Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

***Campus* Valença**

Licenciatura em Matemática

Joerbert dos Santos Sena

A Resolução de Problemas como abordagem metodológica para o ensino de Matemática: uma proposta de Sequência Didática sobre Lei dos Senos e Lei dos Cossenos

Valença – BA

2023

Joerbert dos Santos Sena

A Resolução de Problemas como abordagem metodológica para o ensino de Matemática: uma proposta de Sequência Didática sobre Lei dos Senos e Lei dos Cossenos

Monografia apresentada a Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia, *Campus* Valença, como requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Marcelo de Araújo Lino
Coorientador: Prof. Dr. Diogo S. D. da Silva

Valença – BA

2023

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO SISTEMA DE BIBLIOTECAS DO IFBA, COM OS DADOS FORNECIDOS PELO(A) AUTOR(A)

S474r Sena, Joerbert dos Santos

A resolução de problemas como abordagem metodológica para o ensino de matemática: uma proposta de sequência didática sobre lei dos senos e lei dos cosseno / Joerbert dos Santos Sena; orientador Marcelo de Araújo Lino; coorientador Diogo S. D. da Silva -- Valença : IFBA, 2023.

81f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) -- Instituto Federal da Bahia, 2023.

1. Ensino- aprendizagem. 2. Matemática- avaliação. 3. Sequência didática. 4. Lei dos senos. 5. Lei dos cosseno. I. Lino, Marcelo de Araújo, orient. II. Silva, Diogo S. D. da, coorient. III. TÍTULO.

CDD:370.733

“Educar verdadeiramente não é ensinar fatos novos ou enumerar fórmulas prontas, mas sim preparar a mente para pensar.”

Albert Einstein

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por tudo. Principalmente pelo dom da vida, pela constante presença e por ter permitido a realização desse objetivo.

A minha mãe Caroline Sousa dos Santos, ao meu pai José Alberto de Sousa Sena, ao meu irmão Alberto dos Santos Sena e a minha noiva Márcia Roberta de Jesus Santos Evangelista que foram muito importantes nessa caminhada estando ao meu lado nos momentos mais difíceis dispensando amor, companheirismo e incentivos constantes.

A todos meus familiares que acreditaram em mim, depositando suas forças e por sempre torcerem pelo meu sucesso.

A cada um dos meus professores que contribuíram de forma grandiosa para o meu crescimento pessoal e profissional, em especial, ao meu orientador Me. Marcelo de Araújo Lino, ao coorientador Dr. Diogo Soares Dórea da Silva, à professora Me. Eliete da Silva Barros, ao professor Me. Roque da Silva Lyrio e à professora Me. Cíntia Karla Alves Souza, que também me “apresentou” a metodologia Resolução de Problemas pela primeira vez.

Aos meus colegas do curso, pela amizade, pelos momentos de estudos, partilha de conhecimento e de experiências que dividiram comigo nesses anos alegrias, angústias, conquistas e sabedorias.

RESUMO

O objetivo das tendências metodológicas atuais é incentivar os estudantes a participarem ativamente da construção do seu próprio conhecimento. Nesse contexto, o ensino de Matemática através da Resolução de Problemas tem sido reconhecido como uma metodologia alternativa que coloca o aluno no centro do processo, permitindo a construção do conhecimento matemático. Este trabalho teve como propósito estudar e analisar a metodologia Resolução de Problemas e sua importância no processo de Ensino-Aprendizagem da Matemática. Além disso, foi desenvolvida uma Sequência Didática para abordar as Leis dos Senos e Lei dos Cossenos, demonstrando uma forma efetiva de lecionar esses conceitos. A pesquisa foi conduzida por meio de uma abordagem bibliográfica e qualitativa, com o intuito de aprimorar e atualizar o conhecimento existente, através de uma investigação científica baseada em obras já publicadas. Os resultados obtidos revelaram o potencial significativo da Resolução de Problemas para a melhoria do processo de ensino da Matemática, destacando a importância das técnicas e materiais adequados utilizados pelo professor para facilitar a compreensão dos alunos.

Palavras-Chave: Ensino-Aprendizagem-Avaliação; Lei dos Cossenos; Lei dos Senos; Resolução de Problemas; Sequência Didática.

ABSTRACT

The aim of current methodological trends is to encourage students to actively participate in building their own knowledge. In this context, the teaching of Mathematics through Problem Solving has been recognized as an alternative methodology that places the student at the center of the process, allowing the construction of mathematical knowledge. The purpose of this work was to study and analyze the Problem Solving methodology and its importance in the Mathematics Teaching-Learning process. In addition, a Didactic Sequence was developed to address the Laws of Sines and Cosines, demonstrating an effective way of teaching these concepts. The research was conducted through a bibliographic and qualitative approach, with the aim of improving and updating existing knowledge, through a scientific investigation based on already published works. The results obtained revealed the significant potential of Problem Solving to improve the Mathematics teaching process, highlighting the importance of appropriate techniques and materials used by the teacher to facilitate students' understanding.

Keywords: Teaching-Learning-Assessment; Law of Cosines; Law of Sines; Problem Solving; Following Teaching.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 Introdução

A Educação Básica brasileira vive um momento de crise, que se intensificou ainda mais após a pandemia da Covid-19. Segundo o Anuário Brasileiro da Educação Básica de 2021[1] divulgado pelo movimento Todos pela Educação, em parceria com a Editora Moderna, apenas 10,3% dos estudantes do Ensino Médio no Brasil tem proficiência adequada em Matemática, e apenas 37,1% têm aprendizagem adequada em Língua Portuguesa.

Para muitos, as disciplinas de Português e Matemática são independentes, porém, é comum perceber que nas aulas de Matemática muitos alunos se deparam com a dificuldade na resolução de problemas por conta da incompreensão textual das questões, uma vez que "para solucionar problemas matemáticos, na maioria das vezes, precisamos compreender o texto do enunciado e o comando da questão para que, depois de interpretado, seja feita a parte algébrica ou geométrica" (OLIVEIRA et al., 2019, p. 2).

Diante disso percebe-se a necessidade de melhorias na Educação Básica, principalmente nas disciplinas de Português e Matemática tendo em vista os baixos níveis de desempenho.

Segundo Silveira (2011), a Matemática é uma disciplina que traz consigo uma carga negativa de que a matéria é "difícil", tanto na Educação Básica quanto no nível superior e pós-graduações. Nesse sentido, Martins (2011) destaca que historicamente a disciplina é considerada difícil e chata, e os alunos trazem esse pensamento consigo, sendo um dos maiores obstáculos justamente esse pensamento, uma vez que para você aprender algo, é preciso estar disposto a isso.

Outro fator importante é destacado na teoria das inteligências múltiplas do cientista norte-americano Howard Gardner, a qual diz que cada pessoa tem predisposição por uma "área de conhecimento" e devemos levar isso em consideração, uma vez que nem todos os alunos vão ter uma facilidade para compreender a Matemática. Para Gardner a facilidade para compreender a Matemática se enquadra na inteligência lógico-matemática, que consiste na capacidade de usar os números de forma efetiva e direcionada, utilizando a sua sensibilidade a padrões e relacionamentos lógicos, afirmações e proposições, funções e outras abstrações relacionadas. Dessa forma, dentre os processos utilizados por esta inteligência estão: a categorização, classificação, inferência, generalização, cálculo e testagem de hipóteses (ARMSTRONG, 2001, p. 14).

[1] Não houveram mais edições do Anuário. Por conta da Lei de Proteção de Dados as edições foram canceladas até o presente momento (TODOS PELA EDUCAÇÃO, 2022).

Cada ser humano tem sua história formada através de suas experiências e do meio que habita (RODRIGUES, 2008), assim, é importante entender que as suas experiências não são e não servem como parâmetro incontestável para outros. Dessa forma, cabe ao professor, sabendo que não é possível chegar a uma sala de aula e encontrar uma turma homogênea, pensar, refletir, selecionar os melhores procedimentos de aprendizagem a serem utilizados, assim como estabelecer um ambiente de troca e cooperação na sala de aula (VYGOTSKY, 2007). Portanto buscar alcançar o maior número de alunos é uma tarefa difícil, mas imprescindível para o docente. Nessa perspectiva a utilização das metodologias de Ensino da Matemática têm como principal objetivo diversificar o ensino, tentando englobar todos os tipos de alunos, uma vez que cada sujeito é diferente do outro, logo, cada um aprende de uma maneira distinta.

1.1 Problema

Como a utilização da metodologia Resolução de Problemas pode contribuir para uma melhora no ensino e na aprendizagem da Matemática?

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo Geral

Compreender como a utilização da metodologia Resolução de Problemas pode contribuir para uma melhora no ensino e na aprendizagem da Matemática.

1.2.2 Objetivos específicos

- Analisar as características da metodologia Resolução de Problemas;
- Correlacionar os estudos da Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos com o cotidiano através da metodologia Resolução de Problemas;
- Propor uma sequência didática.

2 Metodologia

O presente estudo busca compreender como a metodologia Resolução de Problemas (RP) pode contribuir na melhoria do ensino-aprendizagem-avaliação da Matemática. Para isso, optamos por uma abordagem qualitativa, que de acordo com Minayo (2009, p. 21), normalmente é utilizada em pesquisas que têm como objetivo principal expor a lógica que permeia a prática social que ocorre na realidade, uma vez que, "[...] o ser humano se distingue não só por agir, mas por pensar sobre o que faz e por interpretar suas ações dentro e a partir da realidade vivida". Em outras palavras, a pesquisa qualitativa permite a compreensão de múltiplos aspectos da realidade.

Ainda segundo a autora, a pesquisa qualitativa se preocupa com questões que não podem ser quantificadas, ou seja, ela trabalha com o universo de significados, de motivações, crenças, valores e/ou atitudes.

Nessa perspectiva, fizemos a utilização da pesquisa bibliográfica definida por Bastos e Keller (1995, p. 53) como "uma investigação metódica acerca de um determinado assunto com o objetivo de esclarecer aspectos em estudo". Esse tipo de pesquisa está fortemente inserido no meio acadêmico e tem a finalidade de aprimoramento e atualização do conhecimento, através de uma investigação científica de obras já publicadas.

Para Andrade (2010, p. 25):

> A pesquisa bibliográfica é habilidade fundamental nos cursos de graduação, uma vez que constitui o primeiro passo para todas as atividades acadêmicas. Uma pesquisa de laboratório ou de campo implica, necessariamente, a pesquisa bibliográfica preliminar. Seminários, painéis, debates, resumos críticos, monográficas não dispensam a pesquisa bibliográfica. Ela é obrigatória nas pesquisas exploratórias, na delimitação do tema de um trabalho ou pesquisa, no desenvolvimento do assunto, nas citações, na apresentação das conclusões. Portanto, se é verdade que nem todos os alunos realizarão pesquisas de laboratório ou de campo, não é menos verdadeiro que todos, sem exceção, para elaborar os diversos trabalhos solicitados, deverão empreender pesquisas bibliográficas.

De acordo com SOUSA et al. (2021), a pesquisa bibliográfica é fundamental na construção da pesquisa científica, uma vez que nos permite conhecer melhor o objeto de estudo, sendo utilizados os livros, artigos científicos, teses, dissertações, anuários, revistas, leis e outros tipos de fontes escritas já publicadas como instrumentos para a realização da pesquisa bibliográfica.

A pesquisa bibliográfica, para Fonseca (2002), é realizada:

> [...] a partir do levantamento de referências teóricas já analisadas, e publicadas por meios escritos e eletrônicos, como livros, artigos científicos, páginas de web sites. Qualquer trabalho científico inicia-se com uma pesquisa bibliográfica, que permite ao pesquisador conhecer o que já se estudou sobre o assunto.

Na realização da pesquisa bibliográfica o pesquisador tem que ler, refletir e escrever sobre o que estudou, se dedicar ao estudo para aprimorar os fundamentos teóricos já construídos durante toda a sua carreira. Assim, após o aprofundamento dos temas trabalhados aqui, proporemos uma sequência didática (SD) sobre trigonometria, com os objetos de conhecimento Lei dos Senos e Lei dos Cossenos.

A SD é definida por Zabala (1998), como um “conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos”. Podemos entender SD como uma série de “passos” que conduzem a um objetivo, sendo que os níveis de cognição e dificuldade de cada etapa vão gradualmente aumentando, levando o aluno a construir seu conhecimento, sendo assim, é um conjunto de aulas planejadas que pode ter a duração variando de acordo com a necessidade (GOMES, 2009).

Entretanto, devemos nos atentar para não confundir plano de aula com SD, uma vez que o plano de aula é feito para apenas uma aula, já a sequência didática é planejada *a priori* para trabalhar uma unidade temática completa, tendo como propósito o incentivo do aluno na busca de novos conhecimentos (CONCEIÇÃO, 2019).

A partir desse momento, iremos elucidar os aportes teóricos necessários para posteriormente expor a proposta de sequência didática.

