INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA BAHIA

CAMPUS SALVADOR

MATEMÁTICA E CIÊNCIA FORENSE: UMA PROPOSTA DE ENSINO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA OBTENÇÃO DO INSTANTE APROXIMADO DA MORTE

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

NICOLE SANTOS BARRETO DE MACÊDO

SALVADOR

2023

NICOLE SANTOS BARRETO DE MACÊDO

MATEMÁTICA E CIÊNCIA FORENSE: UMA PROPOSTA DE ENSINO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA OBTENÇÃO DO INSTANTE APROXIMADO DA MORTE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciada em Matemática, pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Bahia – Campus Salvador.

Área de concentração: Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dra. Anete Otília Cardoso de Santana Cruz – Instituto Federal da Bahia.

Coorientador: Prof. Dr. Ives Lima de Jesus – Instituto Federal da Bahia.

SALVADOR

2023

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO SISTEMA DE BIBLIOTECAS DO IFBA, COM OS DADOS FORNECIDOS PELO(A) AUTOR(A)

M141m Macêdo, Nicole Santos Barreto de

Matemática e ciência forense: uma proposta de ensino de equações diferenciais para obtenção do instante aproximado da morte / Nicole Santos Barreto de Macêdo; orientadora Anete Otília Cardoso de Santana Cruz; coorientador Ives Lima de Jesus -- Salvador, 2023.

38 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) -- Instituto Federal da Bahia, 2023.

1. Equações diferenciais. 2. Investigação criminal. 3. Lei de resfriamento de Newton. 4. Modelagem matemática. 5. Sequência didática. I. Cruz, Anete Otília Cardoso de Santana, orient. II. Jesus, Ives Lima de, coorient. III. TÍTULO.

CDU 517.9

NICOLE SANTOS BARRETO DE MACÊDO

MATEMÁTICA E CIÊNCIA FORENSE: UMA PROPOSTA DE ENSINO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA OBTENÇÃO DO INSTANTE APROXIMADO DA MORTE

A banca examinadora, abaixo listada, aprova o Trabalho de Conclusão de Curso “Matemática e Ciência Forense: Uma proposta de ensino de Equações Diferenciais para obtenção do instante aproximado da morte” elaborado por “Nicole Santos Barreto de Macêdo” como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciada em Matemática, pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia – Campus Salvador.

gov.br Documento assinado digitalmente
ANETE OTILIA CARDOSO DE SANTANA CRUZ
Data: 16/02/2024 17:56:46-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof.ª Dra. Anete Otília Cardoso de Santana Cruz – IFBA/Campus Salvador

gov.br Documento assinado digitalmente
IVES LIMA DE JESUS
Data: 16/02/2024 20:46:24-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Ives Lima de Jesus – IFBA/Campus Salvador

gov.br Documento assinado digitalmente
DANIELA SANTA INES CUNHA
Data: 16/02/2024 20:34:13-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof.ª Ma. Daniela Santa Inês Cunha – IFBA/Campus Salvador

gov.br Documento assinado digitalmente
ISABEL CRISTINA COSTA LEITE
Data: 16/02/2024 21:41:35-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof.ª Dra. Isabel Cristina Costa Leite – IFBA/Campus Salvador

Salvador, 7 de dezembro de 2023.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pela vida, por me conceder sempre saúde, força de vontade, resiliência, paciência e determinação para enfrentar as dificuldades durante a caminhada, e principalmente, por ter me reservado a melhor família que eu poderia ter.

Aos meus familiares, que sem eles eu nada seria, por todo o incentivo e amparo existente durante toda a minha vida, são as maiores razões pela minha luta diária. Em especial, meu avô José Antônio, que me criou e lapidou a mulher que sou hoje, que nunca mediu esforços para me proporcionar sempre o melhor, dentro do possível e impossível. Espero na eternidade retribuir tudo que fez por mim em vida.

Ao meu noivo José Victor, que sempre demonstrou apoio incondicional pelas minhas escolhas e por sempre acreditar no meu potencial. A minha gata/filha Lindinha, motivo da minha saudade diária, que esteve ao meu lado desde a infância até o último ano de faculdade, tornando os meus dias mais leves e felizes.

Aos meus colegas e amigos que a faculdade me presenteou, os quais tornaram a rotina universitária mais prazerosa, por todo o apoio que encontramos uns nos outros para seguir em frente.

A minha querida professora orientadora Anete Otília de Santana Cruz, que apoiou a escolha do meu tema desde o princípio e aceitou caminhar ao meu lado na reta final do curso, me proporcionando conhecimentos enriquecedores a fim de produzirmos um trabalho de qualidade. Agradeço imensamente por toda paciência, simpatia, acolhimento e experiências compartilhadas, as quais jamais esquecerei.

Ao meu coorientador Ives Lima de Jesus, por prestar toda assistência à pesquisa e pelas contribuições visando a melhoria do trabalho. Agradeço também a todos os docentes do curso de Licenciatura em Matemática do IFBA - campus Salvador, profissionais altamente qualificados, empenhados e atenciosos, que com seus ensinamentos tiveram uma parcela de contribuição significativa para minha formação.

Meus sinceros agradecimentos a todos(as) que de certa forma torceram por mim.

RESUMO

O presente artigo tem como objetivo propor uma sequência didática com foco no estudo de Equações Diferenciais, a qual se baseou na Lei de Resfriamento de Newton para apresentar a aplicabilidade deste conteúdo na investigação criminal, mais precisamente evidenciar como é obtido o instante aproximado da morte. A metodologia adotada para a confecção da sequência didática foi a pesquisa bibliográfica dos temas já mencionados, sob a perspectiva da Modelagem Matemática. Espera-se que o material elaborado auxilie os docentes do Ensino Superior, cujas componentes curriculares contenham o objeto de conhecimento em questão, de forma a tornar a matemática mais estimulante e atrativa para os estudantes a partir da visualização de sua utilidade na resolução de casos criminais.

Palavras-chave: Equações Diferenciais. Investigação Criminal. Lei de Resfriamento de Newton. Modelagem Matemática. Sequência didática.

ABSTRACT

This article aims to propose a didactic sequence focused on the study of Differential Equations, which was based on Newton's Law of Cooling to present the applicability of this content in criminal investigation, more precisely to show how the approximate instant of death is obtained. The methodology adopted to create the didactic sequence was bibliographical research of the themes already mentioned, from the perspective of Mathematical Modeling. It is expected that the developed material will help Higher Education teachers, whose curricular components contain the object of knowledge in question, in order to make mathematics more stimulating and attractive for students from the visualization of its usefulness in solving criminal cases.

Keywords: Differential Equations. Criminal Investigation. Newton's Law of Cooling. Mathematical Modeling. Didactic Sequence.

APRESENTAÇÃO

O que faz tornar um tema ser considerado científico? Um interesse pessoal pode se tornar uma questão a ser discutida cientificamente?

Trago esses questionamentos pois, foi através de um interesse pessoal, que são as séries televisivas de investigações criminais que nasceu a motivação de tornar o ensino de conteúdos do ensino superior, tão atraentes e instigantes como as séries investigativas. Será que há algum “crime” nisso? Eu e a minha orientadora, acreditamos que não. Mas, agora, o desafio desse trabalho consiste em torná-lo de cunho científico. É o que farei a partir de então.

A ideia é mencionar as séries investigativas criminais (SIC) como estratégia para ampliar o acesso às informações superficiais que os estudantes geralmente têm sobre assuntos que são constituidores da base de conhecimento deles para a compreensão de saberes mais complexos e avançados.

Assim, trazemos um conteúdo considerado desafiador para uma parte dos estudantes que estudam Equações Diferenciais Ordinárias (EDO). Mas o que são EDO? Porque aprendemos esse saber? E qual a sua importância nos cursos superiores de exatas?

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O presente artigo apresenta a matemática sob a perspectiva da ciência forense, isto é, conheceremos a importância da matemática como fator contribuinte para o andamento de investigações criminais, por meio de uma proposta de ensino de Equações Diferenciais na forma de sequência didática, a qual utilizará a Lei de Resfriamento de Newton para explicar como é obtida a estimativa do instante de morte.

A escolha deste tema se deu devido a realidade do ensino na educação matemática brasileira, mais precisamente as dificuldades que os educadores enfrentam para incentivar a autonomia dos estudantes em relação ao próprio processo de aprendizagem, além de tornar a componente curricular mais motivadora, atrativa e valorizada durante a formação destes alunos, inclusive em cursos de nível superior.

