



O cálculo de volume dos sólidos geométricos através do princípio de Cavalieri: uma abordagem inspirada na teoria de Van Hiele.

The Calculation of Volume of Geometric Solids Using Cavalieri's Principle: An Approach Inspired by Van Hiele's Theory

LÍDIA MARIA SILVA MAGALHÃES RIBEIRO¹

IGOR CÁSSIO ROCHA DE OLIVEIRA²

RESUMO

Este trabalho apresenta os resultados de uma investigação qualitativa, que teve como propósito relatar uma prática durante as aulas de Matemática com os alunos da 3ª série do ensino médio, da Escola Promove, da rede particular da cidade de Bom Jesus da Lapa-BA. O objetivo foi investigar como os alunos aprendem volume dos sólidos geométricos através do Princípio de Cavalieri, mediadas pela professora-pesquisadora, também sujeito deste processo, criando alternativas metodológicas, fundamentadas na teoria do desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele. Com a investigação, foi possível ampliar as possibilidades da aprendizagem do cálculo de volume dos sólidos geométrico através do princípio de Cavalieri: uma abordagem passando pela teoria de Van Hiele, desde que o professor saiba planejá-la, fazendo com que os alunos entendam os objetivos que se pretende atingir com a realização da atividade.

Palavra-chave: Níveis de aprendizagem de Van Hiele; Princípio de Cavalieri; Geometria espacial

ABSTRACT

This paper presents the results of a qualitative investigation, which aimed at reporting a practice during mathematics classes with the third-grade high school students at the Promove School, a private institution in the city of Bom Jesus da Lapa, Bahia. The objective was to investigate how the students learn about the geometric solids volume calculation through the Cavalieri's principle. The objective was to investigate how students learn the volume of geometric solids through the Cavalieri's principle, guided by the teacher-researcher, who is also a facilitator in this process, creating methodological alternatives Based on the theory of geometric thinking development by Van Hiele. Through the investigation, it was possible to expand the possibilities of learning the calculation of volume of geometric solids using Cavalieri's principle: an approach influenced by Van Hiele's theory, as long as the teacher plans it effectively, ensuring that the students understand the objectives intended to be achieved through the activity.

Keywords: Van Hiele levels of learning; Cavalieri's principle; Spatial geometry."

Introdução

A geometria é parte integrante das diversas formas do mundo físico, pois a sua aplicação é observada na natureza e no conhecimento científico. De acordo com Figueira (2007), a

¹Escola Promove: lidia.mr@hotmail.com

² Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia da Bahia: igor.cassio@ifba.edu.br



geometria estabelece uma junção fundamental para uma construção sólida do conhecimento matemático.

Segundo Passos (2000), a geometria desempenha um papel importante em todos os aspectos da vida. Logo, compreensão e aplicação são essenciais em diversas atividades do conhecimento atividades e campos do conhecimento.

Corroborando com os autores, este artigo busca provocar sobre a importância da geometria na compreensão e na aplicação científica, bem como sua presença e influência em diversas áreas da vida cotidiana e da natureza. Ao longo da pesquisa propomos uma metodologia de ensino inspirada na teoria de Van Hiele com a representação do Princípio de Cavalieri, para desenvolver os conteúdos do cálculo de volume de sólidos geométricos, pautado na investigação, onde o processo de aprendizagem não está atrelado a uma estrutura formatada, mas sim numa construção e sistematização do conhecimento.

Justifica-se a escolha do tema por ser relevante para a aprendizagem dos discentes no Ensino Médio, além de se tratar de uma disciplina aplicada na vida das pessoas. É possível observar que os alunos têm dificuldades em compreender e dominar conceitos básicos de geometria, os quais já deveriam ter sido assimilados nesta fase de sua formação. Muitas dessas dificuldades, estão atreladas à forma de como foram trabalhados a geometria em anos anteriores. Os autores, entre os quais destacam-se Pavanello (1995), Lorenzato (1995) e Guimarães e Santos (2013), sinalizam que essas dificuldades dos discentes estão atreladas aos obstáculos de aprendizagem bem como do ensino.

O ensino do cálculo de volume dos sólidos geométricos que visa o desenvolvimento do espírito crítico e criativo, não pode ser limitado a uma única prática pedagógica. Nesse contexto, utilizando o Princípio de Cavalieri, este proporciona a oportunidade de criar e aplicar uma sequência de atividades que ajudam os alunos a entenderem como o cálculo de volume dos sólidos geométricos está relacionado com suas experiências cotidianas.

Nesse sentido, cabe aos discentes a responsabilidade pelo processo de aprendizagem, uma vez que são eles que participam ativamente das atividades que exploram o volume e a capacidade dos sólidos geométricos, assim como suas inter-relações. Skovsmose (2014) aborda a transição do paradigma do exercício para cenários de investigação, promovendo uma mudança da sala de aula convencional para o engajamento dos alunos em seus próprios processos de aprendizagem. Ele argumenta que o ensino-aprendizagem está se deslocando do foco exclusivo na matemática pura para a aplicação prática no cotidiano, incentivando a reflexão sobre a Matemática e suas diversas aplicações.

Nesse contexto, procurou-se resolver a seguinte questão: De que modo o Princípio de Cavalieri se integra ao processo de aprendizagem para o cálculo do volume dos sólidos geométricos, inspirando-se na teoria de Van Hiele?

O objetivo geral desta pesquisa foi investigar como os alunos aprendem sólidos geométricos usando o Princípio de Cavalieri, com mediação do professor-pesquisador, que



também foi parte integrante do processo. Além disso, buscou-se desenvolver alternativas metodológicas inspiradas na teoria do desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele.

O trabalho tem como finalidades principais: analisar os referenciais teóricos que fundamentam as concepções de ensino aprendizagem; estimular a construção de estratégias de aprendizagem matemática, levando em consideração as vivências e os conhecimentos do grupo pesquisado.

A estrutura do artigo tem início com a importância do estudo da geometria, passando pela teoria de Van Hiele e o Princípio de Cavalieri. Em seguida, será apresentado um resumo das competências e habilidades pertinentes ao ensino dos sólidos geométricos no ensino médio. Posteriormente, são apresentadas o percurso metodológico, resultados e discussões, seguido das conclusões finais do estudo.

1. Referencial teórico

Na atualidade existem inúmeras situações em que o domínio dos conhecimentos geométricos oferece para os sujeitos uma gama de situações nas quais podem exercitar sua criatividade ao interagir com as propriedades dos objetos, ao manipular e construir figuras, ao observar suas características e compará-las, bem como associá-las a diferentes objetos.