3 Referencial Teórico

3.1 Resolução de problemas (RP)

A Matemática, como conhecemos hoje, surgiu no Antigo Egito e no Império Babilônico por volta de 3500 a.C., porém, na pré-história os seres humanos já usavam os conceitos de contar e medir. De acordo com Miyaschita (2002), o processo de contagem surge antes mesmo da escrita, na percepção entre semelhanças e desigualdades, pois:

> A percepção de quantidade pelo homem primitivo era praticamente intuitiva, como a dos animais. A contagem para o homem era: um, dois e muitos, ou seja, a partir de um grupo de três ou quatro objetos o homem dizia simplesmente que havia muitos objetos nesse grupo (MIYASCHITA, 2002, p. 5).

A Matemática surge a partir da relação do ser humano com a natureza, porém, é datado que desde a Antiguidade já havia registros de problemas e suas resoluções. O Papiro de Ahmes[2], por exemplo, foi escrito por volta de 1650 a.C. e já continha problemas de Matemática resolvidos (BRAGA et al., 2017).

De acordo com Martins (2022), os problemas matemáticos têm ocupado um lugar central no ensino desde a Idade Antiga, entretanto "percebe-se que, ainda hoje, nem sempre seu uso vem acompanhado de um consciente posicionamento sobre seu significado" (ALLEVATO, 2005, p. 39).

Em meados do século passado, foi fixado um grande marco que situou de vez um direcionamento metodológico do ensino da Matemática por meio do formalismo e da estruturação dos fundamentos da Matemática (BRAGA et al., 2017). A partir do Seminário de Royaumont (1959), foram estruturadas as linhas que estabeleceram a reforma da Matemática Moderna: Teoria dos Conjuntos, Introdução das Estruturas Algébricas, abandono da Geometria Euclidiana e ênfase na Álgebra Linear. Nesse período a Resolução de Problemas no Ensino da Matemática ganhou força, principalmente sob a influência de George Pólya, considerado um dos maiores matemáticos do século XX, o primeiro a apresentar uma heurística de RP específica para a Matemática.

O currículo de diversos países foi influenciado pelo Movimento da Matemática Moderna, no qual se baseava no rigor dos fundamentos e na formalidade, porém, "depois de

[2] Também conhecido como Papiro de Rhind. Papiro era o nome das folhas cultivadas no Egito Antigo utilizadas na escrita, quanto ao Papiro de Ahmes, é um dos primeiros documentos de caráter matemático (SILVA, D. N.).

alguns anos esse movimento passou a ser questionado pelo fato de os resultados estarem muito distante do esperado" (MARTINS, 2022, p. 30).

De acordo com Andrade e Onuchic (2017, apud MARTINS, 2022, p. 30):

> Assim, em paralelo a esse movimento de intensas reformas, que ficou conhecido como Movimento da Matemática Moderna, o ensino de Resolução de Problemas, enquanto campo de pesquisa em Educação Matemática e suas implicações curriculares, começou a ser investigado de forma sistemática sob a influência dos estudos desenvolvidos por George Pólya, nos Estados Unidos, nos anos 60.

De acordo com Melo et al. (2018), a RP é fruto de estudos desenvolvidos por Pólya no ano de 1944, entretanto, seu estudo começou realmente nos anos 60 nos Estados Unidos, limitando-se a solucionar e treinar problemas. Já nos anos 70, ela ganhou espaço mundialmente, sendo utilizada como uma ferramenta de estudo da Matemática e também trazendo estratégias para solucionar problemas.

Com a "rejeição" do Movimento da Matemática Moderna durante a década de 1980, educadores matemáticos que acreditavam no potencial da RP continuaram trabalhando nessa busca pelo ensino e aprendizagem com compreensão e significado (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011). Em 1980, o *National Council of Teachers of Mathematics*[3] (NTCM), que é uma organização profissional para professores de Matemática nos Estados Unidos, publicou um documento no qual a RP deveria ser o foco da Matemática escolar (ONUCHIC, 1999).

A partir desse momento, de acordo com Onuchic e Allevato (2011), o foco da RP foi posto nos processos de pensamento matemático e de aprendizado por descoberta, porém, não havia uma clareza de ideias necessárias para direcionar bons resultados com o ensino de Matemática por meio da metodologia em questão.

No Brasil, no ano de 1997, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) foram criados sob influência das ideias contidas nos documentos publicados pelo NTCM (MARTINS, 2022). Desde então, a RP vem sendo estudada como um recurso de aprendizagem e uma perspectiva de se aprender Matemática para resolver problemas.

Muitos alunos possuem uma visão negativa sobre a Matemática, mitos que são criados pela sociedade há muito tempo, como mostra o exemplo a seguir:

> Os problemas matemáticos têm uma e somente uma resposta correta. Existe somente uma forma correta de resolver um problema matemático e, normalmente, o correto é seguir a última regra demonstrada em aula pelo professor. Os estudantes 'normais' não são capazes de entender Matemática; somente podem esperar memorizá-la e aplicar mecanicamente aquilo que aprenderam sem entender. Os estudantes que

[3] Conselho Nacional dos Professores de Matemática.

> entenderam Matemática devem ser capazes de resolver qualquer problema em cinco minutos ou menos. A Matemática ensinada na escola não tem nada a ver com o mundo real. As regras formais da Matemática são irrelevantes para os processos de descobrimento e de invenção (POZO, 1998, p. 46).

O aprendizado de muitos estudantes é prejudicado por ideias equivocadas sobre a Matemática, e tais pressupostos levarão tempo para serem desconstruídos na sociedade. Na maioria das vezes, a apatia que demonstram em sala de aula é reflexo da espera pelo caminho a ser seguido para a resolução, visto que pensam que existe um único caminho para a resolução e que este caminho lhes é dado pelo professor (BRANDT; MORETTI, 2016).

Nas etapas da educação, percebe-se a necessidade de que os alunos obtenham estratégias que lhes proporcionem a apreensão, por si mesmo, de novos conhecimentos e não apenas a obtenção de conhecimentos prontos (SOARES, 2013). Dessa forma, a RP é vista como uma tendência metodológica para ensino-aprendizagem da Matemática, uma vez que segundo Allevato (2005), falar em RP é falar sobre métodos, meios e regras que conduzem à descoberta, inovação, investigação, propondo ao aluno uma nova abordagem de técnicas e estratégias que exigem pensamentos matemáticos diversos, podendo promover o gosto pela descoberta da resolução e interesse pela Matemática.

Concordamos com Onuchic e Allevato (2011), quando falam que podemos pensar em ensino, aprendizagem e avaliação como três coisas distintas, que podem ou não ocorrerem simultaneamente, ou como decorrência uma da outra. A partir da necessidade de introduzir a avaliação contínua e formativa no processo de aprendizagem, o Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas (GTERP) coordenado pela Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic, cujo é um centro de atividades de aperfeiçoamento, de investigações e de produção científica na linha de RP, formado por alunos e ex-alunos do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática (PPGEM – UNESP[4]) em Rio Claro/SP, que desenvolvem pesquisas nessa linha. Com tais pesquisas foi passado a empregar a palavra composta ensino-aprendizagem-avaliação por entender que a avaliação é um componente extremamente importante, uma vez que ela permite ao professor o direcionamento das práticas de ensino, e também constatar até que ponto o aluno progrediu ou não.

Posteriormente, o GTERP passou a empregar a palavra composta ensino-aprendizagem-avaliação como uma metodologia, pois, segundo Onuchic e Allevato (2011): “pretende-se que, enquanto o professor ensina, o aluno, como um participante ativo, aprenda, e que a avaliação

---

[4] Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática na Universidade Estadual Paulista. Iniciou suas atividades em 1984 com o Mestrado, implantando o Doutorado em 1993. Seu objetivo é a formação de docentes e pesquisadores em diversas especialidades da Educação Matemática.

se realize por ambos". A metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação tem procurado desenvolver e implementar o uso da avaliação integrada ao processo de ensino-aprendizagem, visando potencializar o desenvolvimento do estudante para garantir sucesso em matemática e auxiliar nos desenvolvimentos crítico e criativo (PIRONEL; VALLILO, 2017).

Se faz necessário que a avaliação seja contínua, para que se possa acompanhar o desenvolvimento dos alunos, ao passo que reorienta as práticas docentes quando for necessário. Desta forma, o professor quando avalia através da RP, considera tanto o trabalho do aluno quanto a sua própria prática docente, como é dito por Lima e Cosme (2017):

> Avaliar continuamente oferece a oportunidade do professor compreender as ideias anteriores dos alunos e identificar em qual etapa do raciocínio estão, podendo, com isso, planejar as formas de intervir e orientar a construção do conhecimento.

Ao considerarmos o ensino-aprendizagem-avaliação, buscamos que ao mesmo tempo em que o professor ensina, o aluno aprenda, e que a avaliação seja feita por ambas as partes, como cita Onuchic e Allevato (2011, p. 81):

> O aluno analisa seus próprios métodos e soluções obtidas para os problemas, visando sempre à construção de conhecimento. Essa forma de trabalho do aluno é consequência de seu pensar matemático, levando-o a elaborar justificativas e a dar sentido ao que faz. De outro lado, o professor avalia o que está ocorrendo e os resultados do processo, com vistas a reorientar as práticas de sala de aula, quando necessário.

Dessa forma, a aprendizagem significativa promove a ideia de que o ensino necessita de um diálogo prévio entre professor e aluno, de modo a sondar o que estes compreendem a respeito de tal conceito, formando assim uma troca de experiência para que possam ser acrescidas novas ideias (AUSUBEL, 2003).

Corriqueiramente o professor de Matemática da Educação Básica costuma passar para o aluno resolver um exercício ou problema, muitas vezes até influenciado pelos livros didáticos. No contexto de Educação Matemática, um problema pode despertar o gosto pelo trabalho mental, e até mesmo despertar a curiosidade do aluno para desenvolvê-lo a partir daquele problema.

É comum haver confusões acerca de quando a atividade desenvolvida se trata de RP ou de exercício dentro do ensino da Matemática. Para Onuchic e Allevato (2011), um problema "é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer". Para Contreras (1987, p. 71), um problema é "uma situação que não é familiar para uma pessoa; quando a novidade é sua característica fundamental e quando ela requer um tratamento distinto de uma mera aplicação rotineira", ou seja, podemos definir um "problema matemático" como sendo uma determinada conjuntura que não seja de total conhecimento do estudante e que não estejam claramente evidentes quais métodos ou caminhos devem ser utilizados em sua resolução, conforme define Vila e Callejo (2006, p. 27):

> Reservaremos, pois, o termo problema para designar uma situação, proposta com finalidade educativa, que propõe uma questão matemática cujo método de solução não é imediatamente acessível ao aluno/resolvedor ou ao grupo de alunos que tenta resolvê-la, porque não dispõe de um algoritmo que relaciona os dados e a incógnita ou de um processo que identifique automaticamente os dados com a conclusão e, portanto, deverá buscar, investigar, estabelecer relações e envolver suas emoções para enfrentar uma situação nova.

Entender a diferença entre problema e exercício é de fundamental importância para a imersão na metodologia de RP, uma vez que o problema é o ponto de partida no processo de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática (SOUZA, 2010), e o exercício é uma atividade que direciona o aluno a utilizar um conhecimento matemático, com a aplicação direta de algum algoritmo ou fórmula (MARTINS; BÔAS, 2020).

A RP pode ser compreendida como uma tendência metodológica que visa o amadurecimento intelectual do aluno, segundo Brasil (1997, p. 33):

> [...] é necessário desenvolver habilidades que permitam pôr à prova os resultados, testar seus efeitos, comparar diferentes caminhos, para obter a solução. Dessa forma de trabalho, o valor da resposta correta cede lugar ao valor do processo de resolução.

Ao adentrar no estudo sobre a RP, nos deparamos com algumas definições diferentes sobre a metodologia, e devemos identificar as suas diferenças. Segundo Schroeder e Lester (1989), existem três caminhos para abordá-la: ensinar sobre Resolução de Problemas; ensinar para resolver problemas de Matemática; ensinar Matemática através da Resolução de Problemas.

Passaremos, a partir deste momento, a discorrer sobre as diferentes abordagens.

3.1.1 Ensinar sobre Resolução de Problemas

Ensinar sobre Resolução de Problemas significa expor esse assunto como um conteúdo matemático, seu surgimento se dá pelas ideias trabalhadas por Pólya. Para Schroeder e Lester (1989), o professor que ensina sobre RP está tratando do modelo de Pólya ou de alguma variação dele, modelo no qual é composto por quatro fases para resolver problemas matemáticos: compreender o problema, construir um plano de ação, executar o plano e rever a resolução.

Para detalhar o modelo de Pólya, em seu livro "A arte de resolver problemas" ele enumerou as quatro fases exemplificando-as:

- O primeiro passo seria compreender o problema, saber onde se quer "chegar", ele relata que é uma tolice se tentar responder uma pergunta sem saber qual o seu significado;
- O segundo passo é estabelecer um plano. Talvez essa seja a etapa mais complexa, uma vez que encontrar um plano que funcione remete a ter conhecimentos prévios e/ou experiências em algum problema semelhante;
- O terceiro passo é a execução do plano. É mais uma tarefa de paciência e atenção: se o plano está traçado de forma correta, a execução do plano passa a ser um trabalho mais fácil;
- O quarto passo é a revisão da solução. Apesar desse passo ser deixado de lado na maioria das vezes, ele tem a sua importância, uma vez que fazendo testes poderá ser visto se a resolução está correta ou não.