Na sociedade contemporânea brasileira, é notório o alto índice de estudantes que desistem frequentemente do tão sonhado diploma de cursos superiores que envolvem as ciências exatas. De acordo com Bruno Osvaldo Mussliner, Monica de Souza Mussliner, Edwin Benito Meza e Guillermo Luján Rodríguez (2021, p. 9), os quais propuseram uma ação como tentativa de sanar o problema da evasão universitária no sistema público de ensino superior, “(...) especificamente na área de ciências exatas, o baixo desempenho nas provas de ingresso coincide com altas taxas de evasão nesses mesmos cursos.” Além disso, “7 em cada 10 estudantes de licenciatura em exatas desistem da faculdade, aponta Inep." De acordo com os cálculos realizados pela entidade, entre 2012 e 2021, somente 30% dos licenciandos em Matemática finalizam o curso. (Folha de S. Paulo, 2023). Ademais, segundo dados estatísticos a respeito da Universidade do Estado de Santa Catarina, 58,6% das evasões referem-se aos cursos das áreas de ciências exatas e da terra. (Bernard e Davok, 2016).

Devido às dificuldades apresentadas por parte dos alunos universitários de exatas, evidenciadas através das evasões, é necessário repensar metodologias que promovam um ensino aprendizagem de qualidade, visando a mitigação destas desistências. Pensando nisso, é válido apresentar contextualizações de determinados conteúdos matemáticos em sala de aula para que o aluno possa visualizar a utilidade e aplicabilidade do conhecimento que está sendo estudado no momento, em situações cotidianas.

A Modelagem Matemática, por exemplo, pode ser introduzida em sala de aula objetivando contribuir na aprendizagem dos alunos, visto que os conteúdos trabalhados por eles estarão relacionados com o cotidiano. Jonei Cerqueira Barbosa (2004, p. 73-80) descreve: “(...) Modelagem, para mim, é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a problematizar e investigar, por meio da matemática, situações com referência na realidade.” João Pedro da Ponte (1992, p. 95-107), por sua vez, afirma que “A questão das relações entre diversos tipos de conhecimento tem uma grande importância na educação matemática e prende-se com a necessidade de valorizar o conhecimento próprio dos alunos."

Dessa forma, através da proposta de sequência didática que veremos a seguir, a qual se inspira na metodologia da Modelagem Matemática, espera-se que os estudantes tenham uma visão mais ampliada de como a Matemática pode ser significativa e como ela interage com diversas áreas do conhecimento, inclusive no âmbito da investigação criminal.

De acordo com pesquisas realizadas, é possível constatar o fascínio e o interesse crescente que as pessoas tem pelo conteúdo de séries policiais investigativas, visto que, a série *CSI: Crime Scene Investigation*, por exemplo, “(...) atingiu a marca de 60 milhões de telespectadores, tornando-se uma das séries policiais mais assistidas da história” (Brasil Paralelo, 2022). Outros exemplos internacionais relevantes deste gênero são *Dexter: New Blood* - “Com média de 8 milhões de espectadores por semana somando todas as plataformas, a atração se tornou a mais vista da história do canal pago Showtime” (Uol, 2022), *Lupin* - “Série atinge a marca de 70 milhões de visualizações e supera grandes sucessos da Netflix” (Mundo Negro, 2021) e *Dahmer: Um Canibal Americano* - “Série da Netflix supera marca de 1 bilhão de horas assistidas” (Canaltech, 2022).

Em relação às séries nacionais sobre investigação criminal, *Bom dia, Verônica* e *Linha Direta* são exemplos que não podem deixar de serem mencionados, pois ambas as obras televisivas revelaram o alto índice de aprovação do público. Com a obtenção de premiações e sucesso internacional, além de boa aprovação da crítica, *Bom dia, Verônica* alcançou o quarto lugar no ranking das séries mais assistidas da Netflix logo após o lançamento de sua nova temporada, totalizando mais de 24 milhões de horas assistidas. (Anamaria, 2022). O retorno de

Linha Direta, por sua vez, conseguiu conquistar um número expressivo de espectadores, fazendo com que a emissora adquirisse um aumento de 18% em sua audiência. (Uol, 2023)

Com base nos argumentos supracitados, as audiências e ibopes das séries policiais investigativas expressam a existência de um número considerável de pessoas que gostam e se interessam por esse tipo de conteúdo. Portanto, o presente artigo irá fornecer uma proposta de sequência didática voltada ao ensino de Equações Diferenciais, relacionando-as com uma técnica forense para que os estudantes percebam a funcionalidade deste conteúdo na esfera criminal. Afinal, é oportuno que os docentes de matemática associem conteúdos matemáticos com a investigação criminal, quando possível, na tentativa de estimular os estudantes a adquirirem o conhecimento matemático e dessa forma contribuir para redução das evasões existentes.

A confecção da sequência didática se deu através da realização de leituras acerca dos temas mencionados, as quais serviram como subsídios para o material, o qual será destinado para docentes que lecionam o conteúdo de Equações Diferenciais, e fornecerá procedimentos de aplicação em sala de aula para alunos de cursos superiores em exatas, visando apresentar como as Equações Diferenciais contribuem na compreensão e resolução de casos criminais para obtenção do instante aproximado da morte.

Portanto, no decorrer deste artigo veremos uma maneira inusitada e atrativa de responder a seguinte questão problema: De que forma a aplicação da Lei de Resfriamento de Newton, voltada à investigação criminal para obtenção do instante aproximado da morte, pode contribuir para o ensino de Equações Diferenciais?

2 REVISÃO DE LITERATURA

A ciência forense é o conjunto de técnicas, procedimentos e conhecimentos científicos utilizados para apuração de informações que auxiliam na resolução de casos criminais. De acordo com Franciéllen de Barros, Barbara Kuhnen, Mônica da Costa Serra e Clemente Maia Fernandes,

> A partir do estudo das evidências colhidas no âmbito da investigação, as ciências forenses ajudam a identificar suspeitos e a elucidar determinado crime, criando hipóteses sobre o ocorrido. Têm, portanto, o objetivo principal de pesquisar nos vestígios do fato criminoso os elementos necessários para formalizar o exame de corpo de delito, produzindo a prova para instruir o processo penal. (Barros et al., 2021)

Assim, se tratando de uma investigação criminal, quando os investigadores, policiais, patologistas e/ou peritos chegam numa cena de crime e se deparam com um corpo, uma das informações cruciais que necessita-se obter é o horário provável que ocorreu o óbito. Pois, uma vez tendo essa informação, é possível incluir ou excluir opções na lista de suspeitos (quando se tratar de homicídios) a depender dos álibis que eles apresentem no decorrer da investigação. Ou seja, a descoberta do instante aproximado da morte é um dos pontos de partida para que o caso seja elucidado.

Atualmente, existem inúmeras técnicas forenses para obtenção desta informação, como por exemplo a análise da rigidez cadavérica ou rigor mortis, a Entomologia Forense que “baseia-se no estudo do ciclo de vida de insetos para se estimar o tempo de morte, já que em cadáveres expostos ao ar livre ocorre colonização sucessiva de diferentes grupos de insetos, conforme o processo de decomposição avança” (Araújo; Santos, 2021, p. 272), dentre outras técnicas da cronotanatognose (do grego, chronos = tempo, thanatos = Deus grego que personifica a morte, gnosis = conhecimento), cujo objeto de estudo consiste na determinação do tempo de morte.

Mas, podemos obtê-la também utilizando a matemática como aliada por meio da realização de um cálculo baseado na Lei de Resfriamento de Newton. Esta lei expressa a relação de equilíbrio térmico entre um corpo, sem fonte de calor interna, ou seja, sem vida, e o ambiente em que o cerca. Dessa forma, caso a temperatura do corpo (T) seja menor que a temperatura do ambiente em que ele está localizado (

T_a), a qual permanecerá constante, T tenderá a T_a e, portanto, o corpo se aquecerá com o passar do tempo. Caso contrário, se a temperatura do corpo for maior que a do ambiente, então o corpo se resfriará.

A partir da interpretação desta lei é possível obter uma equação diferencial que modela matematicamente essa situação, ou seja, podemos descrevê-la em uma linguagem matemática capaz de facilitar a compreensão desse fenômeno, o qual pode ser utilizado não somente para calcular o horário estimado do óbito, mas também em outros tipos de situações que serão citadas no decorrer da sequência didática.