Para Lorenzato (1995), sem o estudo da geometria os indivíduos não desenvolverão sua capacidade intelectual, como a percepção espacial, a criatividade, e o raciocínio hipotético e dedutivo, comprometendo a leitura interpretativa do mundo em sua volta, distorcendo a visão matemática. D'Ambrosio (1986) aponta que, a matemática está intrínseca na atividade humana, resultante de seu ambiente sociocultural e conseqüentemente determinada pela realidade material na qual o indivíduo está inserido. Diferentes culturas produzem cálculos matemáticos alternativos, tornando o conhecimento mais amplo, indo além da resolução de problemas que muitas vezes são desconectados da realidade.

Nessa premissa, a Base Nacional Comum Curricular – BNCC- (BRASIL, 2017) aborda sobre a importância das vivências dos indivíduos, que se multiplicam às condições socioeconômicas, as mídias e ao crescimento tecnológico, pelas exigências do mercado de trabalho, entre outros, construindo assim uma comunicação matemática e fazendo uso de diversas linguagens, estabelecendo relações entre elas e diferentes representações matemáticas.

O foco principal da BNCC é que o educando precisa desenvolver competências e habilidades, para que o conhecimento matemático seja uma ferramenta para ler, compreender e transformar a realidade. Nela, o propósito é que a memorização dê passagem para a reflexão. Neste documento os termos dos objetivos estão voltados para construção da aprendizagem, como: interpretar, comparar e resolver. Portanto, o aluno nessa nova perspectiva é convidado a pensar a partir das informações recebidas, promovendo um movimento de ação e reflexão, desenvolvendo a habilidade de saber aprender com uma postura ativa.



A BNCC enfatiza o desenvolvimento de competências específicas, como a capacidade de visualizar, representar e analisar formas tridimensionais. Isso envolve a compreensão de propriedades, relações e transformações dos sólidos geométricos, bem como a aplicação de fórmulas para cálculo de áreas e volumes. O documento apresenta cinco competências, das quais três mencionam os tópicos de áreas de figuras planas, poliedros e corpos redondos, que são a temática do nosso estudo e serão abordados a seguir.

A primeira competência é a que propõe aos discentes a aquisição do conhecimento matemático, com o intuito de quebrar as barreiras da desigualdade educacional de forma que ele interaja com o mundo contemporâneo, baseado em conceitos, procedimentos, atitudes e valores para resolver demandas do cotidiano, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. Para tal, a Base expõe a habilidade de “propor ações comunitárias, como as voltadas aos locais de moradia dos estudantes dentre outras, envolvendo cálculos das medidas de área, de volume, de capacidade ou de massa, adequados às demandas da região” (Brasil 2017, p.526).

A segunda competência recomenda que os alunos utilizem procedimentos da geometria, para desenvolver a interpretação, construção de modelos e resolução de problemas, num contexto das discussões em torno da aprendizagem ou do aprender a aprender (Brasil, 2017, p.528 e 529).

E por último, o documento nos mostra a Matemática como um processo de busca, onde as atividades tem ida e volta, dando assim espaço para questionamentos. Está voltada para compreensão, nos registros matemáticos, na busca de soluções dos problemas, de modo que o aluno vai formando uma visão crítica das informações que os cálculos geométricos reproduzem. Para conseguir atingir essa competência os alunos deverão desenvolver a seguintes habilidades: “Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o Princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras[...]” (Brasil, 2017, p.533).

O desafio do ensino-aprendizagem dos sólidos geométricos, é um quebra-cabeça, onde cada peça é de fundamental importância, e através dessa analogia podemos facilitar o sucesso na aprendizagem da geometria. Sendo assim, o aluno que não se apropria dos conhecimentos geométricos, dificilmente será capaz de resolver situações de vida que forem geometrizadas e a leitura de mundo ficará, incompleta, com a comunicação reduzida e a visão matemática distorcida (LORENZATO, 1995).

A partir dessas reflexões, o sujeito que absorve os conceitos geométricos está apto a estabelecer relações, consegue estruturar o pensamento de forma eficaz, culminado com o desenvolvimento de uma lógica dedutiva (DOBARRO, 2010). Nesse sentido, ao se apropriar do conhecimento geométrico, o aluno passa a compreender e aprender mais do que apenas teoremas e propriedades das figuras geométricas. Isso permite que ele explore outras maneiras de visualizar e resolver problemas, além de representar o mundo em que vive.



Para a realização deste estudo, foram organizadas atividades, visando desenvolver o conhecimento geométrico inspirado na Teoria de Van Hiele, com intuito de descrever a evolução dos alunos quanto ao conhecimento geométrico, respeitando os níveis de aprendizado que passa de uma simples visualização e reconhecimento de figuras geométricas, até a compreensão de demonstrações e teoremas.

1.1 Modelo de Van Hiele

Este modelo de ensino foi idealizado por um casal de holandeses na década de 1950, Pierre Marie Van Hiele e sua esposa Dina Van Hiele-Geldof. A teoria surgiu do labor de sala de aula, onde os seus alunos apresentavam uma dificuldade significativa e persistente na aprendizagem da geometria, mesmo utilizando-se de diversas metodologias (VILLIERS, 2010).

O modelo Van Hiele é pautado no pensamento geométrico, onde o raciocínio do aluno é desenvolvido em vários níveis de forma sequenciada e ordenada. Aos olhos de Silva e Cândido (2008), para que tenha êxito a geometria não pode ser trabalhada de maneira linear. É preciso que o docente através de atividades orientadas oportunize os alunos a avançar de níveis do pensamento geométrico. Devemos destacar que a passagem de um nível para outro não está atrelado a idade do aluno, mas sim da vivência de atividades propostas pelo professor.

Os níveis de aprendizado têm uma hierarquia no tocante ao conhecimento, os quais os alunos vão avançando conforme aquisição de determinadas ideias geométricas. No **Quadro 1** constam de forma sucinta os cinco níveis de Van Hiele.

Quadro 1 – Níveis de raciocínio da teoria de Van Hiele.

