



Jogo dos discos na aprendizagem: uma experimentação de trajetória hipotética em probabilidade

Disk game in learning: a hypothetical trajectory experiment in probability

WANDERSON DA SILVA MACIEL¹

JOSÉ AUGUSTO REIS CAMPOS DOS SANTOS²

RESUMO

A Educação Matemática tem por objetivo mostrar caminhos para uma melhor compreensão de temas e conteúdos que usamos no dia a dia, mas que por várias ocasiões, seja teórico ou prático, não conseguimos contextualizar, bem como a dificuldade do professor de Matemática em trabalhar com sua classe as ideias de probabilidade no cotidiano. Sendo assim, o presente artigo propõe-se a descrever uma aula experimental realizada com alunos da 1ª série do Ensino Médio do Colégio Adventista de Luís Eduardo Magalhães, utilizando a temática do “Jogo dos Discos”, explorada no decorrer do curso de Especialização em Matemática: Matem@tica na Pr@tica, a partir da visão das probabilidades, para definir caminhos, investigar possíveis consequências e avaliar outras usabilidades. Tal proposta é pensada a partir do modelo de investigação matemática e da aprendizagem significativa. Ao final, nossos alunos puderam enfim perceber que a probabilidade segue lado a lado com cada cidadão, e, que consequências podem surgir, a partir de suas escolhas.

Palavras-chave: *Investigação Matemática. Educação Matemática. Probabilidades.*

ABSTRACT

The aim of Mathematics Education is to show ways of better understanding topics and content that we use on a daily basis, but which on many occasions, whether theoretical or practical, we are unable to contextualize, as well as the difficulty mathematics teachers have in working with their classes on the ideas of probability in everyday life. Therefore, this article aims to describe an experimental lesson carried out with students from the 1st grade of secondary school at the Colégio Adventista de Luís Eduardo Magalhães, using the theme of the “Disc Game”, explored during the course of the Specialization in Mathematics: Matem@tica na Pr@tica, from the point of view of probabilities, to define paths, investigate possible consequences and evaluate other uses. This proposal is based on the model of mathematical investigation and meaningful learning. In the end, our students were able to realize that probability goes hand in hand with every citizen, and that consequences can arise from their choices.

Keywords: *Mathematics Education. Mathematical Research. Probability.*

¹ IFBA – wanderson.itacaramby@gmail.com

² IFBA - augustoreicampos@gmail.com



INTRODUÇÃO

Os jogos estão, constantemente, presentes no nosso dia a dia, pois, desde criança, participamos de jogos inocentes, tais como pique-esconde, queimada, bolinhas de gude dentre outros. Assim, à medida que crescemos outros jogos nos acompanham, quer sejam eles físicos, como Banco Imobiliário, Jogo da Vida, Uno, Baralho, Detetive, quer sejam digitais, pelo uso de celulares, *notebooks*, computadores de mesa, dentre outros. Nesta perspectiva, Grandó (2000) coloca que:

[...] os jogos, as brincadeiras, enfim, as atividades lúdicas, exercem um papel fundamental para o desenvolvimento cognitivo, afetivo, social e moral das crianças, representando um momento que necessita ser valorizado nas atividades infantis. (GRANDO, 2000, p.3)

No âmbito do ensino, especificamente de Matemática, os jogos são ferramentas para que o aluno tenha uma melhor compreensão acerca do tema a ser estudado, bem como, contribui no desenvolvimento das competências e habilidades necessárias. Desse modo, os PCN (1998, *apud* Albuquerque, 2010), citam que os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois, permitem que, estes, sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de táticas de resolução e na busca de soluções. Sendo assim, jogos propiciam a simulação de situações-problema que exigem soluções imediatas, “o que estimulam o planejamento das ações, e, possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente, e, podem ser corrigidas de forma natural no decorrer da ação sem deixar marcas negativas”. (BRASIL, 1998, p. 47).

Sob essa ótica é importante apontar que, ao mesmo tempo em que o aluno pratica o jogo imaginando que seja apenas um momento de reflexão, ele necessita compreender todo o contexto por trás de tal atividade. Assim, é neste momento em que o professor, como mediador, precisa estimular a descoberta e o raciocínio-lógico, bem como determinar os caminhos para que tal atividade lúdica tenha êxito. Nesta perspectiva, este trabalho pretende assim apresentar um modelo de trajetória hipotética de aprendizagem, voltada para o ensino de probabilidade, que nada mais é que a concepção de um modelo “ideal” de aula, proposto em seu plano e a comparação ao término dela, a partir do uso do Jogo dos Discos, apresentado inicialmente por Paterlini e Caetano (2010). Ademais também se propõe a trazer seus resultados, fazendo um comparativo entre o que foi, previamente, planejado pelo docente, e, a trajetória de



aprendizagem desenvolvida pelo aluno durante a atividade, aqui adaptada para as turmas de 1ª Série do Ensino Médio.

BREVE RESUMO HISTÓRICO DA PROBABILIDADE

A probabilidade surgiu diante da necessidade do homem em estudar os fenômenos que envolviam as possibilidades. Embora não saibamos qual o resultado que irá ocorrer num experimento, em geral conseguimos descrever o conjunto de todos os resultados possíveis que podem ocorrer diante dos experimentos aleatórios, como por exemplo lançar uma moeda e observar sua face, lançar um dado e observar o número da face de cima ou até escolher a carta certa num baralho contendo 52. As variações de resultados, de experimento para experimento, são devidas a uma multiplicidade de causas que não podemos controlar, as quais denominamos “acaso”.

Quando calculamos a probabilidade, estamos associando um grau de confiança à ocorrência dos resultados possíveis de experimentos, cujos resultados não podem ser determinados antecipadamente. Assim, a probabilidade é a medida da chance de algo acontecer. O cálculo da probabilidade associa a ocorrência de um resultado a um valor que varia de 0 a 1 e, quanto mais próximo de 1 estiver o resultado, maior é a certeza da sua ocorrência.

Em um fenômeno aleatório, as possibilidades de ocorrência de um evento são igualmente prováveis, assim, podemos encontrar a probabilidade de ocorrer um determinado resultado através da divisão entre o número de eventos favoráveis e o número total de resultados possíveis:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$

Sendo:

P(A): probabilidade da ocorrência de um evento A.

n(A): número de casos favoráveis ou, que nos interessam (evento A).

n(Ω): número total de casos possíveis, que também podemos chamar de espaço amostral.

O resultado calculado também é conhecido como probabilidade teórica.

Para expressar a probabilidade na forma de porcentagem, basta multiplicar o resultado por 100.



Para um mesmo experimento podemos definir muitos eventos e calcular a probabilidade que ocorram. Há alguns tipos especiais de eventos.