De acordo com João Pedro da Ponte, as fases do processo de construção de um modelo matemático são:

> a) identificar os elementos da situação que se pretende estudar; b) selecionar os objetos, relações, etc., relevantes para este fim; c) idealizá-los de forma apropriada para uma representação matemática; d) escolher um universo matemático para servir de base ao modelo; e, e) efetuar uma translação da situação para este universo. (Ponte, 1992, p. 102)

Enquanto que a importância de utilizar a Modelagem Matemática, para Jonei Cerqueira Barbosa (2004, p. 74) está associada à “motivação, facilitação da aprendizagem, preparação para utilizar a matemática em diferentes áreas, desenvolvimento de habilidades gerais de exploração e compreensão do papel sociocultural da matemática.” Sendo este último argumento intrinsecamente ligado ao desejo de preparar cidadãos aptos para atuarem de forma ativa na sociedade.

Dessa forma, a realização de passagens de situações reais para o modelo matemático propicia o desenvolvimento da capacidade de assimilação de modelos já existentes, além da construção de novos modelos e reflexão sobre suas utilizações.

Vale ressaltar também que as técnicas forenses utilizadas em processos de tentativas de resoluções de crimes, inclusive as técnicas relacionadas ao estudo da cronotanatognose, são geralmente abordadas em séries investigativas criminais (SIC). Portanto, as pessoas que consomem esse tipo de conteúdo televisivo possuem acesso a divulgação científica referente às ciências forenses, uma vez que

> (...) a difusão da ciência refere-se a todo processo, atuando como recurso utilizado para comunicar informações científicas ou tecnológicas. É uma categoria ampla e global que contempla dois conceitos, quais sejam, primeiro quando a veiculação dirige-se a especialistas, recebe o nome de “disseminação”, e quando é dirigida ao público em geral, denomina-se “divulgação científica”. (Campos, 2015, p. 49-50)

Assim, as SIC, tanto as que se baseiam em fatos reais como as que não retratam histórias verídicas, atuam como ferramenta de divulgação científica e servem de subsídio para a compreensão de temas relacionados às ciências forenses, pois mesmo a ficção tende a representar situações que ocorrem na realidade.

3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NOS PPC’S E EMENTAS DAS LICENCIATURAS E ENGENHARIAS DO IFBA

Analisando os Projetos Pedagógicos de cursos superiores do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia - campus Salvador, e suas respectivas ementas, pode-se notar a presença do conteúdo de Equações Diferenciais em 5 cursos de graduação dentre os 10 que a instituição oferece. Segue abaixo a relação destes cursos, as componentes curriculares (obrigatórias e/ou optativas) que apresentam o objeto de estudo mencionado e suas respectivas abordagens voltadas apenas para esse tema.

Tabela 1 - Equações Diferenciais no curso de Licenciatura em Matemática

Componente Curricular	Carga Horária	Semestre	Destaque do conteúdo na ementa
Cálculo Diferencial e Integral III	90h	IV	Equações Diferenciais Ordinárias (EDO’s) de 1ª ordem, ordens mais altas e lineares; Aplicações de EDO’s.
Cálculo Numérico	60h	VII	Solução numérica de equações diferenciais ordinárias.
Teoria das Equações Diferenciais Ordinárias	60h	Optativa	Operadores diferenciais lineares; Equações diferenciais lineares; Existência e unicidade de soluções; Dimensão do espaço de soluções de uma equação diferencial homogênea; Sistemas de equações diferenciais lineares; Teoremas de existência e unicidade; Estabilidade das soluções.

Fonte: Portal IFBA, 2015.

Tabela 2 - Equações Diferenciais no curso de Licenciatura em Física

Componente Curricular	Carga Horária	Semestre	Destaque do conteúdo na ementa
Cálculo Diferencial e Integral III	90h	V	Equações Diferenciais Ordinárias (EDO’s) de 1ª ordem, ordens mais altas e lineares; Aplicações de EDO’s.

Fonte: Portal IFBA, 2015.

Tabela 3 - Equações Diferenciais no curso de Engenharia Industrial Elétrica

Componente Curricular	Carga Horária	Semestre	Destaque do conteúdo na ementa

Cálculo Diferencial e Integral III	90h	III	Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) de 1ª ordem, ordens mais altas e lineares; Aplicações de EDO's.
Cálculo Numérico	60h	IV	Solução numérica de equações diferenciais ordinárias.
Sinais e Sistemas	60h	VI	Representação de sinais e sistemas lineares invariantes no tempo (LTI) no domínio do tempo: soma e integral de convolução; equações diferenciais e de diferença.
Laboratório Integrado II	60h	VI	Aproximação de equações diferenciais por equações de diferenças.

Fonte: Portal IFBA, 2017.

Tabela 4 - Equações Diferenciais no curso de Engenharia Industrial Mecânica

Componente Curricular	**Carga Horária**	**Semestre**	**Destaque do conteúdo na ementa**
Cálculo Diferencial e Integral III	90h	III	Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) de 1ª ordem, ordens mais altas e lineares; Aplicações de EDO's.
Cálculo Numérico	60h	V	Solução numérica de equações diferenciais ordinárias.

Fonte: Portal IFBA, 2019.

Tabela 5 - Equações Diferenciais no curso de Engenharia Industrial Química

Componente Curricular	**Carga Horária**	**Semestre**	**Destaque do conteúdo na ementa**
Cálculo Diferencial e Integral III	90h	III	Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) de 1ª ordem, ordens mais altas e lineares; Aplicações de EDO's.
Cálculo Numérico	60h	V	Solução numérica de equações diferenciais ordinárias.

Fonte: Portal IFBA, 2019.

Os cursos de graduação ofertados pelo IFBA - campus Salvador são: Administração, Engenharia Elétrica, Engenharia Mecânica, Engenharia Química, Licenciatura em Matemática, Licenciatura em Física, Licenciatura em Geografia, Tecnologia em Análise e Desenvolvimento de Sistemas, Tecnologia em Gestão de Eventos e Tecnologia em Radiologia.

Dessa forma, dentre as 10 graduações ofertadas, 6 são de exatas e as Equações Diferenciais compõem as matrizes curriculares de 5 cursos de exatas, com exceção apenas do curso de Tecnologia em Análise e Desenvolvimento de

Sistemas. Portanto, percebe-se a necessidade de se pensar e elaborar estudos que explorem o tema, visto que ele está presente em 83,33% dos cursos superiores de exatas desta instituição.

As tabelas acima constatam as abordagens das aplicações do conteúdo de Equações Diferenciais e suas respectivas técnicas de resolução analítica, tanto nas licenciaturas bem como nas engenharias. De acordo com o Projeto Pedagógico dos cursos de engenharia, o objetivo dessas graduações é formar engenheiros capazes de solucionarem desafios que envolvam as áreas de mecânica, elétrica e química, além de dedicarem-se às diversas necessidades inerentes a estas profissões, com visão crítica e inovadora. (Portal IFBA, 2019)

No que se refere aos PPC's dos cursos de Licenciatura em Matemática e Física, o objetivo, por sua vez, é formar docentes com uma sólida base nessas áreas para atuarem na Educação Básica e Profissional, possibilitando experiências que lhes permitam acessar a realidade educacional brasileira, bem como vivenciar, na prática, novas propostas de ensino que promovam o enriquecimento da aprendizagem destas disciplinas. (Portal IFBA, 2015)

Dessa maneira, além de percebermos a presença acentuada das Equações Diferenciais nas ementas dos cursos mencionados, podemos notar também a importância de se obter este conhecimento para essas graduações, haja vista que as Equações Diferenciais possibilitam modelar situações e/ou problemas que tendem a se aproximar do real. Logo, não podemos pensar no ensino de Equações Diferenciais sem pensar em suas aplicações.

Para formação de graduandos e profissionais da área de licenciatura em matemática, física e engenharias, é pertinente que se desenvolva o conhecimento acerca das Equações Diferenciais, afinal tais conhecimentos propiciam descrever matematicamente e interpretar o comportamento dos fenômenos físicos na realidade. Assim, o domínio deste conteúdo se torna um objeto de aprendizagem prioritário, pois as "(...) equações diferenciais não são simplesmente uma mera coleção seca de métodos, fatos e fórmulas, mas um assunto vibrante com os quais as pessoas podem trabalhar." (Cullen; Zill, 2001)

Por conta disso, no tópico seguinte será evidenciada uma proposta de ensino que contém uma das aplicabilidades possíveis deste conteúdo, de forma a proporcionar e intensificar o entendimento da conexão existente entre as Equações Diferenciais e o sistema real modelado, no que tange a investigação criminal.

4 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Antoni Zabala (1998, p. 18) define sequência didática como “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais (...).” Nessa perspectiva, o presente tópico apresentará uma proposta de sequência didática que, inicialmente, revisará brevemente conceitos e alguns métodos de resolução de equações diferenciais, com foco nas equações diferenciais de primeira ordem (considerando que os alunos já viram esse assunto anteriormente), e por fim, mostrará aplicações baseadas na Lei de Resfriamento de Newton, com ênfase na determinação do instante aproximado da morte.