Tal perspectiva não foi totalmente aceita pelos professores, uma vez que bastava o aluno memorizar os quatro passos e fazer a automatização de técnicas e algoritmos, que ele poderia chegar no resultado esperado.

3.1.2 Ensinar para resolver problemas

Segundo Schroeder e Lester (1989), ensinar para resolver problemas de Matemática se concentra sobre o modo em que a Matemática é ensinada para poder ser aplicada na resolução tanto de problemas rotineiros como os não rotineiros, ou seja, são dados muito exemplos de conceitos sobre o que estão estudando, onde o problema é apresentado logo após o conteúdo. O principal objetivo dessa abordagem é resolução do problema propriamente dito, como é dito por Souza (2010, p. 120):

> Já o trabalho de ensinar Matemática para poder resolver problemas enfatiza as estratégias a fim de resolver o problema. Tem a resolução de problemas como um fim, ou seja, a Matemática foi ensinada para resolver problemas, e a ênfase é dada na aplicação dos conteúdos matemáticos vistos anteriormente.

De acordo com Diniz (2001), essa perspectiva de ensino é muito comum nos livros didáticos, onde são apresentados os conteúdos matemáticos e depois os exercícios, e na maioria das vezes, percebe-se a ausência de significado para o estudante e uma linguagem não relacionada com o seu cotidiano.

Segundo Miranda (2015), hoje em dia essa abordagem continua sendo muito utilizada nas salas de aula, pois depois de o conteúdo ser ensinado pelo professor, é passada uma lista com vários outros exercícios do mesmo modelo, para que os alunos possam exercitar.

Ainda segundo o autor, ensinar para resolver problemas tem um viés tecnicista, onde o estudante resolve as questões através de formas "mecânicas", ou seja, utiliza de meios guiados como regras ou passos até que seja concluído o problema. A pedagogia tecnicista não se centra no professor, nem no educando, mas sim nos objetivos a serem alcançados, nos recursos e nas técnicas de ensino que, irão garantir o "sucesso" dos mesmos.

Segundo Fiorentini (1995), a pedagogia tecnicista trata-se de uma corrente pedagógica que busca potencializar os resultados da escola, tornando-a eficiente e funcional, com o objetivo de suprir a necessidade de mão-de-obra qualificada.

Podemos citar o professor de Matemática Luiz Roberto Dante na área de ensino para resolver problemas. Em seu livro "Formulação e resolução de problemas de matemática" são observadas algumas sugestões metodológicas com esse viés, onde o autor cita que:

> Ensinar a resolver problemas é uma tarefa muito mais complexa do que ensinar algoritmos e equações. A postura do professor ao ensinar um algoritmo é, em geral, a de um orientador que dá instruções, passo a passo, de como fazer. Na resolução de problemas, ao contrário, o professor deve funcionar como incentivador e moderador das ideias geradas pelos próprios alunos (DANTE, 2011, p. 34).

E assim como na perspectiva de ensinar sobre RP, o ensinar para resolver problemas segue uma lógica parecida, onde é determinado o passo a passo de como chegar a sua resposta.

3.1.3 Ensinar através da Resolução de Problemas

Por fim, o ensino através da Resolução de Problemas visa ser uma metodologia empregada ao ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática. Para Schroeder e Lester (1989), ensinar através de Resolução de Problemas é a forma mais coerente de ensino, pois o estudo de um conteúdo deve-se iniciar com um problema.

No olhar de Brito (2006), o estudo por meio da RP pode ajudar com o amadurecimento intelectual, saindo do concreto ao abstrato ou vice-versa, pois é gerador

> [...] de um processo através do qual o aprendiz vai combinar, na estrutura cognitiva, os conceitos, princípios, procedimentos, técnicas, habilidades e conhecimentos previamente adquiridos que são necessários para encontrar a solução com uma nova situação que demanda uma reorganização conceitual cognitiva (BRITO, 2006, p. 19).

O maior objetivo de se trabalhar com RP, de acordo com Redling (2011, p. 33), "é levar o educando a entender a Resolução de Problemas como um processo, onde o principal interesse está no raciocínio desenvolvido e não somente na resposta encontrada", uma vez que muitos alunos estão preocupados somente com o resultado final, por causa do sistema escolar que visa a sua aprovação. Por isso é bastante evidenciada a utilização de interdisciplinaridade, uma vez que conforme Colling (2008), "a prática de atividades interdisciplinares busca a garantia da construção de um conhecimento global, que rompa com as fronteiras da disciplina".

Os objetos de conhecimento da disciplina de Matemática, quando não são relacionados a assuntos do cotidiano, são vistos como algo difícil de entender. Porém, quando é feita uma ligação com outras áreas de conhecimento, a visão de onde os conteúdos são aplicados faz com que as pessoas percebam a sua real importância e utilização.

Buscando uma forma de auxiliar os professores na implantação desta metodologia, o GTERP, em 1998 com a participação de 45 professores integrantes de um Programa de Educação Continuada, criaram um Roteiro de Atividades que tornava possível a utilização da metodologia. A versão inicial do roteiro era composto das seguintes etapas: formar grupos e entregar uma atividade; o papel do professor; registrar os resultados na lousa; realizar uma plenária; analisar os resultados; buscar um consenso; fazer a formalização (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

Com a tentativa de preparar os estudantes com conhecimentos prévios necessários para tornar a metodologia mais eficaz, o GTERP fez alterações no roteiro e apresentou uma versão mais atualizada em 2021. Vale salientar, conforme Onuchic e Allevato (2011), que não existem formas rígidas para a aplicação da metodologia em sala de aula, sendo disposta das seguintes etapas:

1) Proposição do problema: para iniciar o trabalho, o professor seleciona, elabora ou aceita um problema. Esse problema será chamado de problema gerador, porque busca a construção de novos conteúdos, conceitos, princípios ou procedimentos;

2) Leitura individual: nessa etapa o problema é entregue a cada aluno para que ele faça a leitura individual do problema, possibilitando a reflexão e colocando-o em contato com a linguagem matemática, a fim de desenvolver sua própria compreensão do problema;

3) Leitura em conjunto: nessa etapa é solicitada outra leitura juntamente com a discussão do problema, dessa vez em pequenos grupos. Caso haja alguma dificuldade, o professor pode auxiliar na compreensão do problema e na resolução de problemas secundários, como por exemplo uma palavra desconhecida;

4) Resolução do problema: nessa fase inicia-se a resolução do problema pelos alunos em seus respectivos grupos;

5) Observar e incentivar: aqui o papel do professor é observar o desenvolvimento dos alunos, incentivando-os a utilizar conhecimentos prévios e técnicas já conhecidas;

6) Registro das resoluções na lousa: nesse momento, representantes dos grupos são convocados para registrar na lousa as suas soluções, independente se elas estão certas ou erradas;

7) Plenária: nessa etapa, diante das soluções expressas na lousa, o professor estimula os alunos a exporem e justificarem as suas ideias;

8) Busca do consenso: após a plenária, onde serão sanadas as dúvidas e analisadas as soluções, professor e alunos tentam chegar a um consenso sobre a solução;

9) Formalização do conteúdo: nessa etapa o professor registra na lousa uma apresentação "formal", organizada e estruturada em linguagem matemática;

10) Proposição de problemas: após a formalização do conteúdo, novos problemas são propostos aos alunos com base no problema gerador. Nessa etapa é gerado um ciclo que se configura pela construção de novos conhecimentos e pela resolução de novos problemas.

Essa última etapa tem um forte viés ao ensino para a Resolução de Problemas, o que não altera a concepção da metodologia, como é dito por Allevato (2005, p. 61):

> Isso significa que, quando o professor adota essa metodologia, os alunos podem aprender tanto sobre resolução de problemas, quanto aprendem Matemática para resolver novos problemas, enquanto aprendem Matemática através da resolução de problemas.

De acordo com Schroeder e Lester (1989), embora as três perspectivas de RP em teoria possam ser separadas, na prática elas podem acontecer em várias combinações e sequências. Dessa forma, no presente estudo utilizaremos uma combinação da RP enquanto Ensino-Aprendizagem-Avaliação junto com o ensino para a Resolução de Problemas.

3.2 O papel do professor no processo de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas

Atualmente, observamos tanto na comunidade de Educação Matemática quanto nas propostas curriculares, que existe um consenso no qual o uso das metodologias diferenciadas devem fazer parte da atividade docente como um importante componente curricular. (BRASIL, 1998).

Concordamos com Silva (2010) que o professor precisa considerar os diferentes aspectos dos alunos, sendo eles o afetivo, cognitivo, econômico, social, político, ético e moral. Ainda segundo a autora, tem-se que compreender que cada aluno é um ser único e, portanto, precisa ser respeitado e valorizado em sua singularidade. Isso significa que a aula precisa ter uma estrutura que atenda às necessidades da maioria da turma, sem priorizar apenas aqueles que têm facilidade, mas oportunizando a todos uma aprendizagem adequada.

Segundo Vygotsky (1996), é imprescindível que o educador utilize metodologias de ensino diferenciadas, de modo a promover no aluno uma aprendizagem significativa, seguindo a teoria de David Ausubel, na qual é ressaltado o papel dos docentes na proposição de situações que favoreçam a aprendizagem. Podemos entender metodologias diferenciadas como estratégias que ultrapassem a aplicação de algoritmos e conceitos matemáticos e que valorizem e transformem o educando em um sujeito ativo de seu próprio processo de aquisição de conhecimento.

Seguindo esse pressuposto, temos a metodologia de RP como a mais próspera. De acordo com Romanatto (2008), “nesse novo cenário de práticas educativas com o conhecimento matemático, a resolução de problemas se apresenta como um dos caminhos mais promissores para o ‘fazer matemática’ em nossas salas de aula”.

A proposta da RP sugerida por Onuchic (1999) segue um viés diferente daquela idealizada por Pólya, tendo em vista que as situações-problemas são encaradas como desafios que permitem os alunos terem a possibilidade de construir ou adquirir o conhecimento de conceitos, princípios ou procedimentos matemáticos (REDLING, 2011). A proposta agora sugerida tem valorizado os conhecimentos prévios dos alunos, uma vez que eles são desafiados a traçar suas próprias estratégias para resolver novas situações apresentadas como problemas.

Ambientando ao contexto nacional, a RP é reconhecida na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), tanto numa perspectiva de aprender Matemática para resolver problemas nos anos finais do Ensino Fundamental, quanto como um recurso para a aprendizagem (MARTINS et al., 2021). Ainda segundo o autor, no que se refere à etapa do Ensino Médio, percebe-se a utilização da RP em diferente perspectivas, onde se busca o desenvolvimento de habilidades e competências dos alunos que servirão para resolver problemas em diferentes contextos.

Em um cenário de diversidade de pessoas, se faz necessário o uso de diferente métodos para ensino, com o objetivo de abranger todos os indivíduos, como é dito na Base Nacional Comum para a Formação Inicial de professores da Educação Básica (BNC-Formação):

> [...] compromisso com as metodologias inovadoras e com outras dinâmicas formativas que propiciem ao futuro professor aprendizagens significativas e contextualizadas, em uma abordagem didático-metodológica alinhada com a BNCC, visando ao desenvolvimento da autonomia, da capacidade de resolução de problemas, dos processos investigativos e criativos, do exercício do trabalho coletivo e interdisciplinar, da análise dos desafios da vida cotidiana e em sociedade e das possibilidades de suas soluções práticas (BRASIL, 2019, p.5).

Assim, podemos perceber a necessidade de que o processo formativo do professor aborde diferentes metodologias de ensino, incluindo a RP.

Agora daremos início à fundamentação teórica a respeito do objeto de conhecimento Trigonometria.

4 Um Breve Histórico da Trigonometria

A palavra trigonometria vem do grego, em que “tri” significa três, “gonos” significa ângulos e “metron” significa medida. Acredita-se que o termo foi criado em 1595 pelo matemático alemão Bartholomaus Pitiscus (1561-1613) (MORAIS FILHO, 2014), porém, mesmo sabendo da origem do termo, não se sabe ao certo a sua origem enquanto ramo da Matemática. Entretanto, pode-se dizer que o início do desenvolvimento da Trigonometria se deu principalmente devido aos problemas gerados pela Astronomia, Agrimensura e Navegações, por volta do século IV ou V a.C., com os egípcios e babilônios (SILVA; SANTANA, 2012). Ainda de acordo com os autores citados anteriormente, em aproximadamente 1650 a.C., foi confeccionado no Egito o Papiro de Ahmes, o qual é possível encontrar problemas envolvendo a cotangente[5] das pirâmides onde se calculavam a inclinação de suas faces. Já na Babilônia foi encontrada a tabela de Plimpton 322, que contem essencialmente a tábua de secantes em escrita cuneiforme[6].

