto maior que o quadriculado do tabuleiro	14	87,5
2	Diâmetro quadrado e diâmetro circunferência	1	6,25
3	Outro	1	6,25

Fonte: arquivo do autor, 2022.

Apenas um indicador para cada uma das categorias: “Capacidade do quadrado”, “Diâmetro quadrado e diâmetro circunferência” e “Outros” , sendo que na primeira dessas três categorias citadas observa se que o aluno pode ter confundido a noção de capacidade com área e/ou perímetro, uma vez que os quadriculados do tabuleiro são figuras planas e não possuem capacidade. No que se refere a segunda

categoria percebe-se um equívoco do grupo ao mencionar “*diâmetro do quadrado*”. Por fim, na categoria outros temos no indicador G7 uma falta de argumentação sobre exatamente o motivo pelo qual o objeto não “*cairá dentro do quadrado*”.

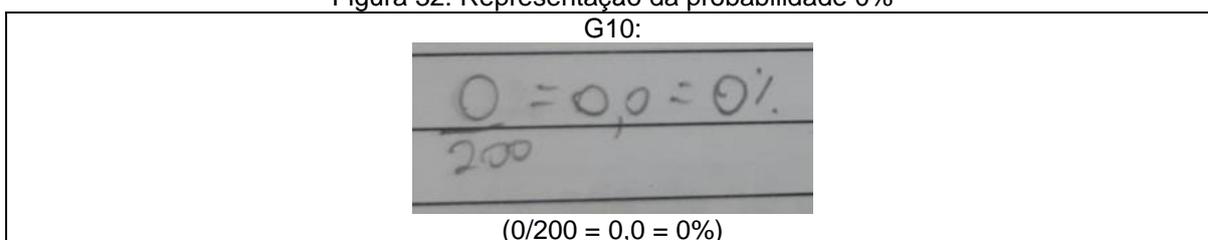
Deste modo, conclui-se que todos os grupos compreenderam que o círculo com diâmetro maior que o lado do quadriculado do tabuleiro, dentro das regras estipuladas no jogo, não é algo possível de ser um caso favorável, ainda que na argumentação tenham falta de argumentos ou ainda acontecido um equívoco em relação aos conceitos de diâmetro em figuras não circulares e capacidade em figuras planas e melhor conceituação do que é área e perímetro, para evitar tais equívocos que ainda que tenham acontecidos serviram como pontos de atenção para serem trabalhados nos próximos bimestres.

#### 6.6.3.2. Probabilidade de um evento impossível

A proposta é desenvolver a ideia de um evento impossível e qual sua probabilidade, sendo assim a questão enuncia: “*b). Se um evento é impossível de acontecer, qual seria sua probabilidade?*”

Sobre as respostas, todos os 16 grupos afirmaram que a probabilidade seria zero, alguns grupos apenas com o numeral (Figura 32), escrevendo 0% e dois grupos me chamaram atenção na forma como responderam

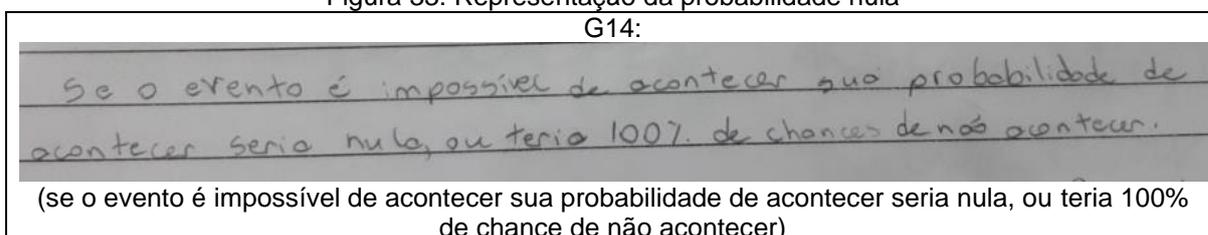
Figura 32: Representação da probabilidade 0%



Fonte: arquivo do autor, 2022

Neste grupo pode-se notar que partiram do experimento em larga escala com número de casos possíveis 200 e 0 casos favoráveis para o evento impossível, além disso o grupo (Figura 33) expressou em forma fracionária, decimal e percentual.

Figura 33: Representação da probabilidade nula



Fonte: arquivo do autor, 2022

O grupo 14, chama a atenção ao usar o termo “nula” em relação à probabilidade e a falar 100% de chance de não acontecer, fazendo possivelmente uma relação com o que seria a probabilidade complementar de acontecer e usando negação em seguida.

## **7. CONSIDERAÇÕES FINAIS**

Tendo em vista a constante busca por melhorias no processo de ensino e aprendizagem, o desenvolvimento da autonomia dos alunos e acima de tudo em tornar o ensino da matemática mais prazeroso, significativo, prático e construtivista, desenvolver a sequência didática baseada no experimento “Jogo dos Discos” se tornou fundamental no desenvolvimento dos conceitos de probabilidades com os alunos da 2ª série do Ensino Médio.

A sequência didática além de inserir um experimento prático, proporcionou que os alunos percorrem pelo campo da leitura e inferência de informações por meio da história em quadrinhos, entendessem ao conhecer a história da probabilidade o porquê estudar probabilidade e acima de tudo que a matemática usada hoje foi construída a partir da necessidade de se entender algo ou algum fenômeno. Além disso, puderam desenvolver conceitos partindo puramente do diálogo entre colegas, valendo ressaltar que as atividades em grupo diversificadas em alguns momentos proporcionaram a socialização e o desenvolvimento do saber ouvir, do discutir para produzir algo e o poder de síntese de informações.

Sobre as etapas I, II e III do jogo dos discos puderam vivenciar o processo longo e até mesmo exaustivo para se desenvolver determinada teoria ou tirar conclusões coerentes e fundamentadas, desenvolveram o senso crítico e tiveram contato com diferentes formas de se aprender a matemática (até mesmo além dos cálculos).