Esta sequência didática visa conduzir o planejamento dos docentes, os quais pretendem apresentar aplicações das equações diferenciais para suas turmas. Portanto, por se tratar deste objeto de conhecimento, o qual vimos que está muito presente em diversas componentes curriculares dentre os cursos de exatas no geral, o público alvo são os estudantes das licenciaturas em matemática e física, e também os estudantes de engenharia. Além disso, a metodologia utilizada é a aula expositiva participativa, a quantidade prevista de aulas necessárias para colocá-la em prática são 4 aulas de 50 minutos cada (podendo haver flexibilidade de tempo para mais ou menos a depender da disponibilidade do professor) e o objetivo geral é proporcionar a compreensão de como as equações diferenciais de primeira ordem contribuem na resolução de casos criminais, a partir de sua aplicação para obtenção do instante aproximado da morte.

Momento 1 - Tema da aula: Introdução às Equações Diferenciais.

Objetivo da aula: Apresentar a definição de equação diferencial e classificá-la quanto ao tipo, à ordem e à linearidade.

Orientações didáticas: Definir uma equação diferencial da seguinte forma:

<u>Definição</u>: Uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada de equação diferencial (ED), a qual pode ser classificada de acordo com o tipo, a ordem e a linearidade.

<u>Classificação pelo Tipo</u>:

- Se uma equação contém somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes, com relação a uma única variável independente, ela é chamada de equação diferencial ordinária (EDO).

  Exemplos:

$$1)\ \frac{dy}{dt} + 4y = 1$$

$$2)\ \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dx} = 0$$

Explicar que quando uma variável depende de outra, ou de outras, ela é chamada de dependente. Assim, ela não pode assumir qualquer valor, pois depende de outras variáveis. No entanto, se uma variável pode assumir qualquer valor, independentemente de outra variável, ela é chamada de independente.

Portanto, no primeiro exemplo *t* é a variável independente e *y* = *y(t)* é a variável dependente. Sendo assim, questionar aos alunos quais as variáveis dependentes e independente do segundo exemplo, e em seguida apresentar *v* = *v(x)* e *u* = *u(x)* como variáveis dependentes e *x* como variável independente, de forma a solucionar este questionamento.

- Se uma equação envolve as derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a duas ou mais variáveis independentes, ela é chamada de equação diferencial parcial (EDP).

  Exemplos:

$$1)\ \frac{du}{dy} =- \frac{dv}{dx}$$

$$2)\ \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u}{dt^2} - 2\frac{du}{dt}$$

Explicar que no primeiro exemplo *u* = *u(y)* e *v* = *v(x)* são as variáveis dependentes, enquanto que as variáveis independentes são *y* e *x*. Da mesma maneira, no segundo exemplo, *u* = *u(x,t)* é a variável dependente, enquanto que *x* e *t* são as variáveis independentes.

<u>Classificação pela Ordem</u>: A maior ordem da derivada em uma equação diferencial é, por definição, a ordem da equação.

Exemplos:

$$1)\ \frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$$

$$2)\ a^2\frac{d^4u}{dx^4} + \frac{d^2u}{dt^2} = 0$$

Explicar que o primeiro exemplo refere-se a uma equação diferencial ordinária de segunda ordem. Em seguida, questionar o tipo e a ordem do segundo exemplo, e posteriormente, explicar que trata-se de uma equação diferencial parcial de ordem quatro.

Classificação como Linear ou Não-Linear: Uma equação diferencial é chamada de linear quando pode ser escrita na forma:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

As equações diferenciais lineares são caracterizadas por duas propriedades:

i) A variável dependente y e todas as suas derivadas são do primeiro grau, ou seja, a potência de cada termo envolvendo *y* é 1.

ii) Cada coeficiente depende apenas da variável independente *x*.

Uma equação que não é linear é chamada de não linear.

Exemplos:

$$1)\ x^3\frac{d^3 y}{dx^3} - x^2\frac{d^2 y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} + 7y = e^x$$

$$2)\ y\frac{dv}{dy} + x\frac{dv}{dx} - v^2 = 0$$

Explicar que o primeiro exemplo refere-se a uma equação diferencial ordinária de terceira ordem e linear, pois satisfaz as propriedades (i) e (ii). Isto é, x^3, $-x^2$, $2x$ são os coeficientes que dependem da variável independente *x* e 7 é uma constante. Em seguida, solicitar que os alunos classifiquem o segundo exemplo quanto ao tipo, ordem e linearidade, e posteriormente, salientar que trata-se de uma equação diferencial parcial de primeira ordem e não-linear, pois não satisfaz a propriedade (i), visto que a equação não é do 1º grau, mas sim do 2º grau.

As definições, classificações e exemplos utilizados no Momento 1 da sequência foram retirados do livro "Equações Diferenciais", de Dennis G. Zill e Michael R. Cullen.

Momento 2 - Tema da aula: Método de Resolução: Variáveis Separáveis.

Objetivo da aula: Apresentar o método das variáveis separáveis para resolver equações diferenciais lineares de primeira ordem.

Orientações Didáticas: Salientar para os estudantes que agora que eles já sabem reconhecer uma equação diferencial, incluindo o seu tipo, ordem e linearidade, eles passarão a resolvê-las, a princípio as que se referem às equações diferenciais lineares de primeira ordem.

Para isso, existem alguns métodos de resolução que poderão ser aplicados a depender do tipo da equação de primeira ordem que iremos lidar, dentre eles, o método das variáveis separáveis. Para explicar a resolução deste método, é importante relembrar a definição de equação separável.

Definição: Uma equação diferencial da forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

é chamada separável ou tem variáveis separáveis.

Uma equação separável também pode ser escrita como

$$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x).$$

Quando $h(y) = 1$, temos:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)$$

$$dy = g(x)dx$$

$$\int dy + C_1 = \int g(x)dx + C_2$$

$$\int dy = \int g(x)dx + C_2 - C_1$$

Fazendo $C_2 - C_1 = C$,

$$\int dy = \int g(x)dx + C$$

$$y = \int g(x)dx + c \qquad (1)$$

onde a equação (1) é solução para $\frac{dy}{dx} = g(x)$.

Mas, caso $y = f(x)$, temos:

$$h(f(x))f'(x) = g(x)$$

$$\int h(f(x))f'(x)dx + C_1 = \int g(x)dx + C_2$$

Como $dy = f'(x)dx$ e se considerarmos $C_2 - C_1 = C$, assim

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx + C \qquad (2)$$

Logo, a equação (2) indica o procedimento na resolução para equações diferenciais separáveis.

A definição de equação separável foi retirada do livro "Equações Diferenciais", de Dennis G. Zill e Michael R. Cullen.

Momento 3 - Tema da aula: Exemplo para aplicação do método das variáveis separáveis.

Objetivo da aula: Realizar a demonstração do cálculo que possibilita obter o instante aproximado da morte, com base na Lei de Resfriamento de Newton, utilizando o método das variáveis separáveis.

Orientações didáticas: Apresentar o enunciado da Lei de Resfriamento de Newton: “A taxa de variação da temperatura de um corpo (sem fonte interna) é proporcional à diferença entre sua temperatura e a do meio ambiente” (Bassanezi; Ferreira Jr., 1988, p. 43) e explicar que, no Cálculo Diferencial e Integral, a derivada nada mais é do que “a taxa segundo a qual uma variável muda em relação a outra” (Anton; Bivens; Davis, 2007). Assim, é possível aplicar a Modelagem Matemática para reescrever o enunciado desta lei em uma linguagem matemática que expressa uma equação diferencial,

$$\frac{dT}{dt} = -k\left(T - T_a\right) \tag{3}$$

onde *k* é uma constante de proporcionalidade não nula, positiva e pertencente ao conjunto dos números reais; *t* é o instante de tempo; *T* é a temperatura corporal; T_a é a temperatura constante do ambiente.

Explicar que esse modelo matemático pode ser utilizado para descobrir o possível horário da morte de uma pessoa vítima de homicídio. Além disso, o sinal negativo no início do segundo membro da equação provém do fato de que se considerarmos uma situação em que $T > T_a$, então haverá resfriamento corporal à medida que o tempo avança, e portanto, a taxa de variação da temperatura do corpo, sem fonte de calor, será menor que zero.