Evento certo: O conjunto do evento é igual ao espaço amostral, ou seja, possuem os mesmos elementos, como no caso de uma delegação feminina de atletas, uma ser sorteada ao acaso e ser mulher. Como a probabilidade é de 100%, o evento é certo.

Evento impossível: O conjunto do evento é vazio. Imagine que temos uma caixa com bolas numeradas de 1 a 20 e que todas as bolas são vermelhas. O evento "tirar um número maior que 30" é impossível, visto que o maior número na caixa é 20.

Evento complementar: Os conjuntos de dois eventos formam todo o espaço amostral, sendo um evento complementar ao outro, como no clássico experimento de lançar uma moeda. Aqui, o espaço amostral é $\Omega = \{\text{cara, coroa}\}$.

Seja o evento A sair cara, $A = \{\text{cara}\}$, o evento B sair coroa é complementar ao evento A, pois, $B = \{\text{coroa}\}$. Juntos formam o próprio espaço amostral.

Evento mutuamente exclusivo: Os conjuntos dos eventos não possuem elementos em comum. A intersecção entre os dois conjuntos é vazia.

Seja o experimento lançar um dado, os seguintes eventos são mutuamente exclusivos

A: ocorrer um número menor que 5, $A = \{1, 2, 3, 4\}$

B: ocorrer um número maior que 5, $A = \{6\}$

Há indícios de que tais estudos começam a ser desenvolvidos no período da Idade Média, a fim de se compreender o que estava por trás dos chamados “jogos de azar”, que se popularizavam na época. Desta maneira, a probabilidade também se tornou bastante útil na compreensão de fenômenos ocorridos ao “acaso”, e, muitos matemáticos contribuíram para a formação de tal conteúdo, no desenvolvimento das teorias, e, nos avanços dos cálculos probabilísticos. Desse modo, são atribuídas aos algebristas italianos Pacioli, Cardano e Tartaglia (séc. XVI), as primeiras considerações matemáticas acerca dos jogos e das apostas. Através de estudos aprofundados, outros matemáticos contribuíram para a sintetização de uma ferramenta muito utilizada cotidianamente, dentre os mais importantes, pode-se citar: Blaise Pascal (1623 - 1662), Pierre de Fermat (1601 - 1655), Jacob Bernoulli (1654 - 1705), Pierre Simon Laplace (1749 - 1827), Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) e Lenis Poisson (1781 - 1840).



As situações relacionando apostas no jogo de dados levantaram diversas hipóteses envolvendo possíveis resultados, marcando o início da teoria das probabilidades como ciências. Diante deste cenário é importante ressaltar que os alicerces da teoria do cálculo das probabilidades e da análise combinatória foram estabelecidos por Pascal e Fermat. As contribuições de Bernoulli enfatizaram os grandes números, abordando as combinações, permutações e a classificação binomial, Laplace formulou a regra de sucessão e Gauss, por sua vez, estabelecia o método dos mínimos quadrados e a lei das distribuições das probabilidades.

Atualmente, os estudos relacionados às probabilidades são utilizados em diversas situações, pois possuem axiomas, teoremas e definições bem contundentes. Deste modo sua principal aplicação diz respeito ao estudo da equidade dos jogos e dos respectivos prêmios, sendo sua principal aplicação destinada à Estatística Indutiva, na acepção de amostra, extensão dos resultados à população e na previsão de acontecimentos futuros.

O ACASO E OS JOGOS

São considerados jogos de azar, jogos nos quais a possibilidade de ganhar ou perder, não dependem da habilidade do jogador, mas sim do “acaso”. O “acaso” foi definido por Viali (2008, p. 144) como “[...] um conjunto de forças, em geral, não determinadas ou controladas, que exercem, individualmente, ou, coletivamente, papel preponderante na ocorrência de diferentes resultados de um experimento ou fenômeno”. Ao nomear os jogos como jogos de azar, não se pretende associar o jogo a “má sorte”, mas sim dizer, que o resultado dos jogos é fruto do “acaso”.

Segundo Coutinho (2007), os povos da Mesopotâmia e do Egito antigo ligavam o acaso à vontade dos deuses ou a outros fenômenos sobrenaturais. No entanto, alguns matemáticos procuraram compreender e definir o acaso, mas, o entendimento de que o acaso é um fenômeno natural só ocorreu depois de um longo tempo. Segundo Viali (2008, *apud* Ricardo 2016), um dos primeiros jogos que influenciaram o estudo da probabilidade foi o Tali, que era praticado com o astrágalo, um osso do calcânhar de um animal, semelhante a um tetraedro irregular, cujas faces não eram idênticas e possuía os lados côncavos, convexos, planos e sinuosos.

Cada lado era numerado com valores diferentes: os maiores recebiam o 3 e o 4, e os demais 1 e 6, enquanto os números 2 e 5 não eram utilizados. A Figura 1, abaixo apresentada, é um exemplo de astrágalo, considerado o antecessor do dado.

Figura 1 - Astrágalos e dados



Fonte: shutterstock.com (2022)

TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM, PROBABILIDADE E SUAS RELAÇÕES

A probabilidade é um, entre os mais variados tópicos da Matemática, que podem ser abordados, através do uso de jogos. Este relevante tema do ensino médio, que começa a ser abordado no Ensino Fundamental II merece uma atenção especial, principalmente, por estarmos inseridos em um mundo no qual somos, literalmente, bombardeados por informações, gráficos e tabelas cujas análises permitem e norteiam a tomada de decisões importantes. Nesse contexto, a probabilidade se torna um elemento forte e essencial à formação do jovem. Sob essa ótica, Bernardes (1987) destaca:

E o ensino de Matemática se deve ocupar mais de uma forma de pensar do que de uma forma de escrever fórmulas ou numerais, se o ensino da Matemática se deve ocupar mais da tomada consciente de decisões do que do estrito cálculo, então a teoria das probabilidades é fundamental. (Bernardes, 1987, p.13)

Diante disto, é importante destacar que o professor de Matemática precisa assim compreender que, mais importante que ensinar o conteúdo, é buscar os meios necessários para que o aluno desenvolva o senso crítico, e que seja capaz de manipular e trabalhar com informações, de acordo com as suas precisões diárias. No entanto para que isto ocorra, é necessário que o docente esteja bem preparado e tenha ao seu alcance todos os recursos



disponíveis, criando assim um ambiente que proporcione todas as questões favoráveis, tanto para o desenvolvimento do docente, quanto para dos discentes.