A sequência didática mostrou-se riquíssima em possibilidades que foram e podem ser exploradas após aplicada e proporcionou um ambiente de diálogo possibilitando ao professor - pesquisador assumir também o papel de mediador em meio às diferentes atividades.

Para uma reaplicação da sequência, alguns pontos de atenção podem ser melhorados. Na atividade 1, por exemplo, seria interessante elaborar uma questão que peça para exemplificarem, além dos exemplos da história em quadrinhos, o que

seriam eventos aleatórios e não aleatórios no cotidiano dos integrantes do grupo, pois, isso auxiliaria ao final da atividade compreender com maior precisão se realmente houve uma boa conceituação do que é eventos aleatórios e não aleatórios. Como apontado no capítulo de análise algumas questões necessitam de uma reformulação para melhor entendimento e alcance dos objetivos, sendo assim, uma ideia seria antes de aplicar a todas as turmas solicitar que um grupo menor de alunos fizessem a leitura das questões de cada atividade e apontassem o que haviam entendido que estava sendo perguntado em cada uma, logo, o professor poderia adequar e reescrever a pergunta para que ela mantivesse a clareza e objetividade desejada.

Quanto a condução das etapas (atividade 5, 6 e 7) do jogo dos discos, propriamente dito, no que diz respeito aos arremessos uma proposta a ser pensada é a possibilidade de na etapa do jogo em larga escala os alunos jogarem no lugar vinte vezes dez objetos, jogarem dez vezes de vinte objetos, porém, deve-se levar em conta que essa ação ainda que reduzisse a quantidade de lançamentos, deixando o experimento menos repetitivo necessitaria de maior quantidade de objetos. Outra sugestão a ser levada em conta diz respeito aos objetos circulares que no jogo se restringem a moedas e botões, em uma reaplicação seria interessante testar o uso de outros objetos mais acessíveis em relação a quantidade e custos.

Por fim, vale ressaltar que o ensino da matemática necessita de mais pesquisas e atividades baseadas em práticas dos professores em sala de aula. É importante que o professor em sala de aula entenda que seu papel vai além de ensinar e sim de difundir suas práticas e ele é um pesquisador ao experimentar diferentes formas de ensinar e avaliar o quão significativa essa aprendizagem foi aos seus alunos.

Assim, é de extrema importância que o professor confie no potencial dos alunos ao propor atividades que fogem do tradicional, muitas vezes espera-se que os mesmos não produzirão ou até mesmo não entenderão os conceitos a serem trabalhados e esse é um risco de inovar. Todavia, ainda que a aprendizagem não ocorra pautada em definições da matemática pura, repleta de símbolos matemáticos ou demonstrações essa aprendizagem acontece e pode / deve ser explorada e se necessário formalizada dentro do conceito do tópico matemático a ser desenvolvido e as habilidades indicadas dentro de cada currículo.

## REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, R. R. C. **O jogo dos discos: o uso da experimentação como suporte para o ensino da probabilidade.** 2015. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

BARDIN, L. Análise de Conteúdo/Laurence Bardin. **Tradução Luís Antero Reto, Augusto Pinheiro. São Paulo: Edições,** v. 70, 2011.

BERLINGHOFF, William P.; GOUVÊA, Fernando Q. **A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas.** Editora Blucher, 2010.

BERNARDES, Odete. Para uma abordagem do conceito de probabilidade. **Educação e Matemática**, n. 3, p. 13-15, 1987

BRASIL, MEC. Base nacional comum curricular. **Brasília-DF: MEC, Secretaria de Educação Básica,** 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs). Ensino Médio - Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias.** Brasília :Mec 2000.

BRASIL. PDE. **Plano de Desenvolvimento da Educação: SAEB: ensino médio: matrizes de referência, tópicos e descritores.** Brasília: MEC, SEB; Inep, 2017.

BRASIL. **Ministério da Educação. Matriz de referência Enem - Área de Matemática e suas tecnologias.** Brasília, 2015.

BRAZ, Suélen Costa.; MIRANDA, Thamara Kristina; BARBOSA, Cirléia Pereira. **A utilização de jogos no ensino de Matemática: uma experiência com alunos do Ensino Médio.** ForScience: revista científica do IFMG, v. 6, n. 1, e00365, jan./jun. 2018

CAETANO, PAS; PATERLINI, R. R. **Jogo dos discos: módulo I.** -- Cuiabá, MT : Central de Texto, 2013. -- (Matem@tica na pr@tica. Curso de especialização em ensino de matemática para o ensino médio)

DANTAS, E. A. et al. **Probabilidade: uma reflexão teórico-prática no ensino da matemática**. 2014. 89 f.2014. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, Campina Grande, Paraíba.

DE MACEDO, Lino; PETTY, Ana Lúcia S.; PASSOS, Norimar C. **Aprender com jogos e situações-problema**. Artmed Editora, 2009.

DE OLIVEIRA, E. et al. Análise de conteúdo e pesquisa na área da educação. **Revista diálogo educacional**, v. 4, n. 9, p. 1-17, 2003.

FRANCO, M. **Análise de Conteúdo**. – Brasília, 2ª ed. Liber Livro Editora. 2005.

GERHARDT, T. E; SILVEIRA, D. T. **Métodos de pesquisa**, coordenado pela Universidade Aberta do Brasil–UAB/UFRGS e pelo Curso de Graduação Tecnológica–Planejamento e Gestão para o Desenvolvimento Rural da SEAD/UFRGS. Porto Alegre: Editora da UFRGS, v. 2, n. 0, p. 0, 2009.

GHIGGI, Maiara; VEBBER, Guilherme Cañete; TRAMONTINA, Francine Fioravanso. A percepção dos alunos do Ensino Médio de uma escola pública a respeito da aplicabilidade dos conhecimentos matemáticos nas profissões almeçadas. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, v. 6, n. 1, p. 1-14, 2020.