NIVEIS	DESCRIÇÃO
Nível 1-Visualização ou reconhecimento	O aluno reconhece a figura geométrica de forma global, sendo isento da apropriação das propriedades de identificação dessa figura.
Nível 2- Descritível	Os alunos conseguem identificar as suas propriedades geométricas, não fazendo inclusão de classes.
Nível 3 – O nível teórico	O aluno já estabelece relações de propriedades em uma figura e entre figuras. Ele reconhece classes de figuras, bem como é capaz de demonstrar suas propriedades. Também consegue seguir passos formais de uma prova, embora não seja capaz de construir uma demonstração a partir de situações não familiarizadas.
Nível 4- Dedução formal	Raciocínio dentro de um contexto de um sistema matemático completo.



Nível 5- Rigor	Os alunos estão aptos trabalhar com diferentes sistemas geométricos, e é neste nível que a geometria não-euclidianas são compreendidas.
----------------	---

Fonte: Elaborado pela autora, 2024.

O terceiro nível foi o foco da pesquisa, onde desenvolvemos atividades com intuito de construir significados para os axiomas e teoremas, aplicando-os e compreendendo o valor das demonstrações e o entendimento do volume dos sólidos.

Neste trabalho, serão desenvolvidas as seguintes competências gerais previstas na BNCC: exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

A teoria de Van Hiele, que descreve os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico, será fundamental para orientar a construção dessas competências. Cada nível de compreensão geométrica proposto por Van Hiele, exige diferentes abordagens e estratégias de ensino, alinhando-se com os princípios da BNCC ao promover um aprendizado progressivo e adaptado às necessidades dos alunos.

Essa competência será desenvolvida por meio de ferramentas, como pesquisa bibliográfica e pesquisa de campo. As investigações baseadas na teoria de Van Hiele ajudarão os alunos a adquirir os argumentos necessários para se posicionarem nas discussões e refletirem sobre as opiniões dos colegas, facilitando a colaboração e a construção coletiva de soluções para os problemas apresentados. Ao integrar a teoria de Van Hiele com as diretrizes da BNCC, espera-se proporcionar um ensino de geometria mais eficaz e inclusivo, que incentive a curiosidade e a compreensão profunda dos conceitos geométricos.

1.2 Estudo do volume

Sem caráter formal, os estudantes podem encontrar o volume através de uma percepção natural, ou seja, por intuição. Haja vista que alguns conhecimentos matemáticos tiveram suas demonstrações iniciadas por pensamentos intuitivos. Soares (1995) destaca que:

É possível dizer que as ideias intuitivas formam a etapa inicial do raciocínio. Nesse sentido, devem ser valorizadas. No entanto, é fundamental estar atento para o fato de que, numa primeira etapa, as ideias intuitivas devem ser submetidas ao processo de formalização, que é o caminho para se decidir sobre o grau de veracidade da intuição, dentro do contexto em que ela é considerada. (Soares, 1995, p.2)

Nesse contexto, vamos calcular o volume do sólido de forma intuitiva. O volume é a quantidade de espaço por ele ocupada, exemplificando, tomemos o cubo mágico da **Figura 1**.



FIGURA 1: Cubo Mágico Geométrico
FONTE: BECKER, 2009

Devemos comparar um cubinho do cubo mágico com uma unidade de volume. Esse resultado é um número que exprime quantas vezes o sólido contém a unidade de volume. Conclui-se que o sólido supra citado é de 27 unidades de volume: 27 U, ou seja, volume do cubo mágico é igual a 27 vezes o cubo unitário. Vale lembrar, que aqui temos uma ideia intuitiva, só é um vetor que devemos seguir e dá significado preciso, pois o sólido pode apresentar formas bastantes irregulares.

Lima (2009) mostra as referidas fórmulas para calcular o volume dos sólidos de acordo com os teoremas:

- T1 – O volume de um paralelepípedo é dado pelo produto da área da base pela altura;
- T2 – O volume de um cilindro é dado pelo produto da área da base pela altura;
- T3 – O volume de um cone é dado por um terço do produto da altura pela área da base;
- T4 – O volume de uma esfera de raio r é dado por $V = \frac{4\pi r^3}{3}$.

No Ensino Médio ao estudar o volume dos sólidos, os docentes podem desenvolver os estudos utilizando 3 ferramentas: Apresentação clássica de Euclides e Arquimedes, o Cálculo infinitesimal e o Princípio de Cavalieri. Como já falamos anteriormente, debruçaremos nos estudos da terceira ferramenta, por considerar que os estudantes de acordo com os níveis de pensamento geométrico de Van Hiele, estão aptos para desenvolver os conhecimentos mais simples ao mais complexos, desenvolvendo tanto o raciocínio intuitivo como o dedutivo.

O Princípio de Cavalieri simplificou o cálculo da área e do volume de sólidos geométricos, com foco especial neste último, sendo apresentado aos alunos do Ensino Médio de forma mais intuitiva. Neste contexto, observe a **Figura 2**.

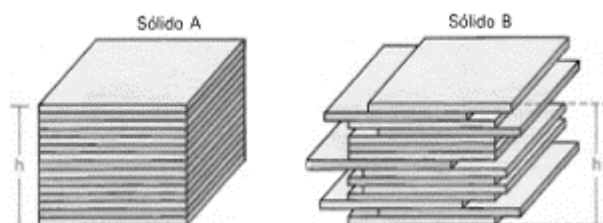


FIGURA 2: Pilhas de folhas
FONTE: DOLCE, 2005

A parte do espaço ocupado pelos sólidos, ou o "volume ocupado", é a mesma para ambos. Portanto, os sólidos A e B têm o mesmo volume.

Assim, o Princípio de Cavalieri pode ser enunciado da seguinte forma: mesmo que o formato de um sólido geométrico seja alterado, desde que seja o mesmo número de folhas, seu volume permanecerá inalterado. Esse é o embasamento que sustenta o princípio. Cavalieri observou que, ao deformar um dos prismas sem modificar o formato de suas bases ou sua altura, os volumes dos prismas permanecem iguais.

De acordo com Lima (2009), a conceituação do Princípio de Cavalieri pode ser expressa como: é uma abordagem fundamental da geometria que permite comparar volumes de sólidos geométricos por meio da equivalência de suas seções transversais. Este princípio estabelece que dois sólidos possuem o mesmo volume se todas as seções transversais de um sólido têm áreas iguais às seções transversais correspondentes do outro sólido, quando tomadas paralelamente a uma base fixa. Essencialmente, é uma maneira de relacionar a geometria das seções transversais de sólidos para deduzir ou comparar seus volumes de forma intuitiva e eficaz.