É importante salientar que a probabilidade combinatória é a mais conhecida e estudada na educação básica, e o enfoque clássico ou combinatório é aquele no qual a probabilidade é representada como razão entre a quantidade de eventos favoráveis em função da quantidade total de eventos em tal situação, (LOPES & COUTINHO, 2009). Tendo como base esse quadro, os professores podem criar meios pedagógicos para facilitar o processo de ensino e aprendizagem.

Alguns estudos apontam facilitadores para o professor em sua rotina de ensino de probabilidade. Cazorla e Santana (2010) mostram que probabilidade pode ser associada com a estatística, enquanto Van Der Walle (2009) mostra que associar a resolução de problemas com elementos da probabilidade facilita bastante, inclusive na confrontação da teoria com a experimentação. Neste sentido, Corbalán (2012) e Grando (2004) concordam que o ensino de probabilidade, quando aplicado de maneira lúdica, torna-se um grande recurso na compreensão do conteúdo proposto.

É neste contexto que a Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA), conceito apresentado por Simon (1995), se apresenta como uma ferramenta que pode auxiliar o professor nesse processo de ludo-aprendizagem, pois, a partir dela o professor pode prever situações adversas que podem ocorrer durante o momento antes, durante e depois da atividade, bem como dá munção para o docente planejar e embasar tais práticas no âmbito escolar.

TRAJETÓRIAS HIPOTÉTICAS DE APRENDIZAGEM

A ideia de Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA), difundida por Simon (1995), aponta o professor como foco principal para o planejamento de boas situações de aprendizagem, baseadas em práticas construtivistas, juntamente, com a planificação do ensino. Desse modo a planificação de ensino é o planejamento das ações, metas e estratégias, bem como o tempo necessário para desenvolver cada conceito. Este planejamento requer do professor conhecimento de teorias para o embasamento das suas práticas em sala de aula e análise de diferentes estratégias que promovam o aprendizado de novos conceitos e adaptações necessárias para o aprendizado individual e coletivo:



Uma THA é uma construção pedagógica que propõe caminhos de aprendizagem, na qual, ao percorrer estes caminhos, o indivíduo constrói seu conhecimento buscando o desenvolvimento de seu pensamento vinculado à investigação e atitudes para realização das tarefas. (MENOTTI, 2014, p. 19).

De acordo com essa ideia, o professor precisa planejar trajetórias, caminhos, e percursos, que imagina serem interessantes e potentes, para que seus estudantes consigam assim atingir às expectativas de aprendizagem que estão previstas para um determinado período da escolaridade. Rosembaum (2010) explica o termo hipotético de acordo com duas perspectivas:

A que entende que o professor tem acesso apenas às hipóteses dos conhecimentos dos alunos, isto é, ele não consegue acessar diretamente o conhecimento dos aprendizes, e a outra perspectiva, que utiliza o termo hipótese para fazer referência ao prognóstico, à expectativa do professor, a respeito de como a aprendizagem será processada pelos alunos. (ROSEMBAUM, 2010, p. 27).

De acordo com Rosembaum (2010), Simon (1995) apresenta três componentes que constituem uma Trajetória Hipotética de aprendizagem:

- Os objetivos do professor: conteúdos, conhecimentos e habilidades que o professor pretende desenvolver;
- As atitudes de ensino: as atividades a serem desenvolvidas para promover a aprendizagem dos alunos;
- O processo hipotético de aprendizagem: hipóteses acerca do entendimento e dos pensamentos desenvolvidos pelos alunos no desenvolvimento das atividades de ensino.

Segundo Rosembaum (2010), para Simon o papel dos alunos e a interação entre professores e alunos são fundamentais para a construção do conhecimento.

Quando os alunos começam a exercer as atividades planejadas, o professor se comunica com eles e os observa, que leva o professor a uma nova compreensão das concepções dos estudantes. O ambiente de aprendizagem evolui como resultado da interação entre o professor e os alunos e como eles se envolvem no conteúdo matemático. [...] O professor pode apresentar uma tarefa. No entanto, é o que os alunos fazem dessa tarefa e sua experiência com ela que determina seu potencial de aprendizagem. (SIMON, 1995, p.32, apud ROSEMBAUM, 2010, p. 28).

Uma THA depende de tarefas matemáticas para a promoção da aprendizagem, para Menotti (2014), essas tarefas devem ser significativas, com objetivos claros e dependem de algum conhecimento por parte dos alunos. Nesta perspectiva, o professor precisa assim estar disposto a sempre buscar novos conhecimentos, refletir sobre suas ações e tomadas de decisões,



ser flexível, e estar suscetível ao novo, reformulando uma THA sempre que observar que os alunos apresentam dificuldade no desenvolvimento de algum conceito abordado. Dessa forma o processo hipotético de aprendizagem deixa de sê-lo quando o aluno realiza suas tarefas.

TRAJETÓRIAS HIPOTÉTICAS DE APRENDIZAGEM NO PLANO DE ENSINO

De acordo com Gauthier et. al. (1998), o ofício do professor é composto por vários saberes, no sentido figurado, a de um reservatório. Nesse sentido, o professor se abastece com o objetivo de responder às exigências advindas de sua prática de ensinar. Para o autor, o reservatório de saberes docentes é composto da seguinte forma:

- saberes disciplinares – a matéria;
- saberes curriculares – o programa;
- saberes da ciência da educação;
- saberes da tradição pedagógica – o uso;
- saberes experienciais – a jurisprudência particular;
- saberes da ação pedagógica – o repertório de conhecimentos do ensino ou a jurisprudência pública validada.

Como qualquer profissional, o professor “age em função de ideias, de motivos, de projetos, de objetivos, em suma, de intenções ou razões das quais ele está ‘consciente’ e que ele pode geralmente justificar” (TARDIF, 2014, p. 208). Sendo assim, dizemos que um dos objetivos, deste, é oportunizar um processo reflexivo para que o aluno possa articular os saberes advindos de sua vivência em sala de aula, com o conhecimento científico produzido da área da Educação Matemática, em um contexto de pesquisa. Além disso, pode-se contribuir com a formação do pensamento crítico reflexivo, de modo que o aluno realize a articulação entre prática e teoria, fazendo assim o professor, da sala de aula da Educação Básica (Ensino Fundamental anos finais e Médio), um contexto a ser problematizado e reconstruído por meio do pensamento analítico, que é possibilitado pela pesquisa.

Diante desse contexto, a Trajetória Hipotética de Aprendizagem se configura enquanto uma fundamentação teórica pertinente para os objetivos almejados. Principalmente, pela necessidade de articulação entre as intenções do professor, para com a aprendizagem do aluno,



seu plano para as atividades de aprendizagem, bem como a elaboração de hipóteses a respeito do processo de aprendizagem da matemática dos alunos. Os processos de reflexão gerados pela realização de uma THA contribuem para o trabalho docente mais racional, possibilitando, ao professor alinhar suas ações com os objetivos da escola, contribuindo assim com o cumprimento da missão social da instituição.