KAMII, Constance; DECLARK, Georgia. **Reinventando a aritmética: implicações da teoria de Piaget**. Papyrus, 2003.

LIMA, J.; PACHECO, J. A. Fazer investigação: contributos para a elaboração de dissertações e teses. **Porto: Porto Editora**, v. 105, p. 125, 2006.

MARTINS, V.; SANTOS, E.; DA SILVA, E. F. D. A educação online e os desenhos didáticos com interfaces móveis: autorais em ambientes virtuais de aprendizagem web e aplicativos. **Debates em educação**, v. 12, n. 27, p. 785-804, 2020.

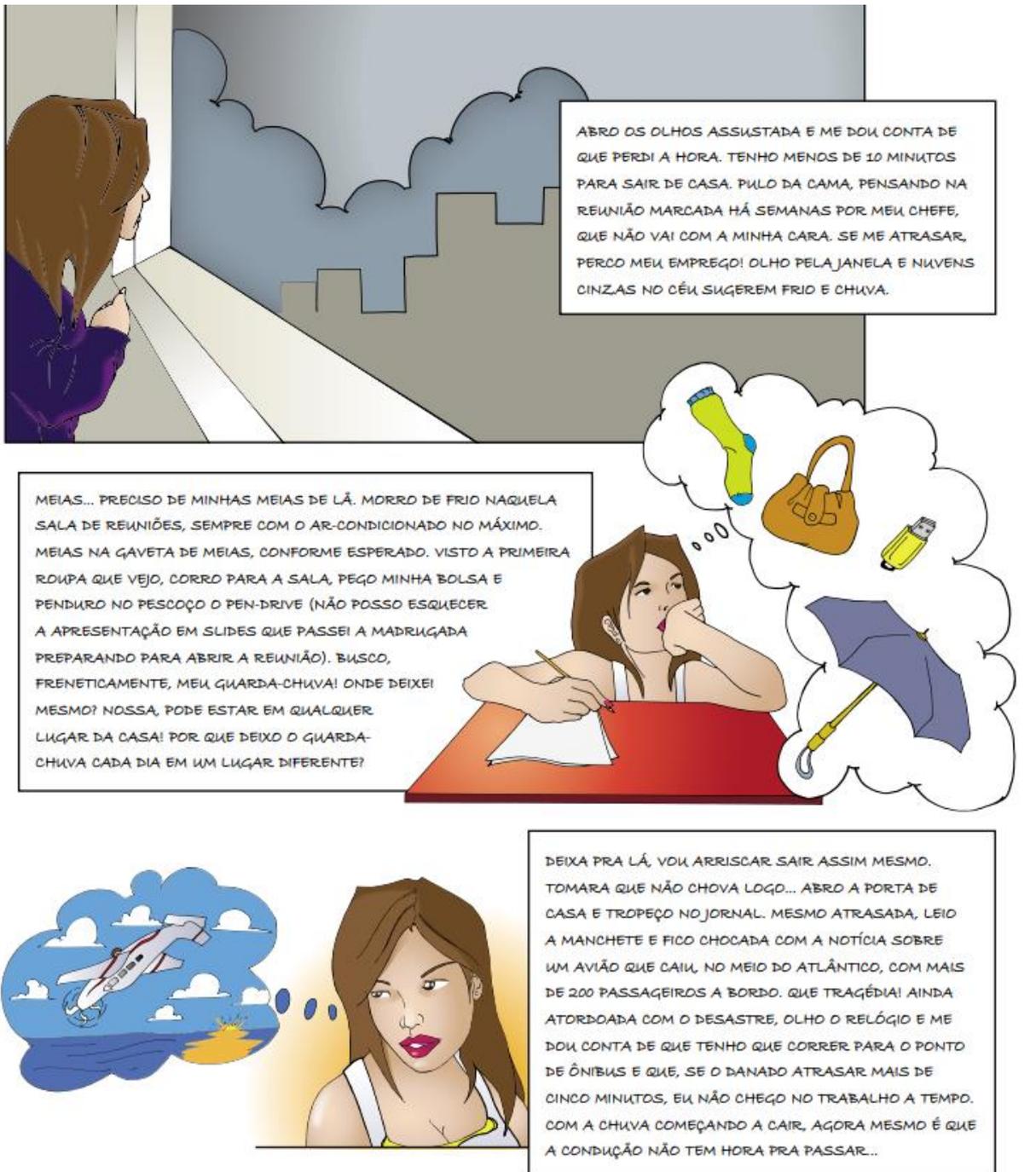
ZANELLA, L. C. H. **Metodologia de pesquisa** – 2. ed. reimp. – Florianópolis: Departamento de Ciências da Administração/UFSC, 2013.

ZAIA, L. L. Jogar para desenvolver e construir conhecimento: jogar para desenvolver o prazer de aprender matemática. **Jogar e aprender matemática. São Paulo: LP Books, 2012.**

## APÊNDICE

## APÊNDICE 1

## ATIVIDADE 1: É POSSÍVEL PREVER OU NÃO?



ABRO OS OLHOS ASSUSTADA E ME DOU CONTA DE QUE PERDI A HORA. TENHO MENOS DE 10 MINUTOS PARA SAIR DE CASA. PULO DA CAMA, PENSANDO NA REUNIÃO MARCADA HÁ SEMANAS POR MEU CHEFE, QUE NÃO VAI COM A MINHA CARA. SE ME ATRASAR, PERCO MEU EMPREGO! OLHO PELA JANELA E NUVENS CINZAS NO CÉU SUGEREM FRIO E CHUVA.