Em seguida, solicitar que os estudantes classifiquem a equação (3) quanto ao tipo, ordem e linearidade, além de questionar como poderíamos desenvolvê-la utilizando o método da Separação de Variáveis. Posteriormente esclarecer que a equação (3) é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem e pode ser resolvida pelo método da Separação de Variáveis da seguinte forma:

$$\frac{dT}{\left(T - T_a\right)} = -kdt \tag{4}$$

Integrando ambos os membros da equação (4), temos:

$$\int \frac{dT}{\left(T - T_a\right)} = \int -\ kdt$$

$$ln\left(T\ - T_a\right) + C_1 = -\ kt\ + C_2$$

$$ln\left(T\ - T_a\right) = -\ kt\ + C_2 - C_1$$

Fazendo $C_2 - C_1 = C_3$, afinal a diferença entre duas constantes continua sendo uma constante, temos:

$$ln\left(T\ - T_a\right) = -\ kt\ + C_3$$

$$log_e^{\ (T - T_a)} = -\ kt\ + C_3$$

Como $log_a^{\ b} = c$ é equivalente a $a^c = b$, então:

$$e^{-kt + C_3} = T\ - T_a$$

Como $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$, então:

$$e^{-kt}e^{C_3} = T\ - T_a$$

Sabendo que "*e*" (algarismo neperiano cujo valor é 2,718...) é uma constante e C_3 também, então substituindo $e^{C_3} = C$, sendo *C* constante e isolando *T*, temos:

$$T\ = T_a +\ Ce^{-kt} \tag{5}$$

Portanto, a equação (5) é a solução da equação (3). No entanto, se imaginarmos o instante em que a vítima é encontrada, $t\ = 0$, sua temperatura $T(0)\ = T_0$ será expressa por:

$$T_0 = T_a +\ Ce^{-k.0}$$

Logo,

$$C\ = T_0 - T_a$$

Dessa forma, podemos encontrar a expressão que representa a constante de proporcionalidade *k*, para isso basta substituir *C* na equação (5),

$$T\ = T_a + \left(T_0 - T_a\right)e^{-kt}$$

$$e^{-kt} = \frac{T - T_a}{T_0 - T_a} \tag{6}$$

Fazendo $t\ = t_1$ e $T\left(t_1\right) = T_1$ e substituindo na equação (6), temos:

$$e^{-kt_1} = \frac{T_1 - T_a}{T_0 - T_a}$$

$$ln\, e^{-kt_1} = ln\left(\frac{T_1 - T_a}{T_0 - T_a}\right)$$

$$-\ kt_1 \cdot ln\, e = ln\left(\frac{T_1 - T_a}{T_0 - T_a}\right)$$

$$k = -\ ln\left(\frac{T_1 - T_a}{T_0 - T_a}\right) \cdot \frac{1}{t_1} \quad (7)$$

onde k é a constante de proporcionalidade; T_0 é a temperatura corporal inicial após a morte; T_1 é a temperatura corporal após um intervalo de tempo; t_1 é o intervalo de tempo entre as temperaturas corporais coletadas; T_a é a temperatura constante do ambiente.

Em seguida, fazendo $T_1 = T_m$ e $t_1 = t_m$, e substituindo na equação (7), a qual expressa a constante de proporcionalidade, é possível obter o instante aproximado da morte por meio da seguinte expressão:

$$k = -\ ln\left(\frac{T_m - T_a}{T_0 - T_a}\right) \cdot \frac{1}{t_m}$$

$$t_m = -\ ln\left(\frac{T_m - T_a}{T_0 - T_a}\right) \cdot \frac{1}{k}$$

onde T_0 é a temperatura corporal inicial após a morte; T_m é a temperatura corporal no instante da morte; t_m é o instante aproximado da morte; T_a é a temperatura constante do ambiente; k é a constante de proporcionalidade.

Nota-se que o valor de t_m é de fato aproximado, pois não podemos saber com total certeza a temperatura do corpo no instante da morte (T_m), sendo assim, a essa variável geralmente é atribuído o valor de 36,5ºC, haja vista que a temperatura corporal de um ser humano em condições normais de saúde gira em torno desse parâmetro. Portanto, se considerarmos que a vítima no instante da morte encontrava-se em estado febril ou com determinadas vestimentas de frio ou até mesmo apresentando outros fatores que podem alterar consideravelmente sua temperatura, o resultado obtido em t_m se afastará da realidade.

Momento 4 - Tema da aula: Método de Resolução: Fator Integrante.

Objetivo da aula: Apresentar o método do fator integrante para resolver equações diferenciais lineares de primeira ordem.

Orientações didáticas: Reforçar para a turma que além do método de resolução ensinado anteriormente, existem outros e um deles é o método do fator integrante. Inicialmente, para maior entendimento, é necessário apresentar a definição de equação linear.

Definição: Uma equação diferencial é chamada de equação linear quando ela pode ser representada da forma

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x). \tag{8}$$

Se dividirmos toda a equação (8) pelo coeficiente $a_1(x)$, considerando $P(x) = \frac{a_o(x)}{a_1(x)}$ e $f(x) = \frac{g(x)}{a_1(x)}$, podemos reescrevê-la de uma maneira mais útil:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x) - P(x)y$$

$$dy = [f(x) - P(x)y]dx$$

$$dy + [P(x)y - f(x)]dx = 0 \tag{9}$$

onde $P(x)$ e $f(x)$ são funções contínuas em um intervalo *I*.

Multiplicando ambos os membros da equação (9) por uma função $\mu(x)$, chamada fator de integração, temos:

$$\mu(x)dy + \mu(x)[P(x)y - f(x)]dx = 0 \tag{10}$$

Nesse momento, é necessário relembrar o critério para uma equação diferencial exata. Sejam $M(x, y)$ e $N(x, y)$ funções contínuas com derivadas parciais contínuas em uma região retangular R definida por $a < x < b$, $c < y < d$. Então, uma condição necessária e suficiente para que $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ seja uma expressão diferencial exata é:

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$$

Portanto, o primeiro membro da equação (10) será uma expressão diferencial exata se:

$$\frac{d}{dx}\mu(x) = \frac{d}{dy}\mu(x)[P(x)y - f(x)]$$

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu P(x)$$

Esta é uma equação separável em que podemos determinar $\mu(x)$. Assim:

$$\frac{d\mu}{\mu} = P(x)dx$$

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int P(x)dx$$

$$ln(\mu) = \int P(x)dx$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$$

Vale salientar para os estudantes que não precisamos usar uma constante de integração nesse caso, pois a equação (10) não se altera se a multiplicarmos por uma constante.

Ao substituirmos $\mu(x)$ na equação (10), temos:

$$e^{\int P(x)dx} dy + e^{\int P(x)dx} [P(x)y - f(x)]dx = 0$$

$$e^{\int P(x)dx} dy + e^{\int P(x)dx} P(x)ydx = e^{\int P(x)dx} f(x)dx$$

$$d[e^{\int P(x)dx} y] = e^{\int P(x)dx} f(x)dx$$

$$\int d[e^{\int P(x)dx} y] = \int e^{\int P(x)dx} f(x)dx$$

$$e^{\int P(x)dx} y = \int e^{\int P(x)dx} f(x)dx + c$$

Isolando y, é possível solucionar a equação diferencial $\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$ pelo método do Fator Integrante da seguinte maneira:

$$y = e^{-\int P(x)dx} \int e^{\int P(x)dx} f(x)dx + ce^{-\int P(x)dx}$$

As definições de equação diferencial linear e equação diferencial exata foram retiradas do livro "Equações Diferenciais", de Dennis G. Zill e Michael R. Cullen.

Momento 5 - Tema da aula: Exemplo para aplicação do método do fator integrante.

Objetivo da aula: Realizar a demonstração do cálculo que possibilita obter o instante aproximado da morte, com base na Lei de Resfriamento de Newton, utilizando o método do fator integrante.

Orientações didáticas: Apresentar novamente o exemplo utilizado no momento 3 da sequência para obter o instante aproximado da morte, aplicando o método do fator integrante para que os estudantes compreendam a demonstração desse cálculo de uma outra maneira e percebam que independente do método de resolução adotado, a solução é a mesma.