Desse modo com a elaboração de uma THA, o professor pode refletir sobre os saberes disciplinares, e, a maneira como os compreende, bem como os objetivos de ensiná-los, mobilizando os saberes curriculares. Logo, podem-se questionar esses objetivos, rompendo com estruturas que se tornaram muito sólidas com o passar do tempo no ensino da Matemática, possibilitando, uma ressignificação de acordo com as demandas da sociedade atual. Portanto, ele pode refletir sobre as tarefas matemáticas pertinentes para alcançar os objetivos traçados, pois estas tarefas podem ser adaptadas, sendo reestruturadas pelas hipóteses elaboradas pelo próprio professor à respeito da maneira como compreende que seus alunos aprendem matemática.

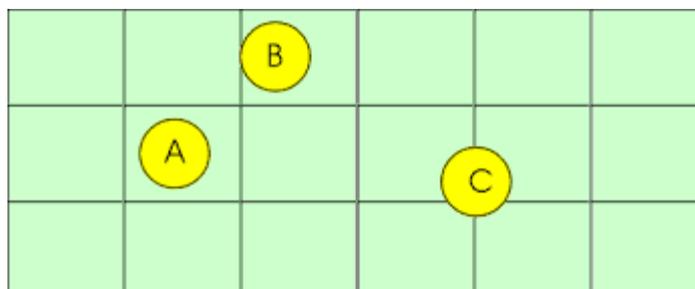
Sob este viés, o professor é levado a pensar sobre seus saberes experienciais e sobre os saberes da ação pedagógica, podendo ou não, articular esse processo reflexivo com os saberes das ciências da educação, elaborando uma trajetória que tem por objetivo explicitar a maneira como os alunos fictícios, mas com lastro à perspectiva construída, podem aprender. Considerando todas essas ideias, decidimos apresentar na turma de primeira série do Ensino Médio um modelo lúdico para compreensão de probabilidade: O Jogo dos Discos.

O JOGO DOS DISCOS

Segundo Paterlini e Caetano (2010) o Jogo dos Discos surgiu na França no século XVIII, aproveitando-se dos ladrilhos dos pisos e paredes das residências, que davam a sensação de se tornarem gigantescos tabuleiros. Nisso, crianças se reuniam e jogavam moedas no chão, com o intuito de fazer a moeda parar completamente dentro dos ladrilhos, sem tocar nos lados. A regra era simples: aquele que conseguisse tal feito, era o vencedor, seja por rodadas ou partida única. Como mostra a ilustração da moeda A na figura 2:



Figura 2 - Representação das moedas no jogo dos discos.



Fonte: Paterlini e Caetano, 2013

METODOLOGIA

Este experimento foi realizado de acordo com Bogdan e Biklen (1994), sendo a pesquisa qualitativa e descritiva, exigindo do professor uma abordagem minuciosa, considerando, que os fatos que acontecem não são triviais, que as situações observadas, e, posteriormente, descritas, apresentam potencialidades para a análise e a compreensão do fenômeno que se procura estudar. Para estes autores, a descrição é compreendida como um método de recolhimento e de análise de dados, quando se tem por intuito apresentar os detalhes inerentes ao fenômeno investigado.

Sendo assim, o desenvolvimento das ações de implementação desta proposta se deu por meio de investigação Matemática, com alunos da primeira série do Ensino Médio do Colégio Adventista de Luís Eduardo Magalhães, durante as aulas e alguns encontros em contraturno, perfazendo um total de 06 aulas.

Diante deste cenário é válido pontuar que antes de iniciar as tarefas com os alunos, a proposta de investigação foi, devidamente, apresentada à Coordenação Pedagógica, Serviço de Orientação Educacional e à Direção. Sendo necessária também a apresentação aos pais e responsáveis, para que tivessem ciência das ações e da necessidade da colaboração de todos, por meio de autorização para eventuais registros fotográficos.

Ademais, as ações desta investigação foram realizadas sob a perspectiva da aprendizagem significativa, com o intuito de conhecer e valorizar os conhecimentos da comunidade escolar. A estratégia metodológica baseou-se na Trajetória Hipotética de



Aprendizagem (THA), propondo situações desafiadoras e significativas para o aluno e também suas possíveis reações e respostas.

COMPOSIÇÃO DA AULA

Antes de começar o projeto, o professor precisa entender o contexto e prever possíveis perguntas que podem surgir no caminho, como sugere a THA na visão de Simon. Baseado nisso, a aula partirá do seguinte questionamento: *“Uma escola estava a preparar uma Festa Junina, e, foi pedido aos estudantes que bolassem um jogo para arrecadar fundos. Os estudantes observaram que no pátio, onde seria montada a barraca do jogo, o piso era feito com quadrados de 30 cm de lado. Pensaram então em construir discos com certo diâmetro d , que seriam comprados pelos visitantes por R\$ 1,00 (um real) cada. O visitante jogaria os discos aleatoriamente no piso. Se o disco depois de pousar ficasse inteiramente no interior do piso, sem tangenciar as bordas, ele receberia R\$2,00 (dois reais), R\$1,00 como devolução e mais R\$1,00 como prêmio. O problema dos estudantes consistia em determinar o diâmetro d dos discos de modo que o resultado fosse favorável aos formandos, sem prejudicar demasiadamente os jogadores. Assim resolveram que um acerto de 60% favorável aos formandos seria razoável”.*

Partindo do problema, abriremos um espaço para o debate entre os alunos, de forma a chegar num consenso para a parte de aplicação, levando em conta todos os pontos abordados pelos discentes. Posteriormente, iremos contextualizando o tema de probabilidade, fazendo associações com a situação proposta e com outras do cotidiano dos alunos. Na aula seguinte, os alunos farão a preparação do jogo, usando cartolinas e moedas de diâmetros variados para a confecção. A seguir, os 24 alunos da turma realizarão o jogo, tendo a oportunidade de testar todas as moedas possíveis.

Após a realização do jogo, faremos uma nova rodada de debates e análises acerca dos resultados obtidos e determinaremos um modelo que pode ser usado para chegar ao objetivo proposto pelo problema. Por fim, concluiremos a ideia básica de probabilidade e trabalharemos com exercícios complementares.

Neste tópico, é importante que o docente fique atento aos eventuais questionamentos que podem surgir durante a investigação, haja vista, que o grupo de alunos, por terem



pensamentos diferentes, pode divergir quanto à forma de chegar ao objetivo. Nesta perspectiva é importante valorizar o conhecimento significativo de cada aluno, deixando-o livre para propor caminhos, levantar hipóteses, testar, e, se necessário, repetir todo o caminho, para uma boa condução da aula.