MEIAS... PRECISO DE MINHAS MEIAS DE LÃ. MORRO DE FRIO NAQUELA SALA DE REUNIÕES, SEMPRE COM O AR-CONDICIONADO NO MÁXIMO. MEIAS NA GAVETA DE MEIAS, CONFORME ESPERADO. VISTO A PRIMEIRA ROUPA QUE VEJO, CORRO PARA A SALA, PEGO MINHA BOLSA E PENDURO NO PESCOÇO O PEN-DRIVE (NÃO POSSO ESQUECER A APRESENTAÇÃO EM SLIDES QUE PASSEI A MADRUGADA PREPARANDO PARA ABRIR A REUNIÃO). BUSCO, FRENETICAMENTE, MEU GUARDA-CHUVA! ONDE DEIXEI MESMO? NOSSA, PODE ESTAR EM QUALQUER LUGAR DA CASA! POR QUE DEIXO O GUARDA-CHUVA CADA DIA EM UM LUGAR DIFERENTE?

DEIXA PRA LÁ, VOU ARRISCAR SAIR ASSIM MESMO. TOMARA QUE NÃO CHOVA LOGO... ABRO A PORTA DE CASA E TROPEÇO NO JORNAL. MESMO ATRASADA, LEIO A MANCHETE E FICO CHOCADA COM A NOTÍCIA SOBRE UM AVIÃO QUE CAIU, NO MEIO DO ATLÂNTICO, COM MAIS DE 200 PASSAGEIROS A BORDO. QUE TRAGÉDIA! AINDA ATORRDOADA COM O DESASTRE, OLHO O RELÓGIO E ME DOU CONTA DE QUE TENHO QUE CORRER PARA O PONTO DE ÔNIBUS E QUE, SE O DANADO ATRASAR MAIS DE CINCO MINUTOS, EU NÃO CHEGO NO TRABALHO A TEMPO. COM A CHUVA COMEÇANDO A CAIR, AGORA MESMO É QUE A CONDUÇÃO NÃO TEM HORA PRA PASSAR...

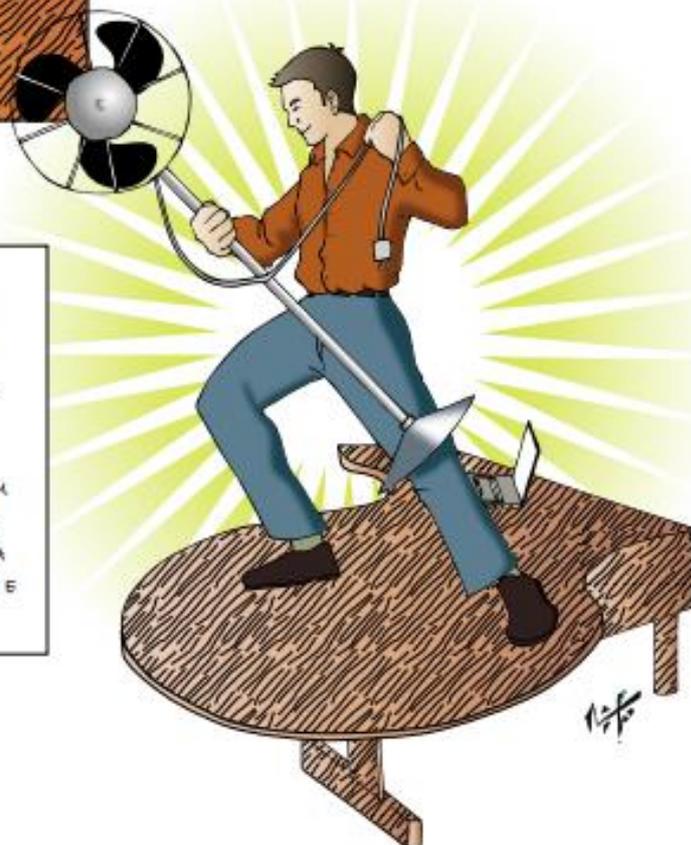
MIRACULOSAMENTE, O ÔNIBUS CHEGA. SUBO OS DEGRAUS VOANDO E SENTO NO ÚLTIMO LUGAR VAÇO. NO MEIO DO CAMINHO, CEDO MEU LUGAR PARA UMA MULHER GRÁVIDA, IMAGINANDO SE O BEBÊ QUE ELA CARREGA É MENINO OU MENINA. VOU PARA O CORREDOR DO ÔNIBUS. QUE CONFUSÃO!



CHEGO NO TRABALHO E A CHUVA APERTA. PERCEBO QUE PERDI O PEN-DRIVE NO EMPURRA-EMPURRA DO ÔNIBUS E, COM ELE, A APRESENTAÇÃO DA REUNIÃO, O EMPREGO, O ALUGUEL, AS FÉRIAS, TUDO... QUE DIA DE CÃO! ENSOPADA, ATRASADA E DESOLADA.



SUBO AS ESCADAS APRESSADA E LOGO ENCONTRO UM COLEGA, SAINDO DA SALA DE REUNIÕES, COM UMA EXPRESSÃO DE INCREDUMLIDADE NO ROSTO. PENSO: FUI DEMITIDA! MEU COLEGA OLHA PRA MIM E DIZ, COM A VOZ FALHA: VOCÊ NÃO VAI ACREDITAR... O CHEFE GANHOU SOZINHO NA LOTERIA... DESCOBRIU HOJE, ASSIM QUE ENTROU NA SALA... SUBIU NA MESA DE REUNIÃO, DANÇOU UM TANGO COM O VENTILADOR DE PÉ, E PEDIU DEMISSÃO! FOI DIRETO PRO AEROPORTO, PEGAR O PRÓXIMO VOO PARA O EGITO. DISSE QUE QUERIA CONVERSAR COM A ESFINGE, E QUE VOCÊ SERIA A NOVA CHEFE...