Inicialmente, exibir para a turma, mais uma vez, a equação diferencial que modela a Lei de Resfriamento de Newton e propor a busca de sua solução utilizando o método do Fator Integrante. Feito isso, após reservar um tempo para os estudantes desenvolverem, é recomendável seguir para a correção:

$$\frac{dT}{dt} =- k\left(T - T_a\right)$$

$$\frac{dT}{dt} =- kT + kT_a$$

$$\frac{dT}{dt} + kT = kT_a \tag{11}$$

Em seguida, explicar que a equação (11) assemelha-se a uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem, da forma

$$\frac{dT}{dt} + P(t)T = f(t)$$

Assim, é possível solucioná-la através do método do fator integrante. Para isso, é necessário definir o fator de integração $\mu(t)$. Como sabemos que $\mu(t) = e^{\int P(t)dt}$, e nesse caso $P(t) = k$, então:

$$\mu(t) = e^{\int k dt}$$

$$\mu(t) = e^{kt}$$

Multiplicando ambos os membros da equação (11) pelo fator de integração, temos:

$$e^{kt}\frac{dT}{dt} + e^{kt}kT = e^{kt}kT_a \tag{12}$$

Como $\frac{d(ae^{bx})}{dx} = a' \cdot e^{bx} + a \cdot e^{bx} \cdot b$, podemos reescrever o primeiro membro da equação (12) da seguinte forma:

$$\frac{d(Te^{kt})}{dt} = e^{kt}kT_a$$

$$d(Te^{kt}) = e^{kt}kT_a dt$$

$$\int d(Te^{kt}) = \int e^{kt} kT_a dt$$

$$Te^{kt} + C_1 = kT_a \int e^{kt} dt$$

Sabendo que $\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + c$, então

$$Te^{kt} + C_1 = kT_a \frac{e^{kt}}{k} + C_2$$

$$Te^{kt} = e^{kt} T_a + C_2 - C_1 \qquad (13)$$

Fazendo $C_2 - C_1 = C$, afinal a diferença entre duas constantes continua sendo uma constante, e dividindo ambos os membros da equação (13) por e^{kt}, temos:

$$T = T_a + \frac{C}{e^{kt}} = T_a + Ce^{-kt}$$

A partir deste momento, o processo para obter a expressão que representa t_m (instante aproximado da morte) é similar ao que foi realizado no momento 3 da sequência, visto que a equação acima é igual a equação (5).

Momento 6 - Tema da aula: Situações-Problema.

Objetivo da aula: Resolver situações-problema que envolvam casos criminais para que os alunos percebam a utilidade das equações diferenciais no âmbito da investigação.

Orientações didáticas: Solicitar aos estudantes que solucionem os seguintes casos:

1) (Problema baseado em fatos reais, retirado integralmente da dissertação de Luciano Drigo Gomes, p. 49) Um publicitário foi encontrado morto em uma periferia da grande Goiânia dentro do seu carro em um lote baldio, no dia 21 de fevereiro de 2004. O perito chegou ao local às 23 horas e 30 minutos, depois de um morador do bairro ter feito a denúncia. Este perito aferiu a temperatura do cadáver, em 34,8°C. Uma hora depois, aferiu novamente, encontrando 34,1°C. A temperatura dentro do veículo era a mesma do ambiente, 20°C, haja vista que os vidros se encontravam abertos. O laudo do Instituto de Criminalística aponta que a vítima estava com a cabeça tombada para baixo quando recebeu o disparo de um revólver calibre 38. O autor do disparo estava do lado esquerdo da vítima, podendo estar

sentado no banco do motorista ou no banco traseiro. O tiro foi disparado a curta distância e atingiu a nuca. "Quase de encosto à nuca. Não houve reação da vítima", afirma o delegado responsável pelo caso. Foram também encontrados fios de cabelo e três impressões digitais, que serão comparadas às de um dos acusados de participação no crime. Qual seria, contudo, o horário provável em que o publicitário foi vitimado?

Resolução: De acordo com as informações fornecidas pela investigação, $T_0 = 34,8°C$, $T_1 = 34,1°C$, $T_a = 20°C$ e $t_1 = 1\,h$. Substituindo esses dados na equação que expressa a constante de proporcionalidade, temos:

$$k =- ln\left(\frac{T_1-T_a}{T_0-T_a}\right)\cdot\frac{1}{t_1} =- ln\left(\frac{34,1-20}{34,8-20}\right)\cdot\frac{1}{1} =- ln\left(\frac{14,1}{14,8}\right) = 0,0484523834$$

Considerando que o publicitário estava em condições normais de saúde no instante da sua morte e que nenhum fator possa ter alterado consideravelmente a sua temperatura corporal, adotaremos $T_m = 36,5°C$. Portanto,

$$t_m =- ln\left(\frac{T_m-T_a}{T_0-T_a}\right)\cdot\frac{1}{k} =- ln\left(\frac{36,5-20}{34,8-20}\right)\cdot\frac{1}{0,0484523834} =- 2,244124901\,h$$

Convertendo o valor encontrado acima para horas, minutos e segundos, temos:

$$1\,h \rightarrow 60\,min$$

$$0,244124901\,h \rightarrow x\,min$$

$$x = 60 \cdot 0,244124901 = 14,64749406\,min$$

$$1\,min \rightarrow 60\,s$$

$$0,64749406\,min \rightarrow x\,s$$

$$x = 60 \cdot 0,64749406 = 38,8496436 \simeq 39\,s$$

Dessa forma, podemos constatar que desde a chegada do perito na cena de crime, a vítima já tinha sido vitimada, aproximadamente, há 2 horas, 14 minutos e 39 segundos. Assim, para descobrir o horário possível do óbito, basta subtrairmos esse resultado do horário em que o perito chega ao local e inicia a aferição das temperaturas. Logo, assassinaram o publicitário por volta das 21 horas, 15 minutos e 21 segundos.

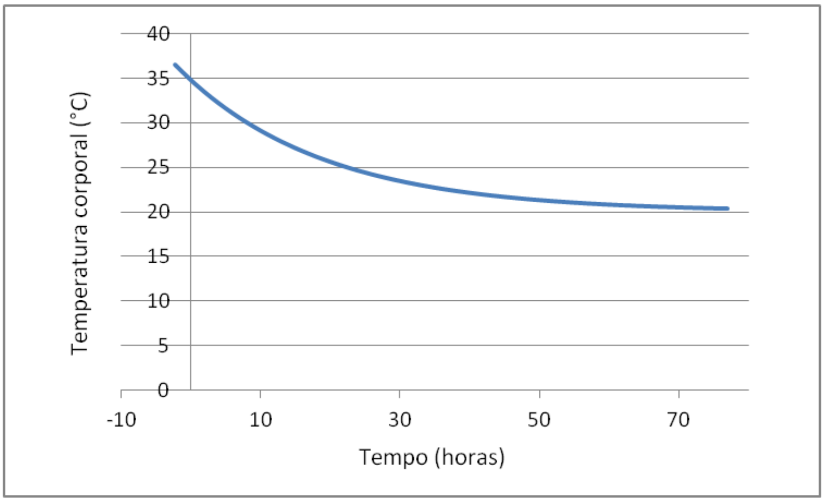
Em seguida, apresentar aos estudantes o gráfico que exprime o comportamento da temperatura corporal da vítima, em °C, em função do tempo, em horas, o qual é descrito por uma função exponencial, cuja lei de formação é dada pela equação $T = T_a + \left(T_0 - T_a\right)e^{-kt}$, como forma de favorecer a compreensão deles a respeito da distribuição dos valores trabalhados.

Para isso, substituindo os valores da temperatura do ambiente, temperatura inicial do corpo após a morte e da constante de proporcionalidade na equação acima, temos:

$$T = 20 + (34,8 - 20)e^{-0,0484523834t}$$

Assim, ao montarmos uma tabela no Excel e atribuirmos valores para o instante de tempo (partindo do instante aproximado da morte) obteremos as respectivas temperaturas corporais do cadáver, conforme o gráfico a seguir.

Gráfico 1: Curva de Resfriamento Situação-Problema 1



Fonte: Elaborado pela autora, 2023.

2) Uma adolescente de 15 anos, cujo nome é preservado por conta das características da ocorrência, foi encontrada morta em sua casa no dia 13 de junho de 2014. Após a denúncia, parte do Departamento de Polícia Técnica (DPT) chegou ao local às 15 horas e 40 minutos desse mesmo dia. A temperatura do corpo foi medida imediatamente pelo perito e o valor obtido foi de 32,5ºC. Duas horas depois a temperatura corporal da adolescente tinha caído para 30ºC, enquanto que a temperatura no cômodo em que o corpo foi encontrado era de 22ºC. A perícia sabia também que a temperatura normal de um ser humano vivo costuma ser de 36,5ºC. A suspeita da polícia era de que ali havia ocorrido um homicídio doloso (intencional), ainda que ela estivesse pendurada por uma corda ligada ao teto. “Ela estava com a mão entre o pescoço e a corda, como se quisesse pedir ajuda ou fugir de um agressor, o que motivou a suspeita de um homicídio”, relatou a médica legista

especialista em tanatologia (expressão grega que significa estudo da morte). Com esses dados, como a perícia pode determinar a hora do crime?