Tratando-se de área, considere os sólidos representados da **Figura 3** (S_1 e S_2) e que estes sejam cortados por um plano paralelo a α (o plano paralelo chamaremos aqui de plano β), formando duas seções. Sendo o plano α paralelo ao plano β , a seção determinada pelo plano α no prisma será sempre igual à base, e por isso essa seção e a base terão sempre áreas iguais ($A_1 = A_2$).

Ainda na **Figura 3**, é possível observar dois prismas com estruturas diferentes, porém com alturas iguais. O primeiro é um prisma de base quadrada, enquanto o segundo apresenta uma base pentagonal. Ao realizar o corte desses sólidos com o plano α , observa-se que eles geram áreas de diferentes formas. Contudo, conforme o Princípio de Cavalieri, se essas áreas sempre mantiverem a mesma configuração, então o volume desses sólidos também será idêntico, logo o volume do sólido A será igual ao volume do sólido B.

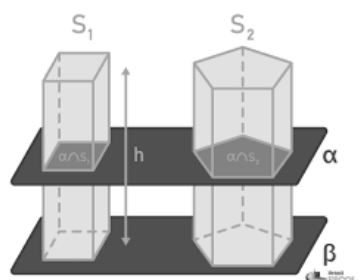


FIGURA 3: Prisma seccionado por um plano paralelo a sua base.

FONTE: OLIVEIRA,2024

2-Percurso Metodológico

O estudo foi pautado na pesquisa qualitativa em educação, que permite a interpretação dos dados, a descrição dos participantes e dos espaços onde a pesquisa se realiza. Autores como Bogdan e Biklen (1994) e Ludke e André (1986) destacam que a pesquisa qualitativa foca em analisar a qualidade e a intensidade da complexidade do estudo, destacando a descrição dos fenômenos através dos significados manifestados no ambiente.

A pesquisa foi realizada na Escola Promove, da rede particular de ensino, com alunos da 3ª série do Ensino Médio, localizada em Bom Jesus da Lapa, no estado da Bahia. A escolha da escola foi motivada por dois fatores: a pesquisadora atua como professora dessa turma e, com 21 alunos matriculados, é possível realizar um trabalho no qual todos podem participar e dialogar sobre o tema. O estudo de geometria e a teoria de Van Hiele foram abordados metodologicamente para ensinar o Princípio de Cavalieri na 3ª série do Ensino Médio.

Nessa perspectiva, o movimento da pesquisa enquanto da própria prática, também conhecida como pesquisa-ação, tem como principal característica a participação ativa do pesquisador. Significa dizer que não há uma dissociação entre ensino e produção de saberes. Assim, o professor pesquisador ao mesmo tempo que ensina, ele pesquisa e vice-versa, tornando-se um movimento cíclico que retroalimenta. No entendimento dos autores Thiollent (2011), Franco (2005) e Tripp (2005), a pesquisa-ação além de sinalizar aos sujeitos da pesquisa os meios para resolverem os problemas, também facilita a procura de soluções de problemas das suas vivências diárias. Os autores supracitados enfatizam que esse tipo de pesquisa leva a uma aprendizagem de via dupla. Deve ter bem presente que o processo ensino-aprendizagem é um vetor de processo crítico e questionador.

Assim, a pesquisa estruturou-se por meio de oficinas, com atividades orientadas, motivacionais e diálogos espontâneos voltados ao conteúdo do cálculo de volume em sólidos geométricos, utilizando recursos tecnológicos e material concreto para a compreensão, construção e resolução de problemas, e desenvolvimento de ações investigativas. Toda ação está inspirada no modelo do pensamento geométrico de Van Hiele, para a verificar o nível de



raciocínio geométrico que os alunos da 3ª série do Ensino Médio estão e se houve uma evolução entre os níveis.

A atividade 1, intitulada “Roda de Conversa: Apresentação de Figuras Geométricas”, refere-se ao nível 1 do modelo de Van Hiele. Este nível é caracterizado pela capacidade de identificar, comparar e nomear figuras geométricas. Nesta atividade, foram utilizadas fotografias de construções contemporâneas e monumentos do contexto sociocultural dos alunos, como a Torre da Igreja e a Praça da Catedral, ambas localizadas na cidade de Bom Jesus da Lapa-Bahia. Através dessas imagens, buscou-se verificar as habilidades dos alunos em alguns aspectos, são eles: Identificar figuras geométricas presentes nas fotografias, comparar diferentes figuras geométricas observadas e nomear corretamente as figuras geométricas identificadas.

A atividade 2, intitulada conceito dos sólidos geométricos, enquadra-se no segundo nível da teoria de Van Hiele, que enfatiza respostas específicas e objetivas. Este nível consiste em definir os sólidos geométricos com base em suas propriedades e características comuns. Assim, foi realizada uma dinâmica de grupo onde os alunos foram questionados sobre as semelhanças e diferenças entre as formas escolhidas, além de conceituarem os sólidos geométricos. Os resultados foram socializados por meio da apresentação de um painel integrado.

Já na terceira e última atividade, identificada como construção e dedução, foi realizada a confecção dos sólidos geométricos (prisma, cone, cilindro e pirâmide) e posteriormente o cálculo da respectivas áreas e volumes, tendo como intuito explorar o Princípio de Cavalieri e as relações entre as fórmulas dos Sólidos Geométricos. Essa etapa teve como objetivo avaliar habilidades correspondentes ao nível 3 da teoria de Van Hiele, com foco na aprendizagem dedutiva. A abordagem incluiu a demonstração do Princípio de Cavalieri e o uso das fórmulas para calcular a área e o volume das figuras escolhidas pelos alunos nos estágios iniciais.

Compreendendo as três atividades descritas anteriormente, a sala foi dividida em três grupos para a realização da dinâmica. No **Quadro 3** podemos observar um resumo da dinâmica do estudo, onde estão sendo contemplados os objetivos, materiais e procedimentos de cada uma das três equipes.

Quadro 3- Dinâmica da pesquisa contemplando os objetivos, materiais e procedimentos por cada uma das três equipes.