**O QUE É e o QUE NÃO PODE SER...**

Na história em quadrinhos, diversos acontecimentos dão-se ao longo de uma tumultuada manhã. Do ponto de vista da personagem, selecione os acontecimentos que você considera ser previsível e um acontecimento que você considera ser não previsível ou aleatório. Justifique sua resposta.

**➤ ACONTECIMENTO PREVISÍVEL:**

Acontecimento	Justificativa

## ➤ ACONTECIMENTO NÃO PREVISÍVEL ou ALEATÓRIO

Acontecimento	Justificativa

**CONCEITUANDO...escreva o que você entendeu sobre:**

- O que é um evento?


- O que é um evento previsível ou não aleatório?


- O que é um evento não previsível ou aleatório?




## TEXTO BASE

### ORIGEM:

O interesse do homem em estudar os fenômenos que envolviam determinadas possibilidades fez surgir a Probabilidade. Alguns indícios alegam que o surgimento da teoria das probabilidades teve início com os jogos de azar disseminados na Idade Média. Esse tipo de jogo é comumente praticado através de apostas, na ocasião também era utilizado no intuito de antecipar o futuro.

O desenvolvimento das teorias da probabilidade e os avanços dos cálculos probabilísticos devem ser atribuídos a vários matemáticos. Atribui-se aos algebristas italianos Pacioli, Cardano e Tartaglia (séc. XVI) as primeiras considerações matemáticas acerca dos jogos e das apostas. Através de estudos aprofundados, outros matemáticos contribuíram para a sintetização de uma ferramenta muito utilizada cotidianamente. Dentre os mais importantes, podemos citar:

Blaise Pascal (1623 – 1662)      Pierre de Fermat (1601 – 1655)      Jacob Bernoulli  
(1654 – 1705)  
Pierre Simon Laplace (1749 – 1827)      Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855)  
Lenis Poisson (1781 – 1840)

Os alicerces da teoria do cálculo das probabilidades e da análise combinatória foram estabelecidos por Pascal e Fermat, as situações relacionando apostas no jogo de dados levantaram diversas hipóteses envolvendo possíveis resultados, marcando o início da teoria das probabilidades como ciências.

As contribuições de Bernoulli enfatizaram os grandes números, abordando as combinações, permutações e a classificação binomial. Laplace formulou a regra de sucessão e Gauss estabelecia o método dos mínimos quadrados e a lei das distribuições das probabilidades.

Atualmente, os estudos relacionados às probabilidades são utilizados em diversas situações, pois possuem axiomas, teoremas e definições bem contundentes. Sua principal aplicação diz respeito ao estudo da equidade dos jogos e dos respectivos prêmios, sendo sua principal aplicação destinada à Estatística Indutiva, na acepção de amostra, extensão dos resultados à população e na previsão de acontecimentos futuros.

fonte: <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/historia-probabilidade.htm>

## APLICAÇÕES

A probabilidade em nosso cotidiano A probabilidade aparece em nosso dia a dia de um jeito que nem nos damos conta. Por exemplo, hoje em dia muitas pessoas pagam um plano de saúde e o valor da mensalidade envolve cálculos de probabilidades. A empresa que oferece o plano de saúde recebe mensalidades de diferentes usuários, desde crianças recém-nascidas até pessoas idosas. Com os recursos recolhidos mensalmente, a empresa tem de pagar as despesas de consultas, operações e procedimentos diversos solicitados por eles.

Além disso, precisa sustentar sua estrutura operacional, como funcionários, prédios, veículos, impostos, etc. Os donos da empresa também querem que, no final do mês, sobre um lucro para eles mesmos

Como calcular a mensalidade a ser cobrada dos clientes de modo que esse recurso seja suficiente para a empresa pagar suas despesas? Como a empresa pode prever quantos clientes vão ter um determinado problema de saúde, quantas consultas vão solicitar, exames clínicos, operações etc.? Ao fazer esses cálculos, a empresa usa a teoria das probabilidades para estimar a ocorrência de problemas e necessidades de saúde na população. Calculando essas probabilidades, e conhecendo o perfil de seus clientes, a empresa pode saber qual a provável despesa que terá em um determinado mês. Por exemplo, não faz sentido esperar que um homem faça uma operação de ligadura de trompas, nem que uma mulher tenha câncer de próstata.

Também é pouco provável que uma criança utilize os serviços relacionados a doenças do coração e que moradores de cidades pacatas tenham problemas de estresse.

**APÊNDICE 3****ATIVIDADE 3: BINGO DAS PROBABILIDADES**

INSTRUÇÕES: Preencha a tabela abaixo usando os números: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 OU 12.

Você pode repetir números, PORÉM deve usar pelo menos 3 números distintos.

B	I	N	G	O

**EXPLORANDO O JOGO:**

1). Quais resultados são possíveis sair somando dois dados?


2). Montando uma tabela de todas as possibilidades dos valores que podem ser obtidos somando dois dados:


3). Analisando a tabela montada responda:

A). Qual o total de somas possíveis?

B). Qual ou quais números tem maior chance de sair? Justifique

C). Qual ou quais números tem menor chance de sair? Justifique.

4). Se o espaço amostral na probabilidade é o conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório, qual a quantidade de elementos desse espaço amostral?


5). Qual(is) evento(s) pode(m) ser criado(s) dentro das possibilidades da soma de dois dados?


## APÊNDICE 4

### **ATIVIDADE 4: E o improviso virou Matemática...**

#### Entendendo o Jogo...



Figura 5: O Jogo dos Discos – ganha quem lançar o disco no interior de um ladrilho, sem tocar nenhuma de suas bordas.

Na França, no século XVIII, era moda ladrilhar pisos de castelos e jardins. As crianças não perderam tempo e logo fizeram desses ladrilhos um grande tabuleiro. Inventaram o jogo dos discos, lançando moedas aleatoriamente no piso e apostando na parada da moeda no interior de um ladrilho. Mas que fatores contribuía para uma criança ganhar a aposta e ver sua moeda inteiramente dentro de um ladrilho, num lançamento aleatório, sem tocar nenhuma de suas bordas? As crianças mais espertas logo perceberam que o diâmetro da moeda e o tamanho dos ladrilhos influenciavam, e muito, na probabilidade de ganho deste jogo.