Resolução: Os dados coletados na cena de crime constatam que $T_0 = 32,5°C$ $T_1 = 30°C$, $T_a = 22°C$, $T_m = 36,5°C$ e $t_1 = 2\,h$. Com isso, a constante de proporcionalidade será igual a:

$$k =- \,ln\left(\frac{T_1 - T_a}{T_0 - T_a}\right) \cdot \frac{1}{t_1} =- \,ln\left(\frac{30-22}{32,5-22}\right) \cdot \frac{1}{2} = 0,1359668577$$

Substituindo k na equação abaixo, temos:

$$t_m =- \,ln\left(\frac{T_m - T_a}{T_0 - T_a}\right) \cdot \frac{1}{k} =- \,ln\left(\frac{36,5-22}{32,5-22}\right) \cdot \frac{1}{0,1359668577} =- \,2,3739122733\,h$$

Como t_m está em função de horas, encontraremos os minutos e segundos equivalentes fazendo a seguinte conversão:

$$1\,h \rightarrow 60\,min$$

$$0,101252146\,h \rightarrow x\,min$$

$$x = 60 \cdot 0,3739122733 = 22,434736398\,min$$

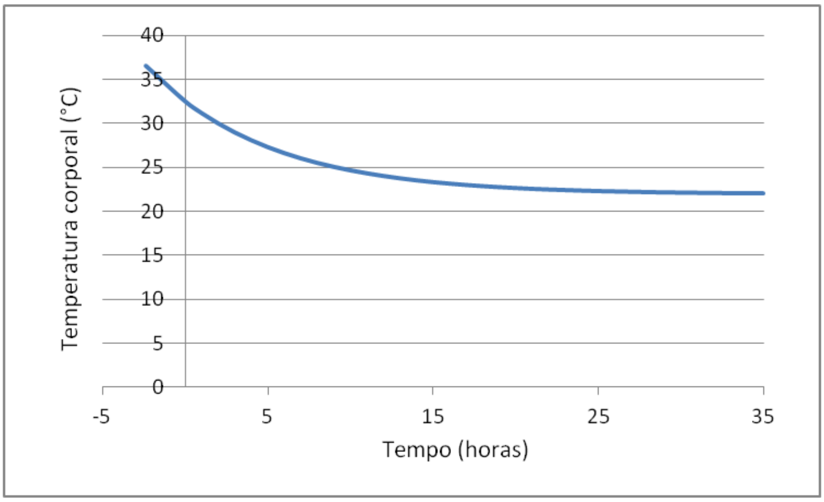
$$1\,min \rightarrow 60\,s$$

$$0,434736398\,min \rightarrow x\,s$$

$$x = 60 \cdot 0,434736398 = 26,08418388 \simeq 26\,s$$

Logo, desde que o DPT chegou à cena do crime, a adolescente já estava morta há, aproximadamente, 2 horas, 22 minutos e 26 segundos. Subtraindo esse resultado do horário das 15 horas e 40 minutos, temos que a vítima veio a óbito no instante estimado de 13 horas, 17 minutos e 34 segundos do dia 13 de junho de 2014. O gráfico a seguir descreve o resfriamento da temperatura corporal da adolescente com o passar do tempo.

Gráfico 2: Curva de Resfriamento Situação-Problema 2



Fonte: Elaborado pela autora, 2023.

Momento 7 - Tema da aula: Outras aplicações envolvendo a Lei de Resfriamento de Newton.

Objetivo da aula: Apresentar outros tipos de aplicações utilizando a Lei de Resfriamento de Newton que possibilite descrever matematicamente alguns fenômenos físicos, analisando seu comportamento num intervalo de tempo e as tendências comportamentais que o mesmo possa assumir.

Orientações didáticas: Explicar que anteriormente vimos como obter o instante aproximado da morte por meio da Lei de Resfriamento de Newton, mas existem inúmeras outras situações em que podemos utilizar desta lei para prever determinadas informações.

Por exemplo, quando deixamos uma xícara de café, um copo de leite quente, um bolo que acabou de sair do forno ou até mesmo um pote de sorvete em uma mesa, de acordo com Isaac Newton, eles irão esfriar gradualmente (com exceção do sorvete que irá aquecer) até atingir a temperatura do ambiente em que estão. Portanto, podemos estimar, por exemplo, quanto tempo leva até uma substância/objeto quente esfriar ou frio aquecer e atingir uma temperatura específica.

Em seguida, apresentar a seguinte situação-problema, retirada de forma adaptada do livro “Introdução a Equações Diferenciais - Teoria e Aplicações” de Florin Diacu, e propor a sua resolução:

3) Nos fins dos anos 1950, *chefs* como Jean Pierre Troisgros, Paul Bocuse e Michel Guérard introduziram uma nova filosofia de cozinha, *la nouvelle cuisine*, cuja principal finalidade era o reconhecimento de *chefs* como artistas criativos. *Chefs* em

restaurantes famosos no mundo inteiro podem hoje ganhar maiores salários que os executivos seniores que jantam nestes restaurantes. O segredo de seu sucesso repousa na detalhada e intensa pesquisa da quantidade e mistura de ingredientes, do tempo de cozimento, etc. Podemos imaginar um exemplo simples de como a lei do aquecimento pode ajudar. Um filé de salmão, inicialmente a 10º C, é cozido num forno com uma temperatura constante de 204º C. Após 10 minutos, a temperatura do filé é medida em 65,5º C. Considerando que o peixe é fino e macio, suponhamos numa primeira aproximação que sua temperatura é uniforme. Quanto tempo leva até que o salmão seja considerado mal passado, digamos a 93,3º C?

Resolução: Como a temperatura do forno $\left(T_a\right)$ é maior que a temperatura inicial do salmão (T), então o salmão irá se aquecer à medida que o tempo avança, e portanto, a taxa de variação da temperatura do salmão será maior que zero. Assim,

$$\frac{dT}{dt} = k\left(T - T_a\right)$$

Utilizando o método de Separação de Variáveis, temos:

$$\frac{dT}{T-T_a} = kdt$$

$$\int \frac{dT}{\left(T-T_a\right)} = \int kdt$$

$$ln\left(T - T_a\right) = kt + C_3$$

$$e^{kt+C_3} = e^{kt} \cdot e^{C_3} = e^{kt} \cdot C = T - T_a$$

$$T = T_a + Ce^{kt} \tag{14}$$

No instante em que o salmão é posto no forno, $t = 0$, sua temperatura $T(0) = T_0$ será expressa por:

$$T_0 = T_a + Ce^{k.0} \tag{15}$$

$$C = T_0 - T_a$$

Para encontrar a expressão que representa a constante de proporcionalidade *k*, basta substituir *C* na equação (15),

$$T = T_a + \left(T_0 - T_a\right)e^{kt}$$

$$e^{kt} = \frac{T-T_a}{T_0-T_a} \tag{16}$$

Fazendo $t = t_1$ e $T(t_1) = T_1$ e substituindo na equação (16), temos:

$$e^{kt_1} = \frac{T_1 - T_a}{T_0 - T_a}$$

$$ln\, e^{kt_1} = ln\left(\frac{T_1 - T_a}{T_0 - T_a}\right)$$

$$k = ln\left(\frac{T_1 - T_a}{T_0 - T_a}\right) \cdot \frac{1}{t_1} \qquad (17)$$

$$k = ln\left(\frac{65,5 - 204}{10 - 204}\right) \cdot \frac{1}{10} = -\ 0,0336987833$$

onde k é a constante de proporcionalidade; $T_0 = 10°\,C$ é a temperatura inicial do salmão no forno; $T_1 = 65,5°\,C$ é a temperatura do salmão após um intervalo de tempo; $t_1 = 10\,min$ é o intervalo de tempo entre as temperaturas do salmão; $T_a = 204°\,C$ é a temperatura constante do ambiente (forno).