Grupos	Objetivos	Materiais	Procedimentos
Grupo 1: Cálculo do volume do prisma.	Demonstrar a relação $V = Ab \cdot h$. Onde:	1. Papel com gramatura 180g/m ² ; 2. Cola; 3. Tesoura; 4. Régua;	1. Construir um prisma com base e altura que o grupo desejar; 2. Medir o comprimento, largura e profundidade do prisma;

	<p>V – Volume; Ab: Área da base h: altura</p>	<ol style="list-style-type: none"> 5. Esquadro; 6. Fita métrica; 7. Copo graduado; 8. farinha. 	<ol style="list-style-type: none"> 3. Realizar o cálculo do volume usando a fórmula proposta; 4. Preencher o prisma construído até a borda com a farinha; 5. Transferir a farinha para o copo graduado (com isso o estudante pode observar, através da graduação do copo, a quantidade de farinha que necessária para encher o prisma); 6. Realizar a comparação entre os itens 4 e 5.
Grupo 2: Cálculo do volume do cone /pirâmide	<p>Demonstrar a relação do volume de uma pirâmide em relação ao cone</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Papel com gramatura 180g/m²; 2. Cola; 3. Tesoura; 4. Régua; 5. Esquadro; 6. Fita métrica; 7. Copo graduado; 8. Farinha. 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Construir uma pirâmide e um cone, sendo que a equipe definirá a base e a altura dos mesmos; 2. Medir as dimensões da pirâmide e do cone construído; 3. Realizar o cálculo do volume utilizando a fórmula proposta; 4. Preencher o cone construído até a borda com a farinha; 5. Despejar a farinha no copo e fazer a comparação dos itens 3 e 5; 6. Fazer um relatório descrevendo as etapas realizadas.
Grupo 03: Cálculo do volume dos sólidos redondos	<p>Demonstrar o Princípio de Cavalieri nos sólidos redondos. Comprovar que é necessário utilizar 3 medidas do volume do cone</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Papel cartão; 2. Cola; 3. Tesoura; 4. Fita adesiva; 5. Uma bola de isopor com 20 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Construir um cone, esfera e o cilindro com base e altura que o grupo preferir; 2. Medir as dimensões dos sólidos construídos; 3. Realizar o cálculo do volume utilizando a fórmula proposta; 4. Preencher os sólidos construídos até a borda com farinha;



	para preencher o cilindro. Demonstrar que a quantidade de água que enche dois cones preenche completamente o espaço de uma semiesfera.	cm de diâmetro; 6. Régua; 7. Lápis.	5. Despejar a farinha no copo e fazer a comparação entre os itens 3 e 5.
--	---	---	--

Fonte: Elaborada pela autora, 2024.

As atividades e oficinas foram planejadas para desenvolver habilidades e competências dos alunos em cada nível do modelo proposto pela teoria de Van Hiele, alinhadas às fases de aprendizagem. Conforme Nasser (2010), os alunos não necessariamente estarão no mesmo nível de pensamento geométrico, portanto, a intervenção do professor é crucial quando necessário. Esse diálogo promove um processo de ensino e aprendizagem compartilhado, evitando disparidades de aprendizado dentro da mesma turma.

Nesta direção, é fundamental destacar que esse tipo de trabalho contribui significativamente para o desenvolvimento da prática profissional docente. Ele proporcionou indicativos de ações bem-sucedidas baseadas na apropriação teórica, capacitando o professor a adotar uma abordagem educativa que vai além da descrição superficial dos objetos matemáticos. Assim, ao invés de valorizar apenas o conhecimento empírico, é necessário orientar o ensino em direção ao núcleo do conhecimento.

3 Resultados e discussões

O ensino de maneira eficaz e eficiente do cálculo do volume e de área dos sólidos geométricos tem uma importância significativa para a vida do estudante. Tendo o aprendizado consolidado, este conteúdo contribuirá para o discente em diversas formas, podendo colaborar para o desenvolvimento do raciocínio espacial, aplicações práticas, fundamentação de estudos avançados, preparação para a vida cotidiana, dentre outros aspectos.

Neste sentido, para compreender os resultados desta pesquisa, tivemos a sequência didática apresentada a seguir. No início da aula, foi desenvolvida a atividade 01 (conforme descrita na metodologia), onde a turma recebeu uma série de perguntas com o objetivo de motivar os estudantes. Essas questões foram discutidas em uma roda de conversa, que não apenas buscou avaliar o entendimento dos alunos em relação à visualização de sólidos geométricos, mas também proporcionou uma oportunidade para fortalecer suas habilidades de reconhecimento e descrição desses objetos.

Verificou-se que 85% dos discentes entendem o que são sólidos tridimensionais, porém outros tiveram certa dificuldade na execução da atividade. Nesse sentido, foi necessário intermediar, mostrando a importância do conteúdo pela sua incalculável aplicação. É preciso lembrar que o conhecimento prévio nem sempre é o que o aluno já sabe daquele determinado assunto. Fonseca (2012) discorre que o conhecimento matemático só será absorvido pelo aluno se estiver entrelaçado às suas vivências. Concordando com o autor, numa abordagem prática e visual, os alunos podem desenvolver uma compreensão sólida da geometria espacial e suas aplicações.

Durante uma visita aos pontos turísticos da cidade de Bom Jesus da Lapa, quando solicitado que identificassem ao seu redor objetos nas formas geométricas, os estudantes citaram de forma assertiva conforme a **Figura 4**. Conseguiram definir o que é geometria espacial, além de reconhecer as figuras geométricas encontradas no seu cotidiano.

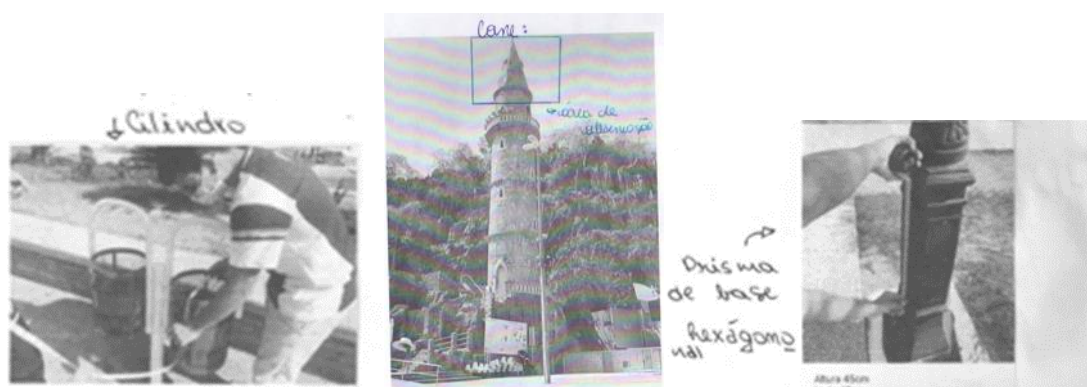


FIGURA 4: Registro dos sólidos geométricos dos pontos turísticos de Bom Jesus da Lapa-Ba.