#### **Saiba Mais**

#### **Probabilidade e Geometria, um casamento perfeito**

A imagem é do naturalista e matemático Georges Louis Leclerc, o Conde de Buffon (1707–1788). Ele discutiu a probabilidade de ganho no jogo dos discos, num livro em 1777, juntamente com o famoso problema da agulha. Diz a História que este livro é o primeiro tratado conhecido sobre Probabilidade Geométrica.



<http://evolucionismo.ning.com/photo/2393347/Photo:32/pre?context=user>

### **... JOGO DOS DISCOS...**

Formandos atentos!

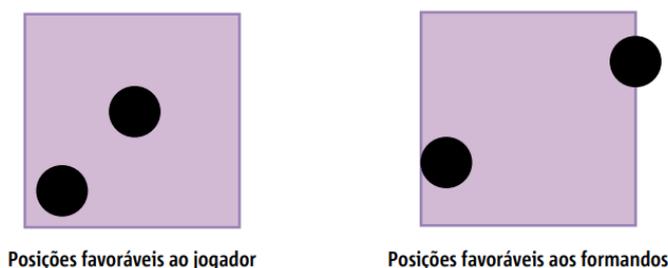
Na festa anual, promovida por sua escola, os estudantes do terceiro ano do Ensino Médio resolveram montar uma barraca para arrecadar fundos para a realização da tão sonhada festa de formatura. Alguns estudantes queriam montar uma barraca de doces, outros queriam vender refrigerantes e salgados, mas a maior parte

da turma pensou em bolar um jogo de apostas. Só faltava saber qual seria o jogo, que deveria ser simples e interessante.

Depois de muita discussão e nenhuma definição, a turma resolveu pedir ajuda ao professor de Matemática. O professor, lembrando-se do Conde de Buffon, levou a turma para o pátio da escola e mostrou o piso quadriculado, com ladrilhos quadrados de 30 cm de lado. Neste momento, o professor fez a seguinte sugestão:

Que tal construir discos com um certo diâmetro para serem comprados pelos convidados e jogados “aleatoriamente” no piso? Se o disco, depois de parar, ficar inteiramente dentro de um ladrilho, sem tocar ou interceptar as linhas de separação do ladrilhamento, o convidado receberá um prêmio.

Figura 6: Regra básica para o jogo dos discos



Os alunos adoraram a ideia e, na mesma hora, começaram a pensar qual seria o melhor diâmetro para os discos. Claro que quanto maior melhor, pensaram...

O professor completou:

Vocês só precisam tomar cuidado na hora de determinar o diâmetro desses discos, pois os convidados da festa somente irão se interessar pelo jogo se acharem que têm chance de ganhar o prêmio.

**>>> Agora me digam: qual seria o diâmetro ideal para a situação descrita?**

**>>> O que temos que levar em conta ao pensar no tamanho do disco, pensando que o jogo acontece sob um tabuleiro quadriculado?**

## APÊNDICE 5

### ATIVIDADE 5: ETAPA I- DO JOGO DOS DICOS

- 1). Como garantir que teremos lançamentos aleatórios, isto é, como garantir que não teremos um padrão justo ao realizarmos os lançamentos?
  - a). Definir uma distância padrão para lançar os dados.
  - b). Ficar o mais próximo possível do tabuleiro e jogar na posição vertical as moedas.
  - c). Colocar uma venda em quem jogar os dados.
  - d). Revezar em cada momento um integrante do time jogar.
- 2). Criar regras para realizar os lançamentos partindo das ideias propostas na questão 1 é importante? Justifique.


*Agora que já definimos algumas ações para iniciar o Jogo dos Discos, vamos lá....*

1º MOMENTO:

#### ATENÇÃO:

Um **evento é favorável**, nesse processo, se a moeda cair inteiramente dentro de um quadrado. Isso indica uma jogada vencedora;

**Caso contrário, teremos um evento não favorável**, se a moeda interceptar alguma linha do quadriculado. Isso indica uma jogada perdedora.

(a). Lance os objetos circulares (moedas e botões), uma de cada vez, registre nos quadros abaixo o que aconteceu em cada lançamento.

<b>MOEDA DE 10 CENTAVOS</b>	
<b>Lançamento</b>	<b>Evento</b>
<b>1º</b>	
<b>2º</b>	
<b>3º</b>	
<b>4º</b>	
<b>5º</b>	
<b>6º</b>	

<b>MOEDA DE 25 CENTAVOS</b>	
<b>Lançamento</b>	<b>Evento</b>
<b>1º</b>	
<b>2º</b>	
<b>3º</b>	
<b>4º</b>	
<b>5º</b>	
<b>6º</b>	

<b>BOTÃO DE CAMISA</b>	
<b>Lançamento</b>	<b>Evento</b>
<b>1º</b>	
<b>2º</b>	
<b>3º</b>	
<b>4º</b>	
<b>5º</b>	
<b>6º</b>	

<b>MOEDA BOTÃO PEQUENO</b>	
<b>Lançamento</b>	<b>Evento</b>
<b>1º</b>	
<b>2º</b>	
<b>3º</b>	
<b>4º</b>	
<b>5º</b>	
<b>6º</b>	

(b). O diâmetro dos objetos tem alguma relação com a quantidade de lançamentos favoráveis obtidos nessas jogadas iniciais? Comente sobre sua resposta.