Indícios da Trigonometria também foram encontrados no Oriente, na China, em aproximadamente 1110 a.C., em que os triângulos retângulos eram frequentemente utilizados para medir comprimentos, distâncias e profundidades. Existe na literatura chinesa uma certa passagem que traduzida podemos entender como: “o conhecimento vem da sombra, e a sombra vem do gnômon[7]”, o que mostra que a trigonometria já era conhecida na China no segundo milênio antes de Cristo (FELIX, 2011).

Na Grécia, grandes matemáticos contribuíram para a construção do conhecimento geométrico, entre eles podemos destacar Thales de Mileto (625-546 a.C.), com o estudo da semelhança de triângulos que contribuiu para o desenvolvimento da Trigonometria, e Pitágoras (570-495 a.C.) que provou o teorema que recebe, em sua homenagem, seu nome: “em todo triângulo retângulo o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos”. Deste teorema surge o teorema fundamental da Trigonometria (COSTA, 1997), o qual falaremos posteriormente. Desse modo, podemos afirmar que a Trigonometria está intimamente ligada a Geometria.

Logo, podemos observar que apesar da Trigonometria não ter sido inicialmente apresentada de forma estruturada, ela já era estudada e aplicada por muitos estudiosos em situações diversas. Nota-se também que a Lei dos Senos e Lei dos Cossenos já estavam

[5] A cotangente é definida como o inverso da tangente.
[6] Nome dado devido ao fato de os números serem escritos com objetos em formato de cunha (BORGES, 2022).
[7] Haste vertical do relógio solar, que possibilita a projeção da sombra (BERGMANN; FRAQUELLI).

presentes em obras antigas, embora não fossem vistas como uma área da Trigonometria (MAIA, 2015).

A primeira amostra documentada de contribuição grega para o estudo da Trigonometria apareceu por volta de 180 a.C. quando Hipsícles, influenciado pela cultura babilônica, dividiu o zodíaco[8] em 360 partes. Essa ideia foi posteriormente generalizada por Hiparco para qualquer círculo (EVES, 2011).

Com o interesse de calcular a distância entre dois pontos da superfície terrestre e também o raio da Terra, foram feitas pesquisas pelo matemático Eratóstenes de Cirene (276-196 a.C.), responsável pela mais notável medida da Antiguidade para a circunferência da Terra, utilizando a semelhança de triângulos e razões trigonométricas (COSTA, 1997). Porém, mesmo com esses estudos podemos notar que durante dois séculos e meio compreendidos entre Hipócrates e Eratóstenes, a Trigonometria não teve grande avanço, como é dito por Boyer (1974): “de Hipócrates a Eratóstenes os gregos estudaram as relações entre retas e círculos e as aplicaram na Astronomia mas disso não resultou uma Trigonometria sistemática”.

Contudo, na segunda metade do século II a.C., ocorreu um grande marco na história da Trigonometria, quando o astrônomo Hiparco de Nicéia fortemente influenciado pela matemática babilônica fez um tratado em doze livros em que se ocupou da construção do que deve ter sido a primeira tabela trigonométrica. Hiparco foi o primeiro a determinar com precisão o nascimento e o desaparecimento das estrelas, utilizando para isso a tabela da função sombra[9] por ele calculada. Também construiu uma tabela trigonométrica com os valores das cordas de uma série de ângulos de 0º a 180º, porém, todos esses cálculos eram voltados para a Astronomia (UBERTI, 2003).

Ainda segundo o autor, a Trigonometria grega atingiu seu ápice com Cláudio Ptolomeu, autor da mais importante obra da Trigonometria da Antiguidade, surgida no século II d.C. em Alexandria, a “Syntaxis Mathemática” composta de treze volumes. Esse tratado é famoso por sua compacidade e elegância, e para distingui-lo de outros a ele foi dado o adjetivo de “o maior”, e por conta disso ele ficou conhecido como “Almagesto”, que significa em árabe “A Maior” (COSTA, 1977).

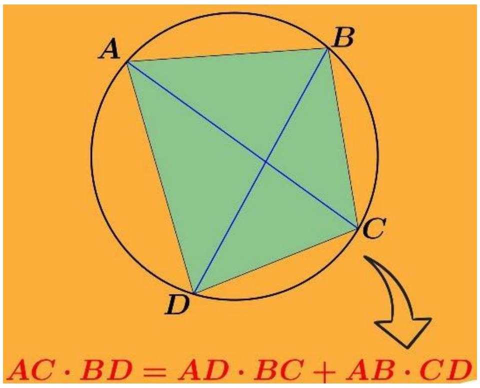
---

[8] Determinada zona da esfera celeste, é como uma cinta imaginária que se encontra dividida em doze partes (PORTO EDITORA).

[9] Função sombra era como a função cotangente era chamada, pois ela tinha ideias associadas a sombras projetadas por uma vara colocada na horizontal. A variação na elevação do Sol causava uma variação no ângulo que os raios solares formavam com a vara e, portanto modificava o tamanho da sombra (IME-USP, 2009).

No Almagesto temos um resultado que passou a ser conhecido como o “Teorema de Ptolomeu”: “Se ABCD é um quadrilátero convexo inscrito num círculo, então a soma dos produtos dos lados opostos é igual ao produto das diagonais” (FIGURA 1).

Figura 1 - Teorema de Ptolomeu



Fonte: MATECA (2019)

A partir desse resultado, operando com as cordas dos arcos, Ptolomeu chegou a uma equivalente das fórmulas do seno da soma e do seno da diferença de dois arcos, isto é $sen\ (a + b)$ e $sen\ (a - b)$. Especialmente a fórmula encontrada para a corda da diferença, foi usada por ele para a construção da tabela trigonométrica (FELIX, 2011).

Ptolomeu dividiu a circunferência em 360 partes e o diâmetro em 120 partes, seguindo a mesma influência babilônica de Hiparco. Usou $\frac{377}{120}$ como aproximação para o número π. Embora não fizesse uso dos termos seno e cosseno, mas sim de cordas, ele demonstrou o Teorema Fundamental da Trigonometria, no qual $sen^2x + cos^2x = 1$ (UBERTI, 2003).

Ainda segundo o autor, no século V d.C., os astrônomos hindus passaram a utilizar as tabelas dos senos, o matemático hindu Aryabhata passou a trabalhar com a corda AB do arco AB, em um círculo de raio 3439,5 (este número é obtido supondo que o comprimento da circunferência é $360 \cdot 60$ e usando o valor de 3,14 para π). Com a mudança da medida do raio, as tabelas construídas por Ptolomeu não puderam mais serem utilizadas, sendo necessária a sua atualização.

A função seno, que era conhecida como função corda, foi trabalhada com bastante intensidade durante muitos séculos anteriores a Ptolomeu. Algum tempo depois, matemáticos hindus calcularam as tábuas dos senos, que até então não possuíam esse nome. A palavra hoje chamada de seno foi primeiro encontrada nos trabalhos de Aryabhata, onde era chamada de *jiva*, também abreviado por *jya*, palavra na qual significa corda (COSTA, 1977).

No século XII, quando passou-se a traduzir as palavras em árabe para o latim, foi encontrada a palavra *jiva* copiada do sânscrito[10] como *jiba*. Os árabes possuíam a cultura de escrever apenas as consoantes de uma palavra, deixando para o leitor acrescentar as vogais, por esse motivo o matemático inglês Robert de Chester encontrou a palavra jb e acrescentou vogais e obteve a palavra *jaib* que significa enseada ou baía, a qual foi posteriormente traduzida para o latim como sinus e depois para o português como sendo seno. Ou seja, a palavra seno como conhecemos hoje é um erro da tradução do árabe para o latim da palavra *jiva* em sânscrito (COSTA, 1977).

O termo co-sinus foi utilizado pela primeira vez, no século XVII, por Edmund Gunter, para indicar o complemento do seno, combinando essas duas palavras, em português, transformaram-se em cosseno, que significa seno do ângulo complementar (UBERTI, 2003).

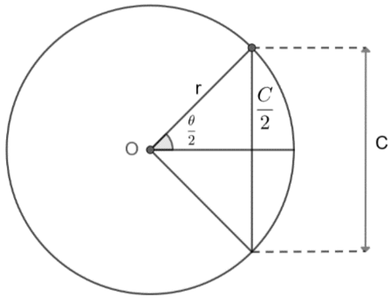
Segundo Costa (1977), no século IV d.C. a Europa Ocidental entrou em crise com as invasões dos bárbaros e com a queda do Império Romano. O centro da cultura passou a se deslocar para a Índia, que revolucionou a Trigonometria com um conjunto de textos denominados Siddhanta[11], que significa sistemas de Astronomia.

Ainda segundo a autora, um dos textos mais relevantes para nós é o Surya Siddhanta, pois ele abriu novas perspectivas para a Trigonometria por não seguir o mesmo caminho de Ptolomeu, que relacionava as cordas de um círculo com os ângulos centrais correspondentes. Para utilizar a “função” corda na Astronomia, era necessário dobrar o arco antes de usá-lo na tábua de cordas, porém, era mais conveniente ter uma tábua na qual o próprio arco fosse a variável independente. No Surya, a relação usada era entre a metade da corda e a metade do ângulo central correspondente, chamada pelos hindus de *jiva*. Isto possibilitou a exibição de um triângulo retângulo na circunferência, como na Figura 2 (FELIX, 2011).

[10] O Sânscrito é uma língua muito antiga que se desenvolveu na Índia, e que serviu como principal veículo de propagação do Hinduísmo. Suas origens apontam para uma língua hipotética mais antiga, que teria dado origem também ao grego, ao latim, ao celta e a outras línguas antigas da Europa e do Oriente (BARBOSA, 2008).

[11] Os Siddhantas eram cinco livros escritos por volta do fim do século IV ou início do século V, totalmente em versos, que tratava de algumas teorias astronômicas (FELIX, 2011).

Figura 2 - O “*Jiva*” Hindu



Fonte: Elaboração Própria.

Os hindus definiam o *jiva* como sendo a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa, logo temos que:

$$jiva\frac{\theta}{2} = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$$

Onde temos que:

$$jiva\ \frac{\theta}{2} = \frac{\frac{c}{2}}{r} = \frac{c}{2r} = \frac{1}{2r}\ \cdot\ crd\ \theta$$

Como visto anteriormente o seno era chamado de *jiva*, logo temos que:

$$jiva\ \frac{\theta}{2} = sen\ \frac{\theta}{2}$$

$$sen\ \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2r}\ \cdot\ crd\ \theta$$

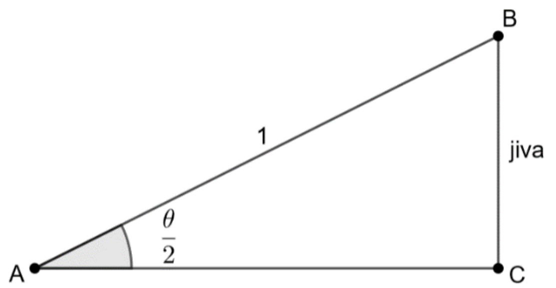
Sendo $c =$ corda, $r =$ raio, $crd\ \theta =$ corda do ângulo teta.

A metade da corda dividida pelo raio do círculo é o seno da metade do arco (ou da metade do ângulo central correspondente a todo o arco). Com os conhecimentos descobertos e aperfeiçoados pelos hindus, as principais funções trigonométricas foram introduzidas e os métodos de tabulação melhoraram, particularmente os de interpolação quadrática e linear (FELIX, 2011).

Após os hindus, foram os árabes e os persas a darem sua contribuição à Trigonometria. Os árabes herdaram a Trigonometria dos gregos e hindus, adotando o ponto de vista aritmético. Também introduziram, para facilitar os cálculos, a tangente, a cotangente, a secante e a cossecante.

De acordo com Costa (1977), a influência árabe à Trigonometria começou com a fundação da Escola de Bagdad no século IX, e um dos seus maiores expoentes foi o príncipe da Síria Mohamed-ben-Geber, conhecido como Al Battani (aproximadamente 850 a 929 d.C.). Os estudos de Al Battani ficaram entre o Almagesto e os Siddhantas, e foi por sua influência que a trigonometria hindu foi adotada pelos árabes, principalmente a partir de sua ideia de introduzir o círculo de raio unitário e com isso demonstrar que a razão *jiva* é válida para qualquer triângulo retângulo, independentemente do valor da medida da hipotenusa (FIGURA 3).

Figura 3 - A ideia de raio 1 de Al Battani



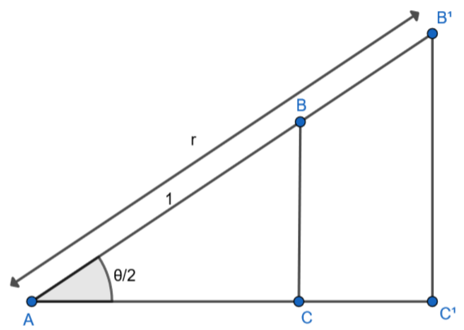
Fonte: Elaboração Própria.

$$jiva\ \frac{\theta}{2} = \frac{cateto\ oposto}{1} = \frac{BC}{1}$$
$$sen\ \frac{\theta}{2} = \frac{BC}{1} = jiva\ \frac{\theta}{2}$$

Se um triângulo retângulo possui um ângulo agudo $\frac{\theta}{2}$ então, quaisquer que sejam as medidas do cateto oposto e da hipotenusa, podemos afirmar que: $\Delta ABC \approx \Delta AB^1C^1$ (lê-se: o triângulo de arestas A, B e C, é semelhante ao triângulo de arestas A, B¹ e C¹).