FONTE: Dados da pesquisa de campo (2024)

Na turma, por ser heterogênea, os discentes encontram-se em diferentes níveis de compreensão em relação ao pensamento geométrico descrito pela Teoria de Van Hiele. O fato de estarem na mesma turma não significa que eles estão no mesmo grau de conhecimento geométrico.

A aplicação da atividade 2, que consiste em conceituar sólidos geométricos com base em suas propriedades e características comuns, permitiu uma reflexão sobre as facilidades e dificuldades encontradas pelos alunos, além dos desafios que eles conseguiram superar.

Na realização da atividade 2, os alunos frequentemente perguntavam como responder, mostrando desconforto e necessitando da intervenção da professora para entender que deveriam discutir entre si e pesquisar no livro didático para chegar às próprias conclusões. O objetivo era não só obter a resposta, mas também argumentá-la. As respostas foram rígidas e justificadas apenas por fórmulas. Após analisar a atividade, o professor promoveu uma nova discussão utilizando sólidos geométricos para explorar todas as semelhanças e diferenças.

Na sequência praticamos ações correspondentes ao nível 3 da teoria de Van Hiele. Nessa fase, as atividades foram direcionadas para que os alunos desenvolvessem uma aprendizagem dedutiva. A abordagem focou na demonstração do Princípio de Cavalieri e nas relações entre as fórmulas dos sólidos geométricos para calcular a área e o volume das figuras escolhidas nos primeiros níveis, utilizando material concreto.

A construção dos sólidos geométricos a partir das planificações das figuras escolhidas nas fases anteriores envolveu o relato de experiência de cada aluno. Cada um apresentou seus slides utilizando um projetor multimídia para contribuir com suas próprias reflexões sobre o objeto de estudo, numa proposta de aprendizagem colaborativa.

GRUPO 1



GRUPO 2



GRUPO 3



FIGURA 5: Registro da planificação dos sólidos geométricos.

FONTE: Elaborado pela autora (2024).

Nesta etapa, a professora percebeu que o grupo 2 enfrentou dificuldades na planificação das figuras geométricas (**Figura 5**), especialmente porque nunca haviam trabalhado com desenho geométrico. Assim, foi necessária uma intervenção para ajudá-los a superar essa barreira. Para tanto, foram entregues várias caixas contendo múltiplas formas (conforme a **Figura 6**), que foram abertas para observação das planificações. Após discussões e questionamentos, os alunos receberam folhas sulfite com planificações de sólidos para montagem.



FIGURA 6: Registro dos Sólidos Geométricos
FONTE: Dados da pesquisa de campo (2024)

Após manipularem os sólidos e discutirem entre si, os alunos conseguiram realizar a atividade de planificação sem maiores dificuldades. Segundo Skovsmose (2014, p. 54), "Processos de interação e comunicação desempenham um papel muito mais relevante em processos de pesquisa do que nos processos presentes no paradigma do exercício", assim, nesse contexto, o professor ao interagir com os alunos pode estimular investigações e pesquisas, considerando a intenção dos estudantes para promover um processo construtivista de aprendizagem.

Depois das intervenções realizadas, ficou evidente que os alunos estavam no mesmo nível de aprendizagem, participando ativamente e contribuindo com suas opiniões, algo que não ocorria nas aulas anteriores. Os grupos foram formados com base em interesses comuns e cada um ficou responsável por atividades específicas: o grupo que apresentava maior dificuldade foi auxiliado pelos colegas, que se mostraram muito prestativos e superaram as expectativas. Com isso, os alunos estavam preparados para progredir para o terceiro nível de aprendizagem.

O grupo 1 mostrou que tem as competências e habilidades no desenvolvimento dos procedimentos do **Quadro 3**, envolvendo o cálculo do volume de prismas retos, permitindo que a investigação, a escolha de estratégias, a argumentação no momento de troca com seus pares e a sistematização do conceito na resolução da atividade (**Figura 7**).

Atividade 1: prismas -
• comprimento - 6 cm
• largura - 6 cm
• profundidade - 10 cm
• volume - 360, visto que multiplicamos $6 \times 6 \times 10$
• capacidade - levando em consideração o cálculo do volume, após colocarmos pedrinhas no prisma e despejarmos em um copo de medição, constatamos que capacidade em ml foi igual ao volume (cm³)



FIGURA 7: Registro do cálculo do volume do prisma reto
FONTE: Dados da pesquisa de campo (2024)

Na atividade do cálculo do volume do cone e da pirâmide, verificou-se que o grupo 2 apresentou dificuldade em discorrer sobre o Princípio de Cavalieri. A professora teve que intervir, chamando os alunos para refletir sobre as classificações feitas nas atividades anteriores e promovendo uma discussão preparando-os para a transição ao nível 3 do modelo dos autores trabalhados. Segundo Andrade e Nacarato (2004), é no processo de diálogo com argumentos que docentes e discentes constroem conhecimento simultaneamente. Após a intervenção investigativa, os alunos chegaram a uma compreensão sistematizada do Princípio de Cavalieri.

Conforme a **Figura 8**, nos registros dos estudantes, podemos observar que eles compreenderam o Princípio de Cavalieri.