(c). O cálculo da probabilidade é feito por meio da razão:

$$\frac{\text{casos favoráveis}}{\text{casos possíveis}}$$

Partindo dessa ideia, calcule a probabilidade obtida em cada um dos lançamentos:

MOEDAS DE 10 CENTAVOS	MOEDAS DE 20 CENTAVOS
BOTÕES DE CAMISA	BOTÕES PEQUENOS

(d). Agora monte a probabilidade complementar de em cada um dos eventos.

São os eventos que se completam em relação ao espaço amostral. O evento complementar **A**, associado a uma experiência aleatória e denotado por, só ocorre se **A** deixar de ocorrer, isto é, é o evento formado por todos os elementos do espaço amostral que não pertencem a **A**.

EX: Se joga um dado com 6 faces enumeradas de uma a seis, meu espaço amostral são os números: 1,2,3,4,5 e 6.

Dentro desse experimento eu crio um evento: "sair um número maior de 4" temos:

Casos favoráveis é sair os números 5 ou 6, probabilidade  $2 / 6$  (dois sextos).

MOEDAS DE 10 CENTAVOS	MOEDAS DE 20 CENTAVOS
BOTÕES DE CAMISA	BOTÕES PEQUENOS

(e). Diferentes formas de representar a probabilidade...

	<p>&gt;&gt; A probabilidade pode ser representada como fração, como porcentagem ou como número decimal.</p> <p>&gt;&gt; A probabilidade é sempre um número decimal entre 0 e 1, ou uma porcentagem entre 0% e 100%.</p>
---	---

**>> Mas como se representa essas probabilidade?? <<**

A probabilidade em frações você já fez anteriormente...

A probabilidade como número decimal é o resultado da divisão da probabilidade em forma de fração.

Para calcular ela em forma de porcentagem basta multiplicar a probabilidade na forma decimal por 100 e inserir o símbolo da porcentagem.

Complete a tabela:

EVENTO	Fração	Decimal	Porcentagem
MOEDA DE 10 CENTAVOS			
MOEDA DE 25 CENTAVOS			
BOTÃO DE CAMISA			
BOTÃO PEQUENO			



**APÊNDICE 6****ATIVIDADE 6: ETAPA II Experimento em larga escala...**

1). O que acontece se lançarmos 100 moedas cujo diâmetro seja maior do que o lado do quadrado, no tabuleiro quadriculado?

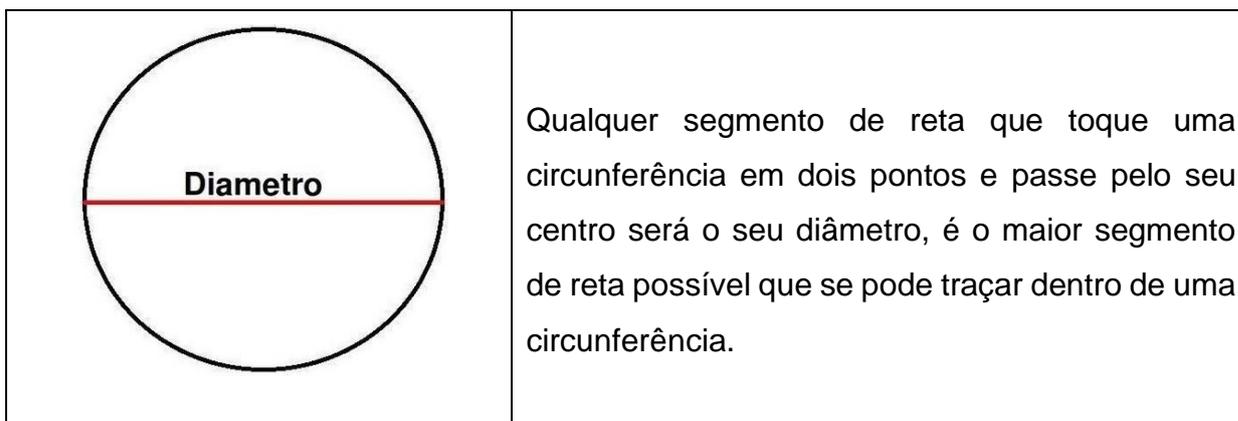

2). No experimento anterior cada moeda foi lançada 6 vezes, vocês acham que lançar mais vezes 100, 200 vezes o que acontecerá com o resultado?

- a). Manterá o mesmo
- b). Mudará muito pouco.
- c). Terá uma diferença considerável.
- d). Terá uma diferença muito grande.

3). Se Vocês foram solicitados em lançar 200 moedas, e tiveram a ideia de lançar de 10 em 10, com isso efetuaram apenas 20 lançamentos. Isso é possível?

- a). Não, pois, perderia a qualidade.
- b). Não seria possível pois o tabuleiro teria que ser maior.
- c). Sim sem problemas.
- d). Sim desde que se estabeleça uma regra que todas as moedas que caírem sobrepostas ou fora do tabuleiro fossem relançadas.

4). Antes de partir para a etapa 2 registrem aqui o diâmetro de cada objeto circular.



OBJETO	DIÂMETRO
Moeda de 10 centavos	
Moeda de 25 centavos	
Botão de camisa	
Botão pequeno	

2º MOMENTO:

Lançamentos em larga escala: Agora vocês devem lançar 200 vezes cada objeto circular.

Para facilitar vocês devem lançar de 10 em 10 os objetos e caso algum objeto caia sobreposto ao outro ou caia fora do tabuleiro o mesmo deve ser lançado novamente.