AULA 01

Num primeiro momento, foi assim apresentado um breve histórico de como a probabilidade ajudou a esclarecer dúvidas e resolver situações ao longo dos tempos, porém, sem explicitar o nome do conteúdo. A priori, os alunos não demonstraram muito interesse, por se tratar de um tema já visto no ano anterior, mas, por ser um tema que, costumeiramente, é abordado no final do ano, juntamente com estatística, alguns alunos começaram a fazer questionamentos abertos. Porém, assim que a pergunta base foi lançada, um silêncio tomou conta da sala e nenhum aluno arriscou-se a responder, seja por medo de errar, ou por ainda tentar compreender o que aonde a questão queria chegar. Este silêncio foi interrompido com a fala de uma aluna, que tentou deduzir o tema estudado.

Aluna M: “- *Professor, por acaso nós já estudamos esse tema?*”.

Aluno R: “- *Já sim, eu só não estou lembrado do que é agora*”.

Aluna MP: “- *Eu também não, e realmente não sei*”.

Esse comportamento pode ser explicado da seguinte forma: por dois anos, os alunos tiveram aulas nas suas casas, e, no contexto de urgência sanitária, pelo qual foram obrigados a ter aulas virtuais, muitos distratores contribuíram para o baixo, ou a não efetivação do aprendizado em diversas disciplinas, com agravantes em Matemática, seja pela desmotivação, pela não assimilação do tema ou até mesmo pela ausência de um momento presencial. Associado a isso, a grade curricular chega por diversas vezes, apenas, com os temas que os professores ‘julgam’ ser importantes, e conteúdos como este, que, como já mencionado, são vistos apenas de maneira superficial, rasa, sem nenhum tipo de aprofundamento, apenas para “completar o livro”.

Enquanto os alunos discutiam o que poderia ser, ou qual conteúdo seria esse, chegaram à conclusão de que o problema se tratava de probabilidade, após o professor contribuir com



dois exemplos clássicos: “o cara e coroa” e o jogo de dados. Após este momento, ficou assim combinado que o problema começaria a ser desenvolvido na aula seguinte, para isso, a sala foi dividida em 04 grupos, com 06 integrantes cada, e que cada grupo ficaria responsável por trazer cartolina e botões de roupa, por determinação da escola, não foi possível levar moedas para a aula.

AULAS 02 E 03

Conforme combinado, os alunos deveriam trazer as cartolinas e os botões para a sala de aula, o que aconteceu. Antes disso, porém, os alunos deveriam entrar em consenso para definir o melhor caminho para resolução, chegando a três modelos: cartolina quadrada, medindo 33cm x 33cm; meia cartolina, medindo 33cm x 49cm e cartolina completa.

Aluno C: “- *Vamos supor que sejamos nós os alunos que estamos montando o brinquedo. Eu acho quadrado melhor, porque é padrão*”.

Aluno R: “- *Eu prefiro o retângulo, pra deixar o jogo mais difícil pra quem joga. O importante é nós arrecadarmos a maior quantidade possível, e eu penso que o quadrado facilita ainda mais para quem vai jogar.*”

Diante do impasse, o professor fez a intervenção, concordando com o aluno C no sentido de que cada aluno deveria se transportar para a realidade do jogo, mas ponderou que o importante, ou seja, o jogo ideal seria: aquele promovesse a curiosidade em quem joga, mas que também não fosse um bicho de sete cabeças e um prejudicial para os alunos. Feito isso, decidiram em votação qual seria o melhor modelo para a experimentação, sendo o modelo de meia cartolina o vencedor. Logo em seguida eles apresentaram os botões que trouxeram para a sala de aula, representados na figura 03, sendo eles:

- Modelo 1, com 1,1cm de diâmetro;
- Modelo 2, com 1,5cm de diâmetro;
- Modelo 3, com 1,75cm de diâmetro;
- Modelo 4, com 2,0cm de diâmetro.



Figura 3 - Botões utilizados na confecção do jogo.



Fonte: Autoria Própria, 2022

Após a apresentação dos botões, os alunos começaram a colocar a mão na massa, já empolgados, esperando o desfecho do caso. Com a orientação do professor, cada grupo pôde definir a medida de lado para a confecção do “pisos” do jogo. Porém, todos concordaram de usar o lado 3cm como padrão e, partindo deste ponto, descobrir o melhor cenário. Durante a produção, alguns alunos já comentavam algumas possibilidades, como o tamanho dos botões e a utilização dentro do jogo.

Aluno R: “- Moço, todo mundo vai dizer que o botão azul é o melhor, quer ver?”.

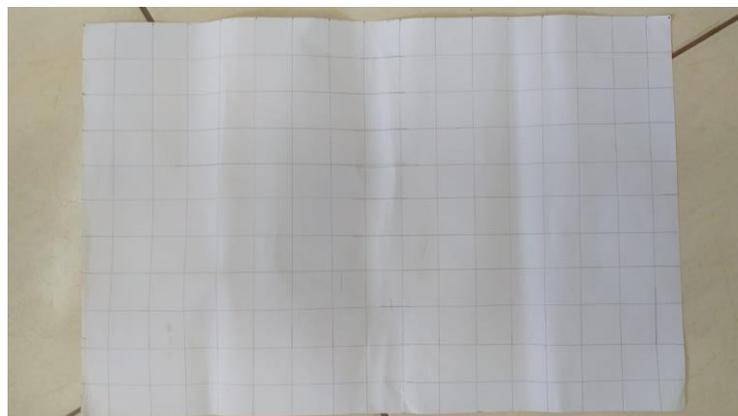
Aluna G: “- Eu digo que não, sabe por quê? Porque o botão azul é muito levinho, e se você soltar ele vai pra onde quer”.

Aluno R: “Pior, né? Mas ainda acho que sim. Repare”.

Assim que todos os grupos construíram seus tabuleiros, ficou definido que na aula seguinte, eles realizariam o experimento, já tendo ciência o tamanho dos botões e dos “pisos” feitos. A figura 4 ilustra como ficou um dos tabuleiros.



Figura 4 - Modelo de tabuleiro construído pelos alunos.