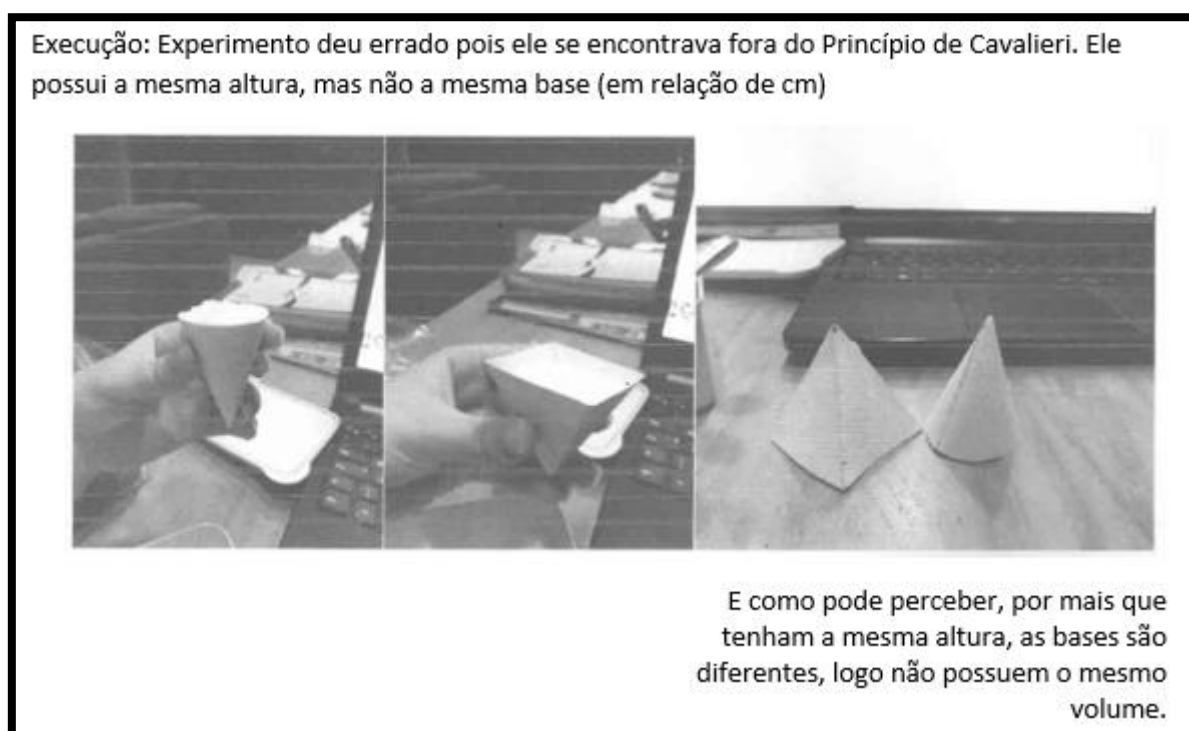


FIGURA 8: Registro do volume do cone/pirâmide

FONTE: Dados da pesquisa de campo (2024)

O registro do grupo 2 trouxe uma reflexão interessante, mostrando que os discentes têm interpretações individuais sobre cada sólido geométrico. Cabe ao professor fazer a conexão entre o conhecimento empírico e acadêmico.

Passando para o grupo 3, tem-se que as anotações desta equipe sobre o cálculo do volume dos sólidos redondos estão relacionados ao estudo matemático que abrange a determinação do volume de formas dos cilindros e cones. Este tema é essencial tanto na matemática básica quanto em aplicações mais avançadas, incluindo o uso de fórmulas volumétricas para aplicações práticas em outras áreas do conhecimento.

O grupo alcançou os objetivos estabelecidos e realizou os procedimentos 3 e 5 da atividade: calcular o volume usando a fórmula proposta e preencher os sólidos construídos até a borda com farinha. O experimento apresentado na **Figura 9** confirmou o Princípio de Cavalieri, onde afirma que sólidos com a mesma altura e seções transversais idênticas têm volumes iguais. Isso significa que, se um cilindro e um cone têm a mesma altura e suas seções transversais são iguais em cada altura, então os volumes desses sólidos serão iguais. Essa propriedade é útil para comparar volumes de sólidos geométricos, mesmo que suas formas externas sejam diferentes.

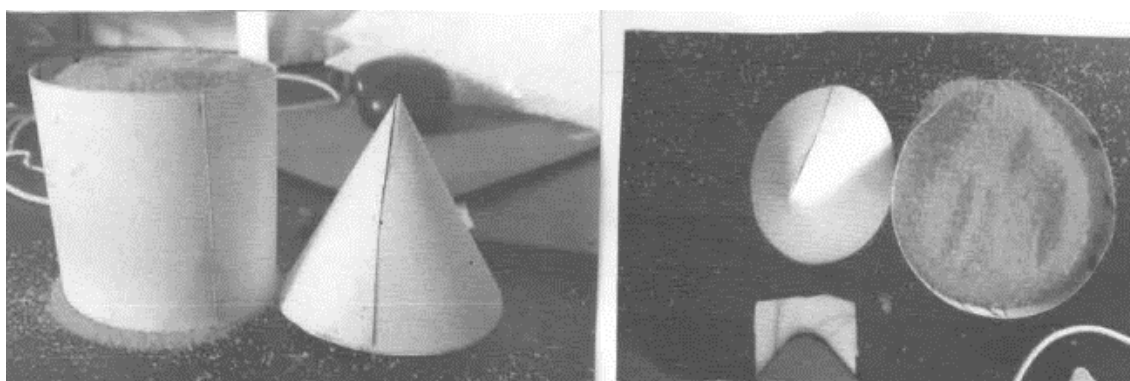


FIGURA 9 – Registro do cálculo do volume dos sólidos redondos

FONTE: Dados da pesquisa de campo, 2022

Verificou-se que os alunos conseguiram demonstrar um conhecimento sistematizado e intuitivo conforme ilustrado na **Figura 9**. Nesta fase, os alunos compreendem as relações entre as propriedades dos sólidos geométricos e as utilizam para resolver problemas tanto de forma acadêmica quanto intuitiva.

- Nesse experimento, usamos um cilindro e um cone com mesma base e mesma altura. Usando o princípio de Cavalieri

<p>Cilindro</p> $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ $V = \pi \cdot 3^2 \cdot 4$ $V = 3 \cdot 36$ $V = 108 \text{ cm}$	<p>Cone</p> $\pi \cdot r^2 \cdot h$ $\pi \cdot 3^2 \cdot 4$ $\pi = 36$ $3 \cdot 36 = \frac{108}{3} = 36$
---	--

FIGURA 10: Registro do cálculo do volume do cilindro e do cone

FONTE: Dados da pesquisa de campo (2024)



Depois da realização das oficinas para a percepção do Nível 3 de Van Hiele, podemos destacar que a prática oportunizou aos discentes não apenas a aprendizagem do conteúdo proposto da Matemática, mas também de conectá-las com aspectos do cotidiano fornecendo mais significado às aprendizagens escolares e os preparando para a vida adulta, conforme orientam os documentos normativos da BNCC. Verificamos também, que apesar de alguns erros de construção e equívocos que puderam ser corrigidos durante a atividade, os alunos conseguiram alcançar os objetivos conforme já se era esperado.