ATENÇÃO:

- VOCÊS DEVEM REGISTRAR APENAS OS CASOS FAVORÁVEIS.
- NA TABELA TEMOS: L para (LANÇAMENTO), Q (quantidade de moedas lançadas) e F (casos favoráveis na jogada)

RELEMBRANDO:

Um **evento é favorável**, nesse processo, se a moeda cair inteiramente dentro de um quadrado. Isso indicada uma jogada vencedora;

**Caso contrário, teremos um evento não favorável, se a moeda interceptar alguma linha do quadriculado. Isso indica uma jogada perdedora.**

**Tabela 01: Dados obtidos com o lançamento das moedas de 10 centavos**  
**(      cm de diâmetro)**

L	Q	F		L	Q	F
1	10			11	10	
2	10			12	10	
3	10			13	10	
4	10			14	10	
5	10			15	10	
6	10			16	10	
7	10			17	10	
8	10			18	10	
9	10			19	10	
10	10			20	10	
<b>Total</b>	<b>100</b>			<b>Total</b>	<b>100</b>	

**Tabela 02: Dados obtidos com o lançamento das moedas de 25 centavos****(      cm de diâmetro)**

<b>L</b>	<b>Q</b>	<b>F</b>		<b>L</b>	<b>Q</b>	<b>F</b>
<b>1</b>	<b>10</b>			<b>11</b>	<b>10</b>	
<b>2</b>	<b>10</b>			<b>12</b>	<b>10</b>	
<b>3</b>	<b>10</b>			<b>13</b>	<b>10</b>	
<b>4</b>	<b>10</b>			<b>14</b>	<b>10</b>	
<b>5</b>	<b>10</b>			<b>15</b>	<b>10</b>	
<b>6</b>	<b>10</b>			<b>16</b>	<b>10</b>	
<b>7</b>	<b>10</b>			<b>17</b>	<b>10</b>	
<b>8</b>	<b>10</b>			<b>18</b>	<b>10</b>	
<b>9</b>	<b>10</b>			<b>19</b>	<b>10</b>	
<b>10</b>	<b>10</b>			<b>20</b>	<b>10</b>	
<b>Total</b>	<b>100</b>			<b>Total</b>	<b>100</b>	

**Tabela 03: Dados obtidos com o lançamento dos botões de camisa****(      cm de diâmetro)**

<b>L</b>	<b>Q</b>	<b>F</b>		<b>L</b>	<b>Q</b>	<b>F</b>
<b>1</b>	<b>10</b>			<b>11</b>	<b>10</b>	
<b>2</b>	<b>10</b>			<b>12</b>	<b>10</b>	
<b>3</b>	<b>10</b>			<b>13</b>	<b>10</b>	
<b>4</b>	<b>10</b>			<b>14</b>	<b>10</b>	
<b>5</b>	<b>10</b>			<b>15</b>	<b>10</b>	
<b>6</b>	<b>10</b>			<b>16</b>	<b>10</b>	
<b>7</b>	<b>10</b>			<b>17</b>	<b>10</b>	
<b>8</b>	<b>10</b>			<b>18</b>	<b>10</b>	
<b>9</b>	<b>10</b>			<b>19</b>	<b>10</b>	
<b>10</b>	<b>10</b>			<b>20</b>	<b>10</b>	
<b>Total</b>	<b>100</b>			<b>Total</b>	<b>100</b>	

**Tabela 04: Dados obtidos com o lançamento dos botões da roupinha de bebê**

**( cm de diâmetro)**

<b>L</b>	<b>Q</b>	<b>F</b>		<b>L</b>	<b>Q</b>	<b>F</b>
<b>1</b>	<b>10</b>			<b>11</b>	<b>10</b>	
<b>2</b>	<b>10</b>			<b>12</b>	<b>10</b>	
<b>3</b>	<b>10</b>			<b>13</b>	<b>10</b>	
<b>4</b>	<b>10</b>			<b>14</b>	<b>10</b>	
<b>5</b>	<b>10</b>			<b>15</b>	<b>10</b>	
<b>6</b>	<b>10</b>			<b>16</b>	<b>10</b>	
<b>7</b>	<b>10</b>			<b>17</b>	<b>10</b>	
<b>8</b>	<b>10</b>			<b>18</b>	<b>10</b>	
<b>9</b>	<b>10</b>			<b>19</b>	<b>10</b>	
<b>10</b>	<b>10</b>			<b>20</b>	<b>10</b>	
<b>Total</b>	<b>100</b>			<b>Total</b>	<b>100</b>	

3º MOMENTO:

Agora juntamos as informações em uma única tabela e na probabilidade de ganho represente a probabilidade na forma fracionária, decimal e de porcentagem.

**Tabela 05: Organizando os dados obtidos com lançamentos experimentais de discos com diâmetros variados.**

<b>Lado do quadrado do quadriculado = 3cm</b>				
<b><i>Tipo de disco</i></b>	<b><i>Diâmetro (cm)</i></b>	<b><i>Quant . De lançamentos</i></b>	<b><i>Eventos favoráveis</i></b>	<b><i>Probabilidade de ganho P(d)</i></b>
Moeda de 10 centavos				
Moeda de 25 centavos				
Botão de Camisa				
Botão de pequeno				

**APÊNDICE 7****ATIVIDADE 7: ETAPA III - Análise dos experimentos**

1). Comparando as probabilidades dos lançamentos de moedas de 10 centavos lançadas na atividade 5 ( onde lançamos apenas 6 vezes ) e a probabilidade obtida no experimento 6 ( onde lançamos 200 vezes). Os resultados estão diferentes? Por que isso acontece?


2). Como podemos decidir se 200 lançamentos são o suficiente para obter uma precisão de uma casa decimal apenas entre as probabilidades? Seriam necessários mais lançamentos? Será que 100 lançamentos não seriam suficientes? - Reflita e comente.


3). Sobre o diâmetro dos objetos circulares responda:

a). Sabendo que os quadrados do tabuleiro têm 3 cm, e pensando na regra para considerar um lançamento favorável, o que aconteceria se pegássemos um objeto circular com 3,5 cm de diâmetro? Qual seria a probabilidade? Seria um evento possível de acontecer ter casos favoráveis ao lançar um objeto circular com esse diâmetro? – Comente sobre.


b). Se um evento é impossível de acontecer qual seria sua probabilidade?