Podemos ver os seguintes triângulos na Figura 4:

Figura 4 - Fórmula usada para construir a tabela de Al Battani



Fonte: Elaboração Própria.

No triângulo ABC, temos que:

$$sen\frac{\theta}{2} = \frac{jiva}{1}$$

Agora, aplicando o Teorema de Tales, temos que:

$$\frac{jiva}{1} = \frac{BC}{AB} = \frac{B^1C^1}{AB^1}$$

Assim, temos que:

$$sen\frac{\theta}{2} = \frac{B^1C^1}{AB^1}$$

Portanto:

$$sen\ \frac{\theta}{2} = \frac{B^1C^1}{AB^1} = \frac{jiva}{1}$$

Com esta fórmula pôde-se construir uma tábua, de $\frac{1}{4}$ a 90 graus, variando de $\frac{1}{4}$ em $\frac{1}{4}$ de grau, ou seja uma tabela de senos, apesar deste nome não ter sido usado para identificá-la (FELIX, 2011).

O interesse dos estudos da Trigonometria entre gregos, hindus e árabes era movido por suas aplicações à Astronomia. A partir do Renascimento, época da expansão marítima europeia que exigiu o desenvolvimento da Cartografia, a Trigonometria passou a ser utilizada na Cartografia e na Topografia, como proposto por Fibonacci[12] (1175-1250 d.C.) em seu livro "Prática da Geometria[13]" de 1220 d.C. (UBERTI, 2003).

Outro fator de desenvolvimento da Trigonometria foi a necessidade de refazer todos os cálculos da Astronomia Posicional, com a adoção progressiva do sistema geocêntrico (a Terra como o centro do universo) para o heliocêntrico (o sol como o centro do universo) (SANTOS, 2019).

A construção de tabelas trigonométricas era uma tarefa lenta e exaustiva, mas essencial para o progresso da Astronomia e da Matemática. A utilização da Trigonometria fez com que

---

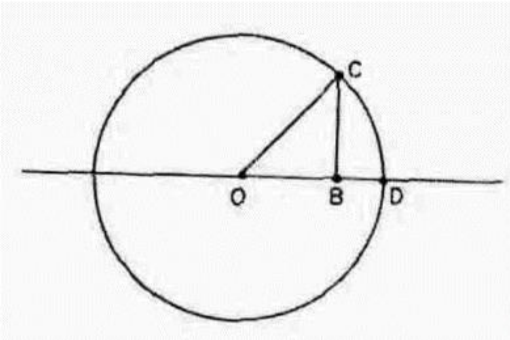
[12] Leonardo Fibonacci, também conhecido como Leonardo de Pisa ou simplesmente Fibonacci foi um matemático italiano, tido como o primeiro grande matemático europeu do Medievo. É considerado por alguns como o mais talentoso matemático ocidental da Idade Média. Ficou conhecido pela descoberta da sequência de Fibonacci e pelo seu papel na introdução dos algarismos arábicos na Europa (INÁCIO, 2012).

[13] No livro "Prática da Geometria" escrito em 1220 por Fibonacci, ele reuniu toda a Geometria da época em uma larga coleção de grandes problemas geométricos organizada em oito capítulos com teoremas geométricos baseados na obra "Elementos de Euclides" (UBERTI, 2003).

muitos matemáticos construíssem essas tabelas, como por exemplo George Joaquim Rético (1514-1576 d.C.), como é citado por Uberti (2003):

> Ele fundiu ideias de outros matemáticos com suas próprias contribuições e expôs uma trigonometria do triângulo retângulo: em vez de dizer que CB é o seno do arco CD, ele considerou CB como o seno do angulo COB, o que introduziu essencialmente a formulação da trigonometria do triângulo retângulo, como feito até hoje (p. 11).

Figura 5 - Trigonometria no triângulo retângulo de George Joaquim Rético



Fonte: UBERTI (2003, p. 11)

Assim, a trigonometria continuou o seu avanço até que Roberval[14] (1602-1675 d.C.) introduziu os estudos da curva dos senos sobre a cicloide, e mais tarde John Wallis[15] (1616-1703 d.C.) em seu livro "Mecânica de Wallis", publicado em 1670, apresentou um gráfico de dois períodos da função seno. De acordo com Uberti (2003), esse é o primeiro aparecimento de uma função trigonométrica.

Ainda segundo o autor, pouco a pouco, as funções trigonométricas passaram a figurar frequentemente na Matemática, paralelamente ao uso de tabelas cada vez mais precisas para aplicações em Topografia, Navegação e Astronomia de posição.

Atualmente encontramos aplicações da Trigonometria nas Telecomunicações, na Música, na determinação de distâncias entre estrelas, na Medicina, na Física, na Mecânica e em muitas outras áreas cientificas. Como tal, o seu estudo é indispensável para engenheiros, físicos, cientistas da área de Informática e demais cientistas.

---

[14] Matemático e físico francês. Seu método dos indivisíveis, que aplicou à quadratura das superfícies limitada pela cicloide e pela senoide é uma aproximação do cálculo da integral (UBERTI, 2003).

[15] Matemático que introduziu melhoramentos na notação matemática e contribuiu substancialmente para a origem do cálculo, e foi o matemático inglês mais influente antes de Newton (COBRA, 1997).

4.1 A lei dos senos (LS)

A Lei dos Senos é um resultado muito importante no estudo da Geometria e da Trigonometria, por nos permitir encontrar as medidas de lados e/ou ângulos de triângulos quaisquer, relacionando seus lados e seus respectivos ângulos opostos. Esta lei garante que, em qualquer triângulo, a razão entre um lado e o seno do ângulo oposto a ele é constante, ou seja, é a mesma independentemente do lado escolhido.

O estudo dos ângulos e das cordas eram os pontos fortes, posto que estes estiveram em sua maioria, interligados a algum contexto de aplicação na sociedade na era alexandrina. Boyer (1974) confirma essa passagem:

> [...] diversos astrônomos da era alexandrina trataram problemas que indicam a necessidade de uma relação sistemática entre ângulos e cordas. Os teoremas sobre os comprimentos de cordas são essencialmente aplicações da lei dos senos moderna (p. 122-123).

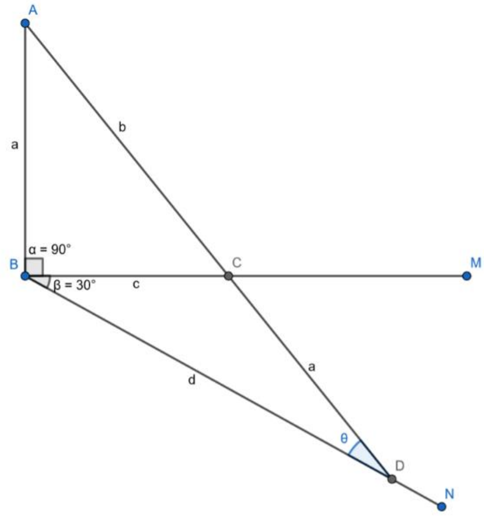
Percebe-se então, que o estudo do comprimento das cordas está intimamente associado ao da LS, a qual compreende o campo de investigação dessa análise. Dessa maneira, tomando por base várias obras visitadas, não foi encontrado um marco inicial do uso da LS, mas somente uma associação ao se estudar o comprimento das cordas (SANTOS, 2019). Assim, podemos observar que a lei ou algo semelhante a ela é citada na resolução do exercício 4.6 (Aplicações do Princípio da Inserção) da obra de Eves (2011), representada a seguir como um recorte do livro “Introdução à história da matemática” 5. ed.:

Exercício 4.6: Aplicações do princípio de inserção.

Sejam dadas duas curvas m e n e um ponto O. Suponha que seja permitido marcar, numa dada régua, um segmento MN, e depois ajustar a régua de modo que ela passe por O e corte as curvas m e n com M em m e N em n. Diz-se então que a reta traçada ao longo da régua foi traçada pelo princípio de inserção. Problemas para os quais não bastam os instrumentos euclidianos podem ser resolvidos com esses instrumentos, permitindo-se o princípio de inserção. Prove que é correta a seguinte construção, usando o princípio de inserção.

(a) Seja AB um segmento dado. Trace um ângulo $A\hat{B}M = 90°$ e o ângulo $A\hat{B}N = 120°$. A seguir trace ACD de maneira que sua intersecção com BM seja C, com BN seja D e $CD = AB$. Então $(AC)^3 = 2(AB)^3$. Essa construção, em essência, foi dada em publicações de Viète (1646) e Newton (1728).

Figura 6 - Gráfico da questão do livro de Eves



Fonte: Elaboração Própria.

A solução da questão é encontrada através da aplicação da Lei dos Senos, detalharemos a seguir:

(a) Denotaremos AB por a, AC por b, BC por c e o ângulo ADB por θ. Então, pela Lei dos Senos, aplicada primeiro ao triângulo BCD e depois ao triângulo ABD, temos:

(i) Do triângulo BCD:

$$\frac{a}{sen\,30°} = \frac{c}{sen\,\theta}$$

$$a \cdot sen\,\theta = c \cdot sen\,30°$$

$$\frac{a}{c} = \frac{sen\,30°}{sen\,\theta}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{\frac{1}{2}}{sen\,\theta}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{1}{2 \cdot sen\,\theta}$$

$$a \cdot 2 \cdot sen\,\theta = c$$

$$2 \cdot sen\,\theta = \frac{c}{a}.$$

(ii) Do triângulo ABD:

$$\frac{a}{sen\,\theta} = \frac{(a+b)}{sen\,120°}$$

$$a \cdot sen\,120° = (a+b) \cdot sen\,\theta$$

$$\frac{sen\,\theta}{sen\,120°} = \frac{a}{(a+b)}$$

$$\frac{sen\,\theta}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a}{(a+b)}$$

$$\frac{2 \cdot sen\,\theta}{\sqrt{3}} = \frac{a}{(a+b)}.$$

Substituindo $2 \cdot sen\,\theta = \frac{c}{a}$, temos que:

$$\frac{\frac{c}{a}}{\sqrt{3}} = \frac{a}{(a+b)}$$

$$\frac{c}{\sqrt{3} \cdot a} = \frac{a}{(a+b)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a^2}{c \cdot (a+b)}.$$

Portanto, temos que:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = tg\,30° = \frac{a^2}{c \cdot (b+a)}.$$

Elevando ao quadrado ambos os membros e lembrando do Teorema de Pitágoras, temos que:

$$c^2 = b^2 - a^2,$$

obtemos:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{c \cdot (b+a)}\right)^2$$

$$\frac{1}{3} = \frac{a^4}{(b \cdot c + a \cdot c)^2}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{a^4}{b^2 \cdot c^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot c^2 + a^2 \cdot c^2}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{a^4}{c^2 \cdot (b^2 + 2 \cdot a \cdot b + a^2)}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{a^4}{(b^2 - a^2) \cdot (b^2 + 2 \cdot a \cdot b + a^2)}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{a^4}{b^4 + 2 \cdot a \cdot b^3 + a^2 \cdot b^2 - a^2 \cdot b^2 - 2 \cdot a^3 \cdot b - a^4}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{a^4}{b^4 + 2 \cdot a \cdot b^3 - 2 \cdot a^3 \cdot b - a^4}$$

$$b^4 + 2 \cdot a \cdot b^3 - 2 \cdot a^3 \cdot b - a^4 = 3 \cdot a^4$$

$$3 \cdot a^4 = b^4 + 2 \cdot a \cdot b^3 - 2 \cdot a^3 \cdot b - a^4$$

$$3 \cdot a^4 + 2 \cdot a^3 \cdot b + a^4 = b^4 + 2 \cdot a \cdot b^3$$

$$4 \cdot a^4 + 2 \cdot a^3 \cdot b = b^4 + 2 \cdot a \cdot b^3$$

$$(2 \cdot a^3)(2 \cdot a + b) = b^3 \cdot (2 \cdot a + b)$$

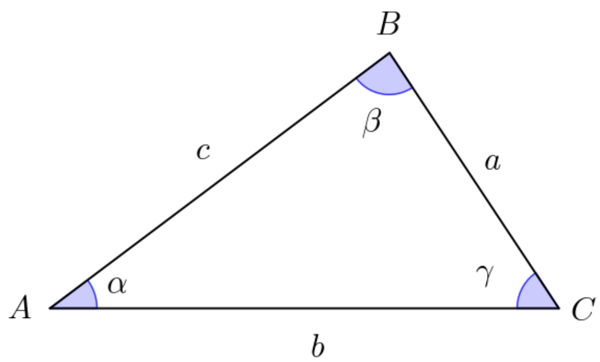
$$\frac{(2 \cdot a^3) \cdot (2 \cdot a + b)}{2 \cdot a + b} = b^3$$

$$2 \cdot a^3 = b^3.$$

A LS garante que, em qualquer triângulo a razão entre a medida de um lado e o seno do ângulo oposto é constante, ou seja, é a mesma independentemente do lado escolhido. Desse modo, ao enunciarmos o teorema, temos que:

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}.$$

Figura 7 - Lei dos Senos



Fonte: INFOESCOLA

Para demonstrarmos a LS devemos primeiramente dividi-la em três casos, nos quais serão testados:

1) Demonstração para um triângulo acutângulo (todos os ângulos internos são agudos[16]);
2) Demonstração para um triângulo obtusângulo (possui um ângulo interno obtuso[17]);

---

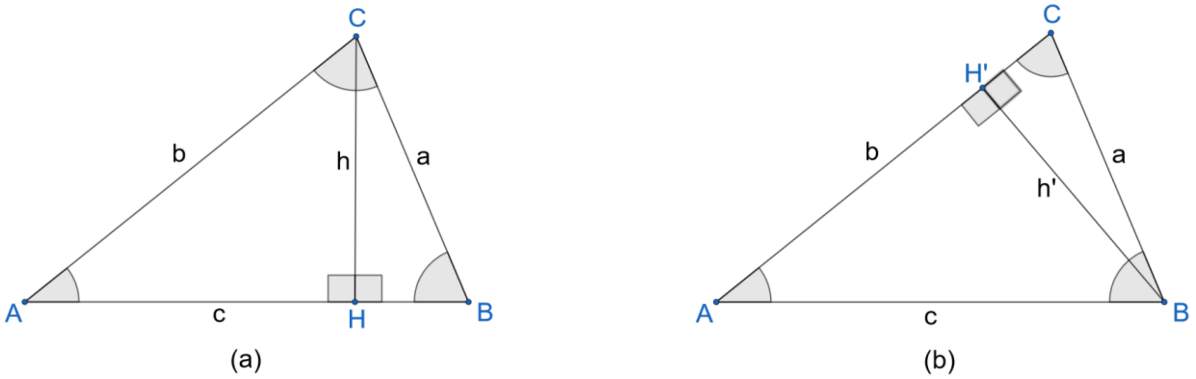
[16] Ângulo agudo é um ângulo com medida maior que 0° e menor que 90° ($0° < \theta < 90°$).
[17] Ângulo obtuso é um ângulo com medida maior que 90° e menor que 180° ($90° < \theta < 180°$).

3) Demonstração para um triângulo retângulo (possui um ângulo reto[18]).

A partir de agora, demonstraremos a LS de acordo com os tipos de triângulo.

1) Triângulo acutângulo

Figura 8 - Demonstração da Lei dos Senos (caso 1)



Fonte: Elaboração Própria.

Na Figura 8 (a), temos o triângulo ABC com altura h relativa ao lado AB, enquanto na Figura 8 (b) temos o triângulo ABC com altura h' relativa ao lado AC.

Utilizando o triângulo da Figura 8 (a), temos que:

(1) Do triângulo ACH:

$$sen\ \hat{A} = \frac{h}{b}$$

$$h = b \cdot sen\ \hat{A}\ .$$

(2) Do triângulo BCH:

$$sen\ \hat{B} = \frac{h}{a}$$

$$h = a \cdot sen\ \hat{B}\ .$$

Logo, comparando ambos os casos (1) e (2), temos que:

$$h = h$$

$$a \cdot sen\ \hat{B} = b \cdot sen\ \hat{A}$$

[18] Ângulo reto é um ângulo com medida igual a 90° ($\theta = 90°$).

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}}.$$

Utilizando o triângulo da Figura 7 (b), temos que:

(3) Do triângulo BCH':

$$sen\,\hat{C} = \frac{h'}{a}$$

$$h' = a \cdot sen\,\hat{C}.$$

(4) Do triângulo ABH':

$$sen\,\hat{A} = \frac{h'}{c}$$

$$h' = c \cdot sen\,\hat{A}.$$

Logo, comparando ambos os casos (3) e (4), temos que:

$$h' = h'$$

$$a \cdot sen\,\hat{C} = c \cdot sen\,\hat{A}$$

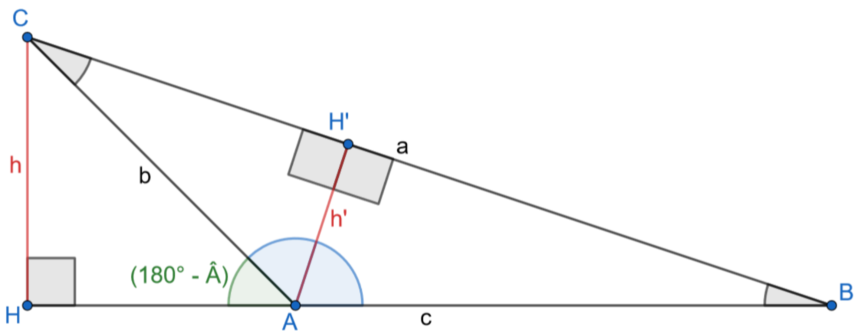
$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}.$$

Portanto, chegamos ao fim da primeira demonstração, onde temos que:

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}.$$

2) Triângulo obtusângulo

Figura 9 - Demonstração da Lei dos Senos (caso 2)



Fonte: Elaboração Própria.

Sendo $\hat{A}$ o ângulo $B\hat{A}C$, e $(180° - \hat{A})$ o ângulo $C\hat{A}H$.

Na Figura 9, temos o triângulo ABC com alturas h e h' relativas aos lados AB e BC, respectivamente.

(1) Do triângulo BCH, temos:

$$sen\ \hat{B} = \frac{h}{a}$$

$$h = a \cdot sen\ \hat{B}\ .$$

(2) Do triângulo ACH, temos que:

$$sen\ (180° - \hat{A}) = \frac{h}{b}$$

$$h = b \cdot sen\ (180° - \hat{A})$$

Utilizando a relação de redução de 2° quadrante para o 1° quadrante, temos que:

$$h = b \cdot sen\ \hat{A}\ .$$

Logo, comparando ambos os casos (1) e (2), temos que:

$$h = h$$

$$a \cdot sen\ \hat{B} = b \cdot sen\ \hat{A}$$

$$\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{b}{sen\ \hat{B}}\ .$$

Dando sequência à demonstração, temos que:

(3) Do triângulo ABH', temos:

$$sen\ \hat{B} = \frac{h'}{c}$$

$$h' = c \cdot\ sen\ \hat{B}\ .$$

(4) Do triângulo ACH', temos:

$$sen\ \hat{C} = \frac{h'}{b}$$

$$h' = b \cdot sen\ \hat{C}\ .$$

Logo, comparando ambos os casos (3) e (4), temos que:

$$h' = h'$$

$$b \cdot sen\, \hat{C} = c \cdot sen\, \hat{B}\ .$$

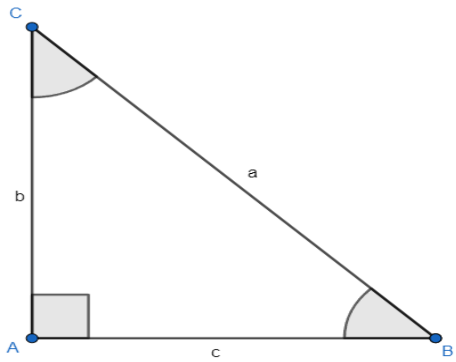
$$\frac{b}{sen\, \hat{B}} = \frac{c}{sen\, \hat{C}}\ .$$

Portanto, chegamos ao fim da segunda demonstração, onde temos que:

$$\frac{a}{sen\, \hat{A}} = \frac{b}{sen\, \hat{B}} = \frac{c}{sen\, \hat{C}}\ .$$

3) Triângulo retângulo

Figura 10 - Demonstração da Lei dos Senos (caso 3)



Fonte: Elaboração Própria.

A Figura 10 mostra um triângulo ABC, com o ângulo reto em A. Desse triângulo temos que:

$$sen\, \hat{B} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{sen\, \hat{B}}{1} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{sen\, \hat{B}}{sen\, 90°} = \frac{b}{a}$$

$$a \cdot sen\, \hat{B} = b \cdot sen\, \hat{A}\ .$$

Daí, temos que:

$$\frac{a}{sen\, \hat{A}} = \frac{b}{sen\, \hat{B}}\ .$$

Analogamente, temos que:

$$sen\,\hat{C} = \frac{c}{a}$$

$$\frac{sen\,\hat{C}}{1} = \frac{c}{a}$$

$$\frac{sen\,\hat{C}}{sen\,90°} = \frac{c}{a}$$

$$a \cdot sen\,\hat{C} = c \cdot sen\,\hat{A}\,.$$

Daí, temos que:

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}\,.$$

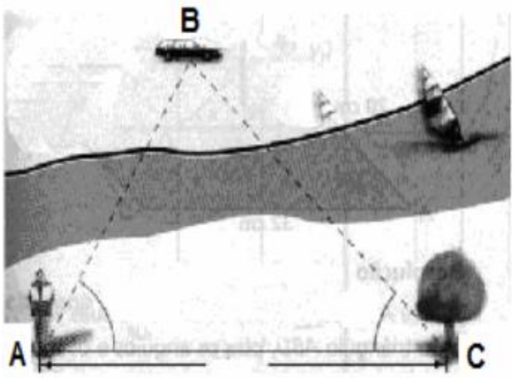
Portanto, chegamos ao fim da demonstração do terceiro caso, onde temos novamente que:

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}\,.$$

Portanto, demonstramos que a Lei dos Senos é válida para todos os triângulos.

Para demonstrar uma das maneiras como a LS é utilizada, apresentaremos um exemplo:

Exemplo 01: (COLÉGIO GONZAGA[19]) Um topógrafo pretende medir a distância entre dois pontos (A e B) situados em margens opostas de um rio. Para isso, ele escolheu um ponto C na margem em que está, e mediu os ângulos ACB e CAB, encontrando, respectivamente $60°$ e $75°$. Mediu também o lado AC e encontrou $16\ m$.

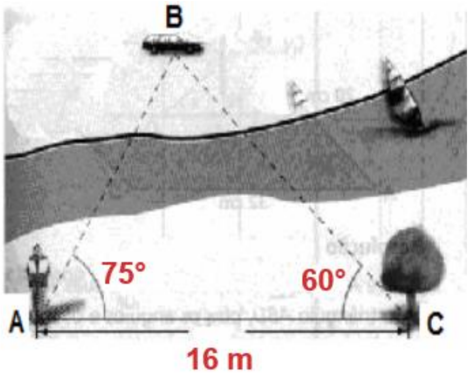


[19] Colégio confessional católico, localizado na cidade de Pelotas, no Rio Grande do Sul.

Respeitando essas condições, podemos afirmar que o lado AB (em metros) tem medida aproximada de:

a) $8\sqrt{6}$ b) $20\sqrt{3}$ c) $9\sqrt{3}$ d) $5\sqrt{6}$ e) 10

Solução: Utilizando as informações dadas pela questão podemos ilustrar da seguinte forma:



(i) Inicialmente se faz necessário achar a medida do ângulo $\hat{B}$. Sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, temos que:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$$

$$75° + \hat{B} + 60° = 180°$$

$$\hat{B} = 45°\,.$$

(ii) Daí, aplicando a Lei dos Senos no triângulo ABC, temos que:

$$\frac{16}{sen\ 45°} = \frac{AB}{sen\ 60°}$$

$$\frac{16}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{AB}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\frac{32}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot (AB)}{\sqrt{3}}$$

$$32 \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot (AB) \cdot \sqrt{2}$$

$$\frac{32 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{2}} = AB$$

$$AB = \frac{16 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$AB = \frac{16\sqrt{6}}{2}$$

$$AB = 8\sqrt{6}\ m\,.$$

Logo, a distância do ponto A ao ponto B é de $8\sqrt{6}\ m$ e portanto a alternativa correta é a) $8\sqrt{6}\ m$.

4.2 A Lei dos Cossenos (LC)

Assim como a LS, a LC é um resultado muito importante para a Geometria e para a Trigonometria, por trazer subsídios para encontrar medidas de lados e ângulos de qualquer triângulo (SOUZA, 2016).

Na obra “Os Elementos” de Euclides podemos encontrar proposições que relacionam a LC para ângulos agudos e obtusos de forma geométrica, e teoremas relacionados ao que hoje conhecemos como LS e LC (SOUZA, 2015), assim como afirma Boyer (1974, p. 116):

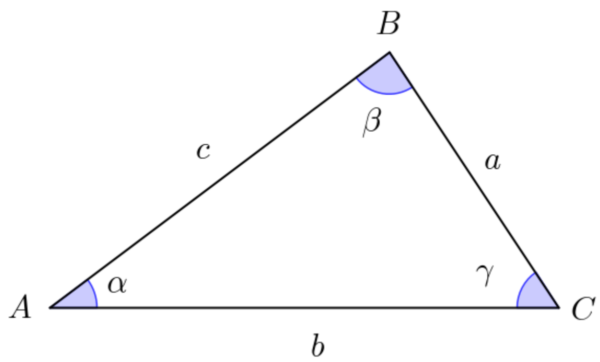
> Nas obras de Euclides não há trigonometria no sentido estrito da palavra, mas há teoremas equivalentes a leis ou fórmulas trigonométricas específicas. As proposições II. 12 e II. 13 de Os Elementos, por exemplo, são as leis de cossenos para ângulos obtuso e agudo respectivamente enunciados em linguagem geométrica em vez de trigonométrica [...]. Os teoremas sobre comprimentos de cordas são essencialmente aplicações de lei dos senos.