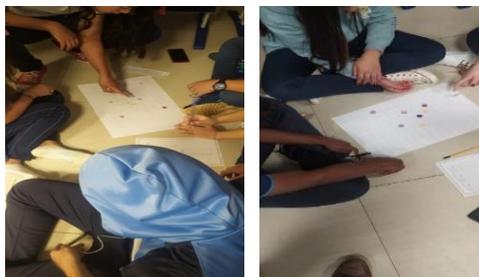
Fonte: Autoria Própria, 2022

AULA 04

Neste ponto, era chegado o momento aguardado pelos alunos, e, após várias aulas formulando conjecturas e ideias, chegara a hora de pôr o plano em prática. Ficou assim acordado que cada grupo teria a oportunidade de trabalhar com os 04 tipos de botão, trazidos pelos alunos, em que cada grupo lançaria 20 vezes cada conjunto de 05 botões e depois trocaria com outro grupo, da distância que o grupo achasse interessante dentro do perímetro da sala, até que todos os botões fossem utilizados por todos os grupos e que cada conjunto tivesse ali sido lançado 400 vezes.

Para isso, cada grupo recebeu uma tabela, na qual deveria preencher, em cada caso, quantos botões atenderam ao objetivo proposto pelo jogo, o botão cair inteiramente dentro do quadrado. Ao mesmo tempo, outros integrantes dos grupos partiram para tentar moldar a forma algébrica da situação proposta, visando encontrar o melhor caminho. Assim, os grupos se reuniram e começaram a lançar os botões no tabuleiro, conforme a figura 5.

Figura 5 - Grupos realizando os lançamentos no tabuleiro



Fonte: Autoria Própria, 2022



AULAS 5 E 6

Estas aulas foram reservadas para a discussão e análise dos resultados com os alunos em sala de aula. Um fato interessante que chamou a atenção, é que todos os alunos tiveram bastante dificuldade em relacionar o lado do tabuleiro com o diâmetro dos botões, mesmo sabendo que não teria tanta interferência no resultado do jogo.

Um dos grupos tentou assim partir para a resolução algébrica, porém se confundiu no momento que encontrou as duas respostas, demorando, a perceber que um dos valores era menor que o diâmetro usado nos lançamentos. Outro grupo sentiu dificuldades em achar a distância ideal para fazer o lançamento com qualidade, sendo que, da distância inicial de 1,5m, eles reduziram para 1,25m e posteriormente para 1m. Ao final da contagem, chegamos aos seguintes resultados, como mostra o quadro 1, nenhum dos botões alcançou índice proposto na situação problema, porém os alunos notaram que o botão 2 foi o que chegou mais próximo:

Quadro 1 - Tabulação de dados após os lançamentos.

Tipo de botão	Lançamentos feitos	Lançamentos favoráveis	Porcentagem favorável
Botão 1 (1,1cm)	400	272	68%
Botão 2 (1,5cm)	400	138	34,5%
Botão 3 (1,75cm)	400	118	29,5%
Botão 4 (2,0 cm)	400	87	21,75%

Fonte: Autoria Própria, 2022

Os estudantes então entraram em uma discussão:

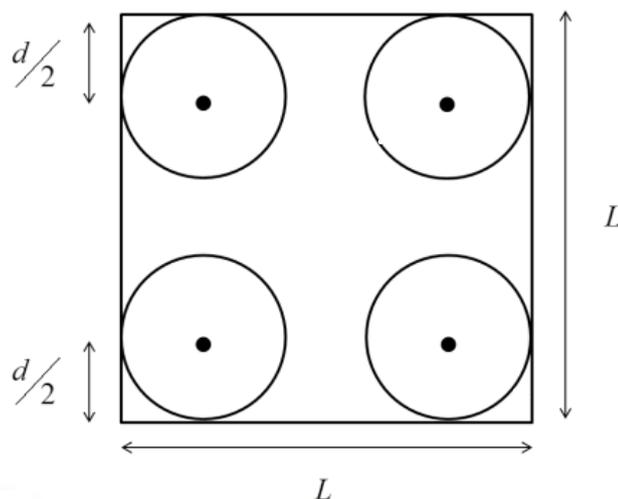
Aluno D: “- Nesse caso a solução seria procurar um botão com tamanho entre o 1 e o 2, já que eles tiveram resultados mais próximos do que desejamos”.

Aluna AC: “- Eu acharia mais vantajoso mudar o tamanho do piso, assim poderíamos manter os botões e apenas realizar novas divisões”.

Após estes e outros questionamentos, todos chegaram à conclusão de que o tamanho do botão, associado com o tamanho do lado do quadrado, influenciam diretamente no resultado do jogo. Então, chegou o momento de formalizar algebricamente a questão. Conforme mostra a

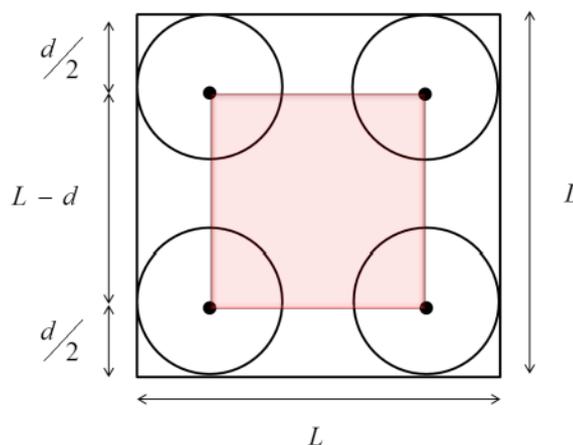
figura 6.1, são pequenas as chances de se formalizar algo caso o botão pare em uma dessas posições.

Figura 6 - Modelo de orientação para os cálculos



Em contrapartida, se os alunos perceberam que há uma relação entre os centros de cada circunferência, o cálculo poderia se tornar mais compreensível

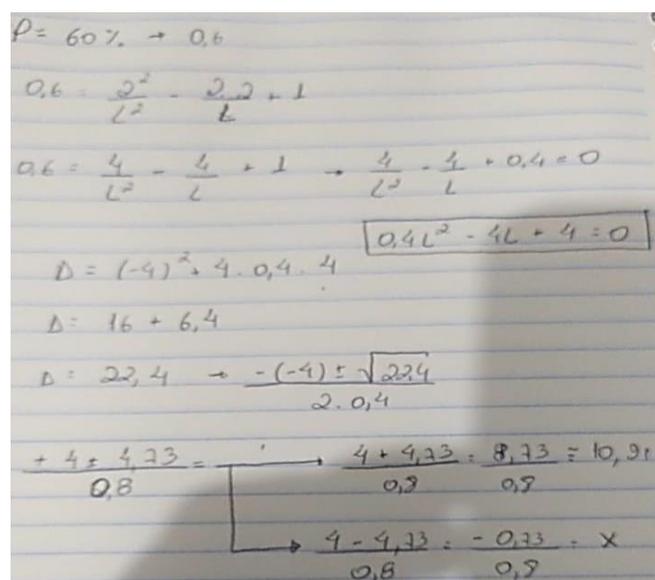
Figura 7 - Modelo de orientação para os cálculos dos alunos