Considerações finais

A pesquisa teve como objetivo investigar como os alunos aprendem sólidos geométricos usando o Princípio de Cavalieri, inspirado na teoria do desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele. O estudo, ancorado nos níveis de Van Hiele, orienta os professores a compreender o nível de entendimento dos alunos. As atividades e oficinas propostas visaram desenvolver o raciocínio, estimular conjecturas, promover a capacidade de abstração e resolver problemas práticos do dia a dia. Esse contexto permite aos alunos perceber que é viável integrar teoria e prática.

No tocante a utilização do material concreto, e fazendo um elo entre o modelo dos autores e o princípio de Cavalieri para o ensino da Geometria Espacial, podemos afirmar que houve êxito nas aulas, pois a proposta da construção dos sólidos serviu como uma estratégia para verificar se os alunos conseguiram ter a compreensão do conteúdo e se estavam habilitados a passar de fase em relação à proposta do modelo de Van Hiele.

Ao propor a investigação matemática como uma ferramenta para o aprendizado de sólidos geométricos, reforça a ideia de que a forma, ou a proposta de ensino a que o professor se propõe contribui para o processo da aprendizagem. O objetivo é proporcionar aos alunos um desenvolvimento mais eficaz e eficiente na aprendizagem dos conhecimentos matemáticos.

Assim sendo, alcançamos o objetivo de nossa pesquisa, através da comprovação que a teoria de Van Hiele nos estudos dos sólidos geométricos em consonância com o Princípio de Cavalieri é um caminho possível para a construção de um conhecimento significativo.

Esperamos, assim, que esse trabalho tenha mostrado uma possibilidade para contribuir de alguma forma à aprendizagem da matemática e que o mesmo possa servir de inspiração para outros professores.

5-REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRADE, J. A. A.; NACARATO, A. M. Tendências didático-pedagógicas para o ensino de geometria. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 27., 2004, Caxambu. Anais... Caxambu: ANPED, 2004.

BECKER, M.H. OBA, Análise de aprendizagem no ensino de geometria espacial. Monografia do curso de Matemática da UFRGS, Porto Alegre, 2009



BOGDAN, Roberto C.; BIKLEN, Sari Knopp. Investigação qualitativa em educação. Tradução Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

BRASIL, Ministério da Educação. (2017). Base Nacional Comum Curricular. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wpcontent/uploads/2018/06/BNCC_Ensino_Medio_embaixa_site_110518.pdf.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental, Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

DAMBRÓSIO, Ubiratan. Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática. São Paulo, Summus, 1986.

DOBARRO, V. R.; BRITO, M. R. F. Um estudo sobre habilidade matemática na solução de problemas de geometria. Revista de Ensino de Ciências e Matemática, São Paulo, v.1, n.1, p.34-46, 2010.

DOLCE, Osvaldo. Fundamentos da Matemática elementar, 10: geometria espacial. 6. Ed. São Paulo: Atual, 2005.

FRANCO, Maria Amélia Santoro Educação e Pesquisa, São Paulo, v. 31, n. 3, p. 483-502, set./dez. 2005

FIGUEIRA, C. Visualização da Geometria nos primeiros anos escolares. Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1ºs e 2ºs ciclos. Lisboa. Junho de 2007. Acesso em: 25 Abril 2024. Disponível em: <http://www.ime.usp.br/~iole/visualiza%E7%E3o%20e%20Geometria.pdf>.

GUIMARÃES, B. A. A.; SANTOS, W. L. S. A problemática no ensino da geometria. Maiêutica – Curso de Matemática. UNIASSELVI – Prática do Módulo IV, 2013.

LIMA, E. L. Medida e Forma em Geometria. 4a. ed. SBM Sociedade Brasileira de Matemática. 2009.

LORENZATO, S. Porque não ensinar Geometria? Educação Matemática em Revista. v.3, n. 4, p. 3-13, 1995.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? In: A Educação Matemática em Revista, Ano III, n. 4, 1º semestre, Blumenau, SBEM, 1995.

LORENZATO, S. Para Aprender Matemática. 3. ed. Campinas, SP: Autores associados, 2010.



LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, S. Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores. Campinas: Autores Associados, 2006.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. Pesquisa em educação: abordagens qualitativas. São Paulo-SP: EPU, 1986.

MICOTTI, Maria Cecília de Oliveira. O ensino e as propostas pedagógicas. In: PAVANELLO, REGINA Maria, Formação de Possibilidades Cognitivas em noções geométricas. Tese de Doutorado. Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP. 1995.

NASSER, L.; LOPES, M. L. M. L. Geometria na era da imagem e do movimento. Rio de Janeiro, RJ: UFRJ, 1996. Citado 6 vezes nas páginas 19, 21, 27, 28, 44 e 75.

NASSER, L.; SANT'ANNA, N. F. P. Geometria Segundo a Teoria de Van Hiele. 2. ed. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2010.

PASSOS, C.M.B. Representações, interpretações e prática pedagógica: Geometria na sala de aula. Tese de doutorado (Universidade Estadual de Campinas– (Faculdade de educação). 2000.

PAVANELLO, Regina Maria. Formação de Possibilidades Cognitivas em noções Geométricas. Tese de doutorado. Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP. 1995

_____. O abandono do Ensino de Geometria: uma visão histórica. 1989. 196 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual Paulista, Campinas, 1989.

_____. Porque ensinar/aprender geometria? In: ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO Iremos partir das duas primeiras Competências Gerais da Educação Básica: digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. "Princípio de Cavalieri"; Brasil Escola. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/principio-cavalieri.htm>. Acesso em 03 de julho de 2024.

SOARES, E.M.S. Formalização e intuição no contexto do conhecimento, do ensino e da atuação social. Zetetiké, v.3, n.3, p.63-70, 1995

SKOVSMOSE, O. Educação matemática crítica: a questão da democracia. Campinas, SP: Papirus, 2001 (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

SKOVSMOSE, O. Um convite à educação matemática crítica. Campinas, SP: Papirus, 2014.

STRAUSS, A.; CORBIN, J. Pesquisa qualitativa: técnicas e procedimentos para o desenvolvimento da teoria fundamentada. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2008. p 287.



THIOLLENT, Michel. Metodologia da pesquisa-ação. 18. ed. São Paulo: Cortez, 2011

TRIPP, David. Educação e Pesquisa, São Paulo, v. 31, n. 3, p. 443-466, set./dez. 2005

VILLIERS, M. Algumas reflexões sobre a Teoria de Van Hiele. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.12, n.3, p. 400-431, 2010.