Enquanto a LS relaciona dois lados e seus respectivos ângulos opostos, a LC relaciona os três lados e um ângulo do triângulo. O teorema afirma que:

Para todo triângulo ABC, o quadrado da medida de um lado qualquer é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, subtraída do dobro do produto das medidas desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles, ou seja, em um triângulo onde a, b e c são as medidas dos lados BC, AC e AB, respectivamente, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}\,.$$

Figura 11 - Lei dos Cossenos



Fonte: INFOESCOLA

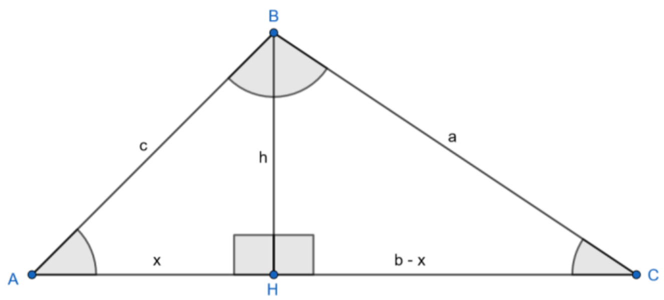
Para demonstrarmos a LC, devemos primeiramente dividi-la em três casos, nos quais serão testados:

1) Demonstração para um triângulo acutângulo (todos os ângulos internos são agudos);
2) Demonstração para um triângulo obtusângulo (possui um ângulo interno obtuso);
3) Demonstração para um triângulo retângulo (possui um ângulo reto).

A partir de agora, demonstraremos a LC de acordo com os tipos de triângulo.

1) Triângulo acutângulo

Figura 12 – Demonstração da Lei dos Cossenos (caso 1)



Fonte: Elaboração Própria.

Na Figura 12, o segmento BH, que é a altura relativa ao lado AC, divide o triângulo ABC em dois triângulos retângulos ABH e BCH.

(1) Do triângulo ABH, temos que:

$$\cos \hat{A} = \frac{x}{c}$$

$$x = c \cdot \cos \hat{A}\,.$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras temos que:

$$c^2 = x^2 + h^2$$
$$h^2 = c^2 - x^2.$$

(2) Do triângulo BHC, temos que:

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo BHC, temos que:

$$a^2 = h^2 + (b - x)^2$$
$$a^2 = h^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot x + x^2.$$

Logo, substituindo os resultados das equações (1) e (2), temos que:

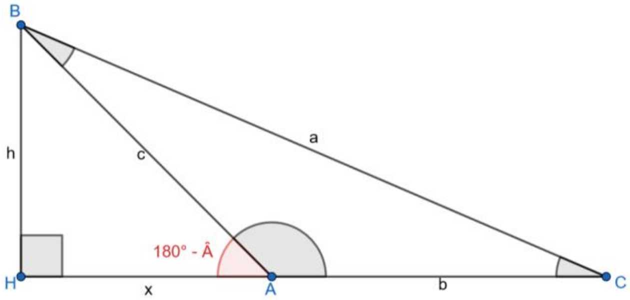
$$a^2 = h^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot x + x^2$$
$$a^2 = (c^2 - x^2) + b^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{\mathrm{A}} + x^2$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{\mathrm{A}}\,.$$

Portanto, chegamos ao fim da primeira parte da demonstração, onde temos que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{\mathrm{A}}\,.$$

2) Triângulo obtusângulo

Figura 13 - Demonstração da Lei dos Cossenos (caso 2)



Fonte: Elaboração Própria.

Sendo $\hat{A}$ o ângulo $B\hat{A}C$, e $(180° - \hat{A})$ o ângulo $B\hat{A}H$.

No triângulo ABC da Figura 13, foi traçado o segmento BH, altura relativa ao lado AC, obtendo dois triângulos retângulos ABH e BCH.

(3) Do triângulo ABH, temos que:

$$\cos\left(180° - \hat{\mathrm{A}}\right) = \frac{x}{c}$$

$$x = c \cdot \cos\left(180° - \hat{A}\right).$$

Utilizando a relação de redução de 2° quadrante para o 1° quadrante, temos que:

$$x = -c \cdot \cos \hat{A}.$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras temos que:

$$c^2 = h^2 + x^2$$

$$h^2 = c^2 - x^2.$$

(4) Do triângulo BCH, temos que:

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo BHC, temos que:

$$a^2 = h^2 + (b + x)^2$$

$$a^2 = h^2 + b^2 + 2 \cdot b \cdot x + x^2.$$

Logo, substituindo os resultados das equações (3) e (4), temos que:

$$a^2 = h^2 + b^2 + 2 \cdot b \cdot x + x^2$$

$$a^2 = (c^2 - x^2) + b^2 + 2 \cdot b \cdot \left(-c \cdot \cos \hat{A}\right) + x^2$$

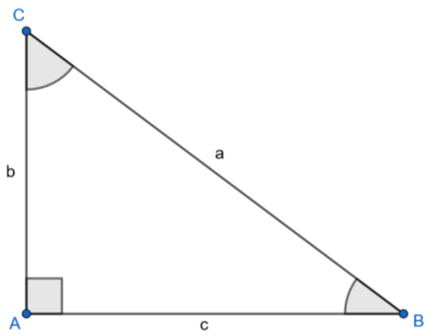
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}.$$

Portanto, chegamos ao fim da segunda parte da demonstração, onde temos que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}.$$

3) Triângulo retângulo

Figura 14 - Demonstração da lei dos cossenos (caso 3)



Fonte: Elaboração Própria.

Aplicando diretamente o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo da Figura 14, temos que:

$$a^2 = b^2 + c^2 \,.$$

Mas, como $\cos 90° = 0$, temos que $-2 \cdot b \cdot c \cdot \cos 90° = 0$, portanto temos que $-2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A} = 0$.

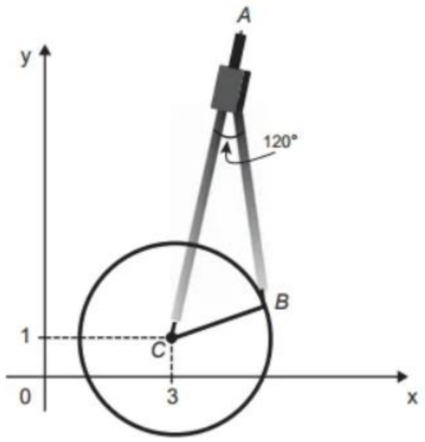
Logo, chegamos ao fim da terceira parte da demonstração, onde temos que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A} \,.$$

Portanto, demonstramos que a Lei dos Cossenos é válida para todos os triângulos.

Para exemplificar uma das maneiras como a LC é utilizada, apresentaremos um exemplo:

Exemplo 02: (ENEM 2017) Uma desenhista projetista deverá desenhar uma tampa de panela em forma circular. Para realizar esse desenho, ela dispõe, no momento, de apenas um compasso, cujo comprimento das hastes é de $10\ cm$, um transferidor e uma folha de papel com um plano cartesiano. Para esboçar o desenho dessa tampa, ela afastou as hastes do compasso de forma que o ângulo formado por elas fosse de $120°$. A ponta seca está representada pelo ponto C, a ponta do grafite está representada pelo ponto B e a cabeça do compasso está representada pelo ponto A conforme a figura.



Após concluir o desenho, ela o encaminha para o setor de produção. Ao receber o desenho com a indicação do raio da tampa, verificará em qual intervalo este se encontra e decidirá o tipo de material a ser utilizado na sua fabricação, de acordo com os dados.

Tipo de material	Intervalo de valores do raio (cm)
I	$0 < R \leq 5$
II	$5 < R \leq 10$
III	$10 < R \leq 15$
IV	$15 < R \leq 21$
V	$21 < R \leq 40$

Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

O tipo de material a ser utilizado pelo setor de produção será:

a) I b) II c) III d) IV e) V

Solução: O compasso forma com o raio CB da circunferência o triângulo ABC, com $\hat{A} = 120°$ e os lados AC a AB medindo 10 cm cada. Vamos determinar a medida do raio CB aplicando a Lei dos Cossenos. Fazendo $CB = r$, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$

$$r^2 = 10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cos 120°$$

$$r^2 = 100 + 100 - 200 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$r^2 = 200 + 100$$

$$r^2 = 300$$

$$r = \sqrt{300}$$

$$r = 10\sqrt{3}$$

$$r = 10 \cdot 1{,}7$$

$$r = 17\ cm.$$

Como 17 cm está entre 15 cm e 21 cm, será escolhido o material IV. Logo, a alternativa correta é a letra D.

5 Sequência Didática (SD)

Diante de tudo que foi exposto nesse trabalho, percebemos que podemos auxiliar o docente na exposição do objeto de conhecimento da Trigonometria (LS e LC) por meio de uma sequência didática.

SD é um conjunto de atividades, estratégias e intervenções planejadas etapa por etapa pelo professor para que o entendimento do conteúdo ou tema proposto seja alcançado pelos alunos (KOBASHIGAWA et al., 2008).

As sequências didáticas são ferramentas de ensino que permitem trabalhar o planejamento, aplicação e a avaliação. Elas representam a unidade indissociável existente no processo educativo, demarcada por um começo, meio e fim, ou seja, demarcando o processo de forma clara para alunos e professores (CABRAL, 2017).

De acordo com Peretti e Costa (2013, p. 6), sequência didática é

> um conjunto de atividades ligadas entre si, planejadas para ensinar um conteúdo, etapa por etapa, organizadas de acordo com os objetivos que o professor quer alcançar para aprendizagem de seus alunos e envolvendo atividades de avaliação que pode levar dias, semanas ou durante o ano. É uma maneira de encaixar os conteúdos a um tema e por sua vez a outro tornando o conhecimento lógico ao trabalho pedagógico desenvolvido.

Podemos dizer que a sequência didática é um planejamento, e assim como em um plano de aula, existem os conteúdos a serem ensinados, os objetivos a serem alcançados a cada etapa, a metodologia e os recursos necessários. A principal diferença está no fato de que a sequência é um planejamento mais amplo, um roteiro, com o auxílio do qual o professor, fazendo uso de uma metodologia, apresenta conteúdos e atividades, guiando o processo educativo a longo prazo.

Por meio da SD, o docente pode intervir para a melhoria no processo de ensino-aprendizagem-avaliação, oportunizando situações para que o educando assuma uma postura reflexiva e se torne sujeito do processo de ensino. As atividades que compõem a sequência didática devem ser cuidadosamente escolhidas pelo professor, de forma a tornar o processo de aprendizado dos conteúdos previstos o mais encadeado possível (CORRÊA, 2019).

De acordo com Guimarães e Giordan (2011), existe uma estrutura básica de SD, a qual não segue uma ordem pré-definida e pode também ser alterada de acordo com a necessidade do professor. Ela é composta pelo título, público-alvo, problematização, objetivos gerais, objetivo específico, conteúdo, dinâmica, avaliação, referencial bibliográfico e bibliografia consultada. Detalharemos, a seguir, cada etapa:

1) **Título**: o título não pode ser menosprezado, pois é capaz de atrair a atenção ou criar resistências no aluno, dessa forma o título deve ser atrativo como também é necessário que ele reflita o conteúdo e as intenções formativas;

2) **Público-alvo**: a SD não é universal, por esse motivo temos que ter em mente que cada professor tem total autonomia para modifica-la de acordo com o seu interesse, devendo assim ser moldada conforme a necessidade do público ao qual será destinado;

3) **Problematização**: a problematização é uma etapa importante da sequência didática, que visa estimular o pensamento crítico e reflexivo dos alunos, bem como sua capacidade de análise e resolução de problemas. A problematização tem como objetivo central estimular a participação ativa dos estudantes, instigando-os a formular hipóteses, levantar questionamentos, analisar diferentes perspectivas e buscar soluções para o problema apresentado. Ela é a agente que une e sustenta a relação sistêmica da SD, portanto a argumentação sobre o problema é o que ancora a SD;

4) **Objetivos gerais**: objetivos gerais são as metas amplas que se pretende alcançar com a aprendizagem de determinado conteúdo. Elas são estabelecidas a partir das competências e habilidades previstas nas diretrizes curriculares e orientam o processo de ensino e aprendizagem como um todo;

5) **Objetivos específicos**: os objetivos específicos são metas mais detalhadas que se pretende alcançar em relação a um determinado conteúdo. Elas derivam dos objetivos gerais e são mais específicas e mensuráveis;

6) **Conteúdos**: os conteúdos são os conhecimentos que serão trabalhados ao longo do processo de ensino e aprendizagem, relacionando-se com os objetivos gerais e específicos estabelecidos;

7) **Dinâmica**: refere-se às estratégias e metodologias utilizadas pelo professor para promover a participação ativa dos alunos no processo de aprendizagem. Elas visam estimular o envolvimento dos alunos, favorecer a interação entre eles, e tornar o aprendizado mais significativo e contextualizado;

8) **Avaliação**: os métodos avaliativos precisam ser condizentes com os objetivos gerais e específicos, e com os conteúdos previstos na SD. Desta forma, o que se avalia deve estar diretamente relacionado com o que se pretende ensinar;

9) **Referencial bibliográfico**: são listas de obras consultadas e utilizadas pelo professor na elaboração da sequência didática ou plano de aula. Elas incluem livros, artigos, periódicos, sites, entre outras fontes que fornecem informações relevantes sobre os conteúdos abordados;

10) **Bibliografia consultada**: devem ser apresentados os trabalhos utilizados para estruturar os conceitos, metodologias de desenvolvimento e/ou avaliação, ou seja, aqueles que foram utilizados na elaboração da SD ou que servem como material de apoio e estudo ao professor que irá aplicar tal SD.

Assim como a RP, a SD por mais que tenha uma série de passos já definidos, é totalmente ajustável à realidade do docente, podendo ser feitas alterações sem prejudicar o andamento das atividades.

6 Uma Proposta de Sequência Didática

Apresentaremos a seguir uma proposta de SD para o Ensino Médio, onde a dinâmica das aulas é voltada para a formalização e aprofundamento dos conhecimentos trigonométricos, trabalhando algumas das demonstrações referentes ao estudo da Trigonometria.

Para essa SD, a priori, foram pensadas quatro aulas de cinquenta minutos cada, podendo ou não ser alteradas de acordo com a necessidade do professor.

Para as quatro aulas planejadas, pensou-se inicialmente começar com um problema gerador para exposição do assunto, após isso será entregue uma lista de problemas, seguido da individualização e definição das LS e LC, seu histórico e algumas das suas aplicações no cotidiano além daquelas vistas nos problemas. Durante a elaboração deste planejamento, foram levadas em consideração as diretrizes nacionais, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio) (PCN).

Essa SD irá abordar conteúdos através da aplicação em problemáticas encontradas na Construção Civil, Topografia e Engenharias. Para o desenvolvimento dessa sequência, é necessário que o aluno já tenha estudado as relações métricas no triângulo retângulo.

Elencaremos agora as etapas da SD proposta:

1) **Título:** a matemática dos triângulos. Com esse título buscamos deixar claro o objeto de conhecimento que será trabalhado, além de tentar tornar o título mais atrativo para os alunos;

2) **Público-alvo:** a público-alvo do objeto de conhecimento apresentado neste trabalho são os alunos do 2° ano do Ensino Médio;

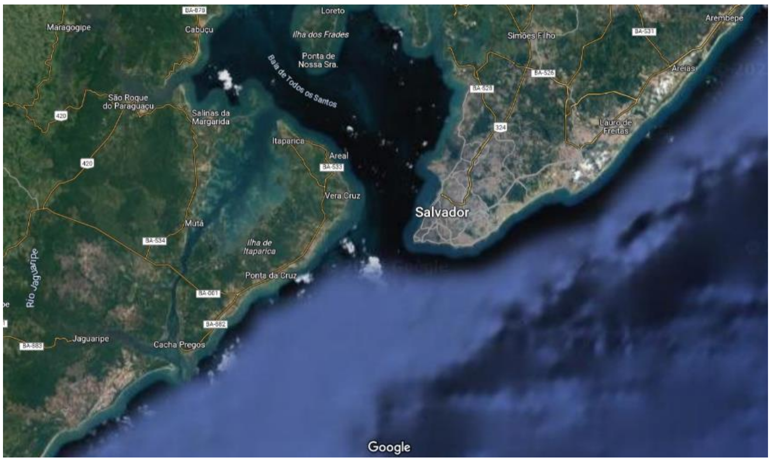
3) **Problematização**:

Aula 01:

Para início da SD, será orientado que os alunos se dividam em grupos de quatro ou cinco alunos e será entregue a cada um, uma atividade com um problema no qual chamaremos de problema gerador, como elucidado nesse trabalho. Tal problema deve ser próximo da realidade dos alunos, para que eles se sintam mais motivados em participar, e o mais importante, que eles consigam interpretar os problemas com mais facilidade. Para essa proposta de SD foi pensado o seguinte problema gerador:

Entre as cidades de Salvador e Vera Cruz existe uma extensão do oceano Atlântico chamada de Baía de Todos os Santos, como mostrado na Figura 15 a seguir.

Figura 15 – Problema gerador - Extensão Salvador-Vera Cruz



Fonte: GOOGLE MAPS (2023)

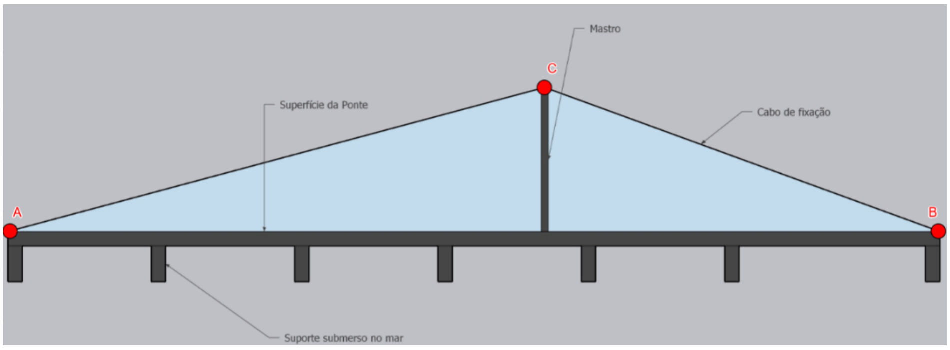
Com o objetivo de tornar o percurso de Salvador-Vera Cruz mais rápido, surgiu a ideia de fazer uma ponte de ligação entre as duas cidades. Até o momento, o transporte veicular entre essas localidades apenas pode ser feito através do Ferry-Boat para veículos de pequeno ou grande porte, ou através de rodovias. O projeto prevê a construção de uma ponte estaiada, um tipo de ponte suspensa por cabos constituída de um ou mais mastros, por onde partem cabos de sustentação para os tabuleiros da ponte, como podemos observar na Figura 16, que traz a Ponte Rio Negro, que está situada em Manaus-AM. O objetivo é que seja construída uma ponte semelhante na Bahia.

Figura 16 - Problema gerador - Ponte Rio Negro

Fonte: SEVERIANO (2017)

A ponte é composta por um mastro perpendicular à margem do rio, que fixa alguns cabos em cada lado para sustentação, além de suportes submersos no mar. O projeto da ponte Salvador-Vera Cruz já foi desenvolvido e está em fase de implementação. Entretanto, os estudantes de uma instituição de Vera Cruz resolveram aplicar seus conhecimentos na prática, realizando estudos do projeto da ponte. Tal estudo visa saber a medida total da ponte que liga as duas cidades. Para facilitar os cálculos, os estudantes fizeram um esboço da ponte, que pode ser observado na Figura 17.

Figura 17 - Problema gerador - Esboço da Ponte Salvador-Vera Cruz



Fonte: Elaboração Própria.

Os alunos têm conhecimento de que a ponte que ligará Salvador a Vera Cruz terá $13{,}376\ km$. Através do uso do teodolito, foi verificado que o ângulo entre o topo desse mastro e a superfície da ponte na extremidade B é de 4°, enquanto o ângulo do topo do mastro até a superfície da ponte na extremidade A é de 3°.

Com base no enunciado da questão, quais são os tamanhos dos cabos de fixação AC e BC que servem de sustentação para a ponte? (Observações: para facilitar os cálculos, utilize até quatro casas decimais, e considere $sen\ 3° = 0{,}0523$; $sen\ 4° = 0{,}0698$; $sen\ 173° = 0{,}1219$; $\tan 3° = 0{,}0524$ e $\tan 4° = 0{,}0699$).

Após a entrega da atividade, será dado um tempo de aproximadamente dez minutos para que os alunos façam uma leitura individual, e após isso, será orientado que eles tentem resolver o problema em grupo. Nesse momento o papel do professor é observar e incentivar, motivando os alunos a responderem ao problema e também orientando-os a utilizar conhecimentos já estudados. Posterior a esse momento, serão chamados um representante de cada grupo para registrar na lousa as suas soluções encontradas para o problema.

Após o registro das soluções na lousa, faremos um momento de plenária onde os representantes serão induzidos a explicarem como chegaram naquele resultado. Após ouvir todos os grupos, será a hora de alunos e professor entrarem em "conformidade" sobre a solução, respeitando a formulação matemática. Depois de entrar em um consenso com os alunos, o professor irá registrar na lousa uma solução formal, organizada e estruturada em linguagem matemática do problema. Em um primeiro momento, será exposta a solução através do Teorema de Pitágoras, e logo em seguida será demonstrada através da LS e LC.

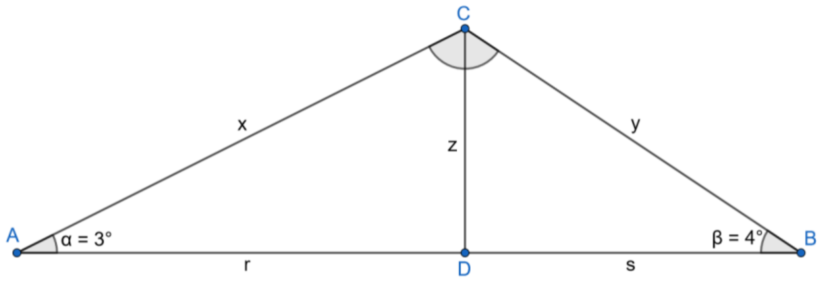
Durante a resolução do problema gerador, deve-se explicar aos alunos qual caminho de resolução percorrer, expondo em quais situações devem ser usada a LS ou a LC. Podemos enunciar que a forma de utilização mais comum desta LS é quando em um triângulo, são conhecidos os seus ângulos e a medida de apenas um lado, por sua vez, ao contrário da LS, a LC é mais utilizada na obtenção de elementos do triângulo, conhecendo mais lados do que ângulos (BUGLIA, 2015). De forma geral, podemos dizer que devemos aplicar LS quando temos os valores de dois ângulos e um lado, enquanto isso, para aplicar LC devemos conhecer os valores de dois lados e um ângulo.

A seguir expomos ambas as soluções para o problema:

Solução 01 – Através do Teorema de Pitágoras:

Coletando todas as informações dadas pela questão, podemos construir a seguinte figura que nos auxiliará na resolução do problema.

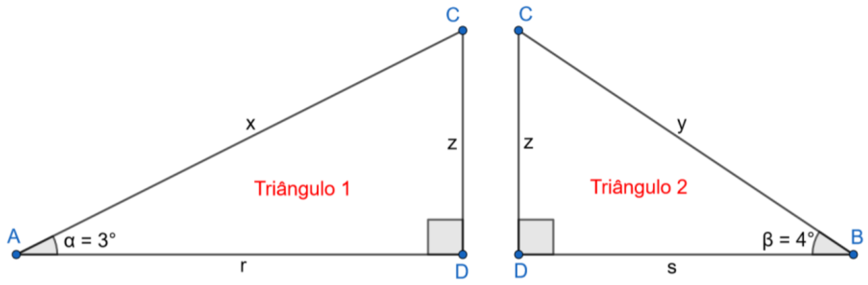
Figura 18 - Problema gerador - Solução 01



Fonte: Elaboração Própria.

Com o objetivo de facilitar a resolução da questão, podemos dividir o triângulo em dois triângulos ACD e BCD. Temos:

Figura 19 - Problema gerador - Separação de triângulo



Fonte: Elaboração Própria.

Podemos notar que a extensão da ponte é calculada através da adição das medidas de r e s. Logo, temos que:

$$r + s = 13{,}376\ km\,.$$

Para que possamos prosseguir com os cálculos, devemos descobrir quais são os valores de r e s. Utilizando conceitos previamente vistos em sala de aula que $\tan\theta = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$, e utilizando os dados da questão que $\tan 3° = 0{,}0524$ e $\tan 4° = 0{,}0699$ encontramos um sistema de equação que nos auxiliará na resolução do problema. Logo, temos que:

$$\frac{\tan 3°}{\tan 4°} = \frac{0{,}0524}{0{,}0699} = 0{,}7496$$

$$\frac{\tan 3°}{\tan 4°} = \frac{\frac{z}{r}}{\frac{z}{s}}$$

$$0{,}7496 = \frac{s}{r}$$

$$s = 0{,}7496 \cdot r\,.$$

Escrevendo o sistema de equação temos que:

$$\begin{cases} s = 0{,}7496 \cdot r \\ r + s = 13{,}376 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de equação, temos:

$$r + (0{,}7496 \cdot r) = 13{,}376$$

$$r \cdot (0{,}7496 + 1)$$

$$1{,}7496 \cdot r = 13{,}376$$

$$r = 7{,}6452\ km$$

$$r + s = 13{,}376$$

$$s = 13{,}376 - 7{,}6452$$

$$s = 5{,}7308\ km\,.$$

Agora, devemos encontrar a medida do mastro. Para isso, utilizaremos a identidade trigonométrica vista anteriormente