Após apresentar e comprovar para os alunos a certeza de suas convicções, e, sabendo, que eles precisariam obter êxito de 60% na construção da atividade, chegamos ao seguinte cálculo: $P(d) = \frac{(L-d)^2}{L^2} = \frac{d^2}{L^2} - \frac{2d}{L} + 1$, onde L corresponde ao lado do quadrado, d corresponde ao diâmetro do botão e P corresponde ao percentual de êxito. Assim que a conta foi apresentada, um dos alunos identificou que se tratava de uma equação de 2º grau “que

poderia ser feita por delta e Bháskara”. Um dos alunos do grupo que trouxe o botão 04 logo se preocupou dizendo que “o quadrado para o caso do grupo dele seria gigantesco”. Com a fórmula pronta, eles decidiram calcular o tamanho do lado para tal caso, considerando um ganho de 60% e com o botão tendo 2cm de diâmetro:

Figura 8 - Cálculos referentes a uma das situações propostas.



$p = 60\% \rightarrow 0,6$
 $0,6 = \frac{2^2}{L^2} - \frac{2,2}{L} + 1$
 $0,6 = \frac{4}{L^2} - \frac{4}{L} + 1 \rightarrow \frac{4}{L^2} - \frac{4}{L} + 0,4 = 0$
 $0,4L^2 - 4L + 4 = 0$
 $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 0,4 \cdot 4$
 $\Delta = 16 - 6,4$
 $\Delta = 22,4 \rightarrow \frac{-(-4) \pm \sqrt{22,4}}{2 \cdot 0,4}$
 $\frac{+4 \pm 4,73}{0,8} \rightarrow \frac{4 + 4,73}{0,8} = 8,73 \approx 10,91$
 $\frac{4 - 4,73}{0,8} = -0,33 = X$

Fonte: Autoria Própria, 2022

Após a resolução, cada grupo ficou responsável pelos cálculos referentes aos botões, e, posteriormente, a adaptação do “novo piso” a ser usado pelo jogo. Logo em seguida, o tema Probabilidade foi, completamente, abordado e atividades complementares foram enviadas.

RESULTADOS

Diante das aulas realizadas, pudemos chegar à conclusão de que teoria e prática, mesmo com todos os recursos possíveis, ainda estão num patamar um pouco distante do que se imagina. Durante a realização do projeto de investigação, muitas situações acabam fugindo do nosso controle, e, é função do professor estar preparado para lidar com isso. Enquanto o professor está no seu momento de preparação, ele imagina tudo na máxima perfeição, desconsiderando, por exemplo, o que o aluno traz de bagagem de conteúdos para agregar à aula. E isso ficou



explícito durante a aula, na qual por muitas vezes os alunos se perdiam no caminho e o professor, enquanto mediador, precisava dar dicas e recolocá-los no lugar de pensamento e reflexão.

A vantagem de preparar o terreno de maneira antecipada para a investigação é, que as surpresas se tornam mais previsíveis, por assim dizer, fazendo com que o professor, ao se antecipar, garanta segurança à sua aula, e assim, dando munição para o aluno explorar sem medo, as possibilidades que por ventura aparecerem. Desse modo, num contexto de aula inédita, o professor fica muito mais a vontade para conduzir o trabalho com os discentes, além de ter a oportunidade de ouvir todas as proposições e apontar formas objetivas e concretas do aluno obter sucesso em sua investigação.

Dentro do contexto, os alunos aproveitaram o momento da interação para compartilhar mais ideias, ter liberdade de usar o seu conhecimento para obter sucesso nos problemas e questionamentos que o grupo oferecia, além de propiciar um ambiente mais solidário, ouvindo os colegas, debatendo e formulando possíveis respostas em prol do momento.

Diante deste cenário um detalhe que chamou atenção foi a dificuldade inicial em compreender o que o problema apresentava, fato que ocorre em diversos momentos, seja pelo receio em descobrir o novo, ou simplesmente por não querer se arriscar. Nesta perspectiva, uma abordagem inicial bem feita é a chave para toda e qualquer investigação, seja ela matemática ou não e o fato de ser um jogo de “sorte ou falta dela”, faz com que o aluno quebre essa barreira e busque do seu jeito entender as regras para depois praticar.

A ação do jogo dos discos foi motivadora para os alunos, pois, muitos deles durante as aulas seguintes alegaram que o assunto ficou mais compreensível, e, que probabilidade “começava a fazer sentido” na sua vida. Desse modo vários acreditavam que lidar com probabilidade era apenas ver as chances de moeda, dados ou bolas, que são as situações mais recorrentes no dia a dia do conteúdo, e, ficaram surpresos quando descobriram que aquele problema nada mais era do que probabilidade simples.

Sob este viés, outro fato interessante foi de que sempre há alunos que, normalmente, fazem as atividades, apenas, por fazer, não se importando tanto com o que acontece. O efeito jogo, fez com que esses alunos atuassem mais, diretamente, na resolução e nos problemas. Durante a aplicação, um desses alunos levantou a hipótese de que haveria chances de cair numa



equação de segundo grau, ou função quadrática, dada a complexa relação entre os lados do quadrado e o diâmetro dos botões, fato que ficou comprovado durante a discussão dos resultados.

Por outro lado, a investigação mostrou que existem lacunas que ainda precisam ser preenchidas, tais como cálculos com números decimais, porcentagens, e equações de 2º grau. Nesse sentido, outra constatação observada é de que o experimento apresenta falhas quando mais de 05 botões são lançados de uma única vez. Um dos grupos tentou lançar 10 botões e o resultado foi que os botões se espalharam tanto, a ponto de quase todos saírem do espaço delimitado para o jogo. Desse modo, em quase todas as situações, os grupos precisaram refazer os lançamentos a fim de obter valores para a investigação. Em algumas ocasiões 02 com os botões menores, e 01 com os botões do modelo 2, conseguiram abrir parâmetro para os resultados.

Durante a discussão, os questionamentos dos alunos abriram precedentes para outras abordagens, como por exemplo, a probabilidade geométrica. No Ensino Médio, o ensino de probabilidades se restringe ao caso finito, e os problemas são basicamente de contagem de casos favoráveis e casos possíveis.

Existem, entretanto, problemas muito simples e interessantes de probabilidades no qual o espaço amostral possui a situação do exemplo usado na construção desta investigação matemática. E isso só se tornou possível graças à curiosidade dos alunos em situações onde o botão tangenciava um ou dois lados do quadrilátero proposto, isso foi abordado fazendo referência a outros casos.