Em seguida, fazendo $T_1 = T_f$ e $t_1 = t_f$, e substituindo na equação (17), a qual expressa a constante de proporcionalidade, é possível obter o instante aproximado em que o salmão estará na temperatura desejada $(T_f = 93,3°\,C)$ por meio da seguinte expressão:

$$k = ln\left(\frac{T_f - T_a}{T_0 - T_a}\right) \cdot \frac{1}{t_f}$$

$$t_f = ln\left(\frac{T_f - T_a}{T_0 - T_a}\right) \cdot \frac{1}{k} = ln\left(\frac{93,3 - 204}{10 - 204}\right) \cdot \left(-\frac{1}{0,0336987833}\right) = 16,6485037265\,min$$

Sabendo que,

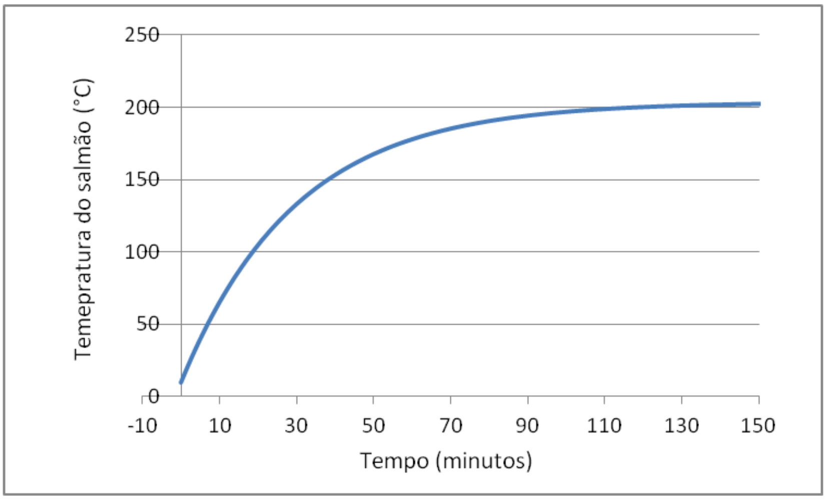
$$1\,min \rightarrow 60\,s$$

$$0,6485037265\,min \rightarrow x\,s$$

$$x = 60 \cdot 0,6485037265 = 38,91022359 \simeq 39\,s$$

Logo, o salmão atingirá a temperatura de 93,3° C após cerca de 16 minutos e 39 segundos no forno, conforme Gráfico 3, o qual representa o comportamento da temperatura do salmão, em °C, em função do tempo, em minutos. A lei de formação desta função exponencial é dada pela equação $T = T_a + (T_0 - T_a)e^{kt}$.

Gráfico 3: Curva de Aquecimento Situação-Problema 3



Fonte: Elaborado pela autora, 2023.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir dos argumentos supracitados, percebe-se a importância do estudo de Equações Diferenciais, visto que este objeto de conhecimento é uma ferramenta que permite selecionar situações cotidianas e modelá-las matematicamente de forma a garantir a compreensão da larga aplicabilidade da matemática na sociedade.

Com isso, torna-se necessário enfatizar a utilidade da matemática a partir da apresentação de contextualizações diversas em sala de aula, como forma de garantir que o aluno trabalhe o assunto de uma maneira diferenciada. Em vez de apenas ouvir a explicação e fazer exercícios, que muitas vezes não atraem a atenção, o aluno é introduzido a um novo mundo, onde a matemática passa a ser vista como algo interessante e deixa de ter a imagem de um saber inalcançável e/ou sem sentido.

Assim, ao evidenciar situações-problema envolvendo a investigação criminal, as quais normalmente são mencionadas em séries investigativas criminais, e revelar como é possível utilizar métodos, que inicialmente aparentam ser somente teóricos, no seu processo de resolução, faz com que o estudante entenda a relevância, se interesse pelo estudo da matemática, notando que ela está presente em tudo a sua volta.

Além disso, espera-se que a proposta de sequência didática aqui apresentada não só contribua na compreensão e resolução de casos criminais para obtenção do instante aproximado da morte por meio das Equações Diferenciais, bem como propiciar o estímulo da aprendizagem deste conteúdo, mas também influencie e direcione pesquisas futuras que propiciem criar e/ou aprimorar atividades de ensino aprendizagem que permitam aos estudantes verificarem, na prática, a aplicação da teoria.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, Thamires de Fátima Silva; SANTOS, Vanessa Ventura. **Cronotanatognose**. Repositório Institucional da UFAL, Maceió. Sarvier, 1ª edição, p. 269-273, 2020. Disponível em: https://www.repositorio.ufal.br/bitstream/123456789/11158/1/Cronotanatognose.pdf. Acesso em: 20 ago. 2023.

ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo Volume 1**.Oitava edição. Porto Alegre: Bookman, 2007.

BARBOSA, J.C. **Modelagem Matemática: O que é, Por que, Como.** Veritati, n. 4, p. 73-80, 2004. Disponível em:<http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/2010/Matematica/artigo_veritati_jonei.pdf>. Acesso em: 03 jun. 2023.

BARROS, Franciéllen et al. **Ciências forenses: princípios éticos e vieses**. Revista Bioética, Brasília, v. 29, n. 1, p. 55-65, março, 2021.

BASSANEZI, R. C.; FERREIRA, W. C. F. Jr. **Equações diferenciais com aplicações**. São Paulo: Harbra, 1988.

BERNARD, Rosilane Pontes; DAVOK, Delsi Fries. Avaliação dos índices de evasão nos cursos de graduação da Universidade do Estado de Santa Catarina - UDESC**. Revista da Avaliação da Educação Superior**, Campinas, 2016.

‘Bom dia, Verônica’ é sucesso internacional e aparece no ranking da Netflix. **AnaMaria**, 2022. Disponível em: https://revistaanamaria.com.br/noticias/streaming/bom-dia-veronica-e-sucesso-internacional-e-aparece-no-ranking-da-netflix.phtml. Acesso em: 23 mai. 2023.

CAMPOS, Carlos Roberto Pires. **Divulgação Científica e Ensino de Ciências: Debates Preliminares**. Volume 4. Espírito Santo: Ifes, 2015.

CULLEN, Michael R.; ZILL, Dennis G. **Equações Diferenciais, volume 1**. Terceira edição. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.

COSTA, Andréa. **Apresentação**. Portal IFBA, 2018. Disponível em: https://portal.ifba.edu.br/dgcom/salvador/ensino/cursos/apresentacao. Acesso em: 17 set. 2023.

Descubra as melhores séries policiais para maratonar. **Brasil Paralelo**, 2022. Disponível em: https://www.brasilparalelo.com.br/artigos/series-policiais. Acesso em: 23 mai. 2023.

Desistência atinge 7 em cada 10 alunos de formação de professores em exatas. **Folha de S. Paulo**, 2023. Disponível em: https://www1.folha.uol.com.br/educacao/2023/05/desistencia-atinge-7-em-cada-10-alunos-de-formacao-de-professores-em-exatas.shtml. Acesso em: 18 jun. 2023.

Dexter: New Blood bate recorde de audiência e faz história nos EUA. **Uol**, 2022. Disponível em:https://noticiasdatv.uol.com.br/noticia/series/dexter-new-blood-bate-recorde-de-audiencia-e-faz-historia-nos-eua-73035#:~: texto%20 epis%C3%B3dio%20final%20da%20 mini s%C3%A9rie,no%20 streaming%2C%20com%202%20 mil%C3%B5es. Acesso em: 23 mai. 2023.

FERRAZ, Gabrielly. Lupin atinge a marca de 70 milhões de visualizações e supera grandes sucessos da Netflix. **Mundo Negro**, 2021. Disponível em: https://mundonegro.inf.br/lupin-atinge-a-marca-de-70-milhoes-de-visualizacoes-e-supera-grandes-sucessos-da-netflix/. Acesso em: 23 mai. 2023.

GOMES, Luciano Drigo. **Determinação do Instante de Morte, Falsificação de Obras de Arte e Outros Problemas Curiosos.** Dissertação (Mestrado em Matemática) - Faculdade de Matemática, Universidade Federal de Goiás. Goiânia, p. 106. 2017.

GUEDES, Diandra. Dahmer | Série da Netflix supera marca de 1 bilhão de horas assistidas. **Canaltech,** 2022. Disponível em: https://canaltech.com.br/series/dahmer-serie-da-netflix-supera-marca-de-1-bilhao-de-horas-assistidas-232207/. Acesso em: 23 mai. 2023.

MUSSLINER, Bruno Osvaldo et al. O problema da evasão universitária no sistema público de ensino superior: uma proposta de ação com base na atuação de uma equipe multidisciplinar. **Brazilian Journal of Development,** 2021.

NUNES, Maria Clara. 'Linha Direta' explode em audiência e ibope impressionante pega Globo de surpresa. **Uol**, 2023. Disponível em: https://contigo.uol.com.br/noticias/tv/linha-direta-explode-em-audiencia-e-ibope-impressionante-pega-globo-de-surpresa.phtml. Acesso em: 23 mai. 2023.

PONTE, João Pedro. **Problemas de Matemática e situações da vida real**. Revista de Educação, vol. 11. nº 2, out. 1992.

ZABALA, Antoni. **A Prática Educativa: Como educar**. Porto Alegre, 1998.