Nesta perspectiva, na prática, existem inúmeros problemas em que é preciso estimar a probabilidade de um evento, mas não se pode calculá-la. Qual é a probabilidade de um avião cair? Qual é a probabilidade de que um carro seja roubado? Qual é a probabilidade de que um estudante, entrando numa universidade, termine seu curso? Respostas para esses problemas têm imensa importância e, como não podemos calcular essas probabilidades, tudo o que se pode fazer é observar com que frequência esses fatos ocorrem.

Dessa maneira, com um grande número de observações, dividindo o número de vezes que determinado fato ocorreu pelo número de observações feitas, obtém-se uma estimativa da probabilidade desse evento. Num panorama geral, a aula possibilitou a abertura de novos



horizontes, e contribuiu para desenvolver nos discentes o gosto pela investigação e pela resolução de problemas. Tanto que vários deles, ao final da pesquisa, já queriam que outros problemas semelhantes surgissem e, cogitando usar o jogo na prática durante a Feira de Ciências da escola.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo deste trabalho, foi apresentada a importância que a probabilidade tem no Ensino Básico e, por consequência, a investigação matemática como forte aliada na resolução de problemas. Além disso, foi assim mostrado como o professor pode se preparar para conduzir uma investigação a partir do viés da Trajetória Hipotética de Aprendizagem.

Dessa maneira, como visto, a THA tem diversas semelhanças com um plano de aula comum, mas com um adicional: ao invés de um plano simples de aula, ela também convida o educador a viajar pelo desconhecido, pelo mundo de hipóteses, suposições e possíveis respostas positivas ou negativas durante a realidade.

Durante o planejamento, foi possível imaginar o quanto nós, enquanto educadores, pensamos em como pode ser divertido, e, ao mesmo tempo, uma verdadeira incógnita, pois o preparo implica em perguntas como: será que tudo isso que relatei realmente acontecerá? E se eles conseguirem rapidamente? E se não conseguirem? Sendo assim, esse é o real objetivo: uma hipótese. Se realmente acontecerá, só o dia a dia na sala de aula mostrará e para um professor em início de carreira, é algo que poderá ser bastante proveitoso e, ao mesmo tempo, objeto de aprimoramentos, conduzindo a diversas reflexões no próprio cotidiano.

À vista desta problemática é importante ressaltar que não existe uma forma única de lidar com a Matemática, e o uso de jogos é um recurso que, sob nenhuma hipótese deve ser desprezado pelo professor. Elas devem ser apresentadas como uma alternativa que tem como objetivo principal favorecer o ensino do aluno, além de ser um fator gerador de motivação e interesse. Sob essa ótica que desenvolvemos a atividade do “Jogo dos Discos” com os alunos da primeira série do Ensino Médio do Colégio Adventista de Luís Eduardo Magalhães, reintroduzindo o conteúdo de probabilidade, normalmente visto às pressas ou de maneira rasa, de forma diferente do que é habitualmente trabalhado.

Por fim, acreditamos que este trabalho trará relevância pois, atividades de investigação induzem o professor a sair de sua zona de conforto e se enveredar em caminhos desconhecidos, na busca de alternativas que facilitem o trabalho com probabilidade. Além disso, a introdução das THA no contexto investigativo entra como uma forma de contribuir para a suavização dessa ruptura entre o



tradicionalismo e o modelo prático de resolução de problemas. Ademais, acreditamos que este trabalho contribui para outros professores que desejam seguir por este caminho.

REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, Rodrigo Ricardo Cavalcanti de. **O jogo dos discos: o uso da experimentação como suporte para o ensino da probabilidade**. 2015. 50f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2015. Disponível em: <https://repositorio.ufrn.br/jspui/handle/123456789/20828> Acesso em: 19/06/2022.

BERNARDES, O. **Para uma abordagem do Conceito de Probabilidade**. Educação & Matemática. Lisboa: nº3, 1987.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**. Trad. Maria J. 9 Alvez, Sara B. dos Santos e Telmo M. Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: SEF, 1998.

CARBALÁN, F. **Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato**. Madrid. Editorial Síntesis, 2012.

COUTINHO, C.Q.S. **Conceitos probabilísticos: quais contextos a história nos aponta?** Revista Revemat. Florianópolis, v. 2, n. 3, p. 50-67, 2007.

DE SOUZA CABRAL JUNIOR, R.; TRALDI JUNIOR, A. Trajetória Hipotética de Aprendizagem: abordagem inicial das noções de probabilidade. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 4, n. 8, p. 25-34, 5 mar. 2020.

GAUTHIER, Clemont; MARTINEAU, Stéphane; DESBIENS, Jean-François; MALO, Annie; SIMARD, Denis. **Por uma teoria da pedagogia: pesquisas contemporâneas sobre o saber docente**. Ijuí: Unijuí-RS, 2013.

GRANDO, R. C. O. **O jogo e a Matemática no contexto da sala de aula**. São Paulo: Paulus, 2004.

MENOTTI, Rogéria Malacrida. **Frações e suas Operações: Resolução de Problemas em uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem**. Dissertação para título de Mestre em Matemática, UEL Londrina – PR, 2014. 154 páginas. Disponível em: <http://www.profmatsbm.org.br/dissertacoes?pag=52> Acesso em: 28/09/2022.



PATERLINI, R. R.; CAETANO, P. A. S. **Jogo Dos Discos**. Módulo I. -- Cuiabá, MT: Central de Texto, 2013. -- (Matem@tica na pr@tica. Curso de especialização em ensino de matemática para o ensino médio)

RICARDO, A. C. K. **O uso de jogos no ensino de probabilidade na educação básica**. Dissertação para o título de Licenciada em Matemática. Universidade Federal de São João Del-Rei, MG, 2016. 38 páginas. Disponível em: <http://dspace.nead.ufsj.edu.br>. Acesso em 20/06/2022.

ROSEMBAUM, Luciane Santos. **Uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem sobre Funções Trigonométricas numa Perspectiva Construtivista**. Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. PUC de São Paulo – SP, 2010. 256 páginas. Disponível em: <http://www.periodicos.capes.gov.br/> Acesso em: 19/06/2022. Santa Cruz do Sul: EDUNISC, 2004.

SIMON, M. A. **Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective**. Journal for Research in Mathematics Education, vol. 26, n. 2, pp. 114-145. 1995.

TARDIF, Maurice. **Saberes docentes e formação profissional**. Petrópolis/RJ: Vozes, 2014.

VAN DER WALLE, John, A. **Matemática no Ensino Fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula**. Tradução: Paulo Henrique Colonese. 6ª ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VIALI, L. **Algumas considerações sobre a origem da teoria da Probabilidade**. Revista Brasileira de História da Matemática, v. 8, n. 16, p. 143-153, outubro/2008-março/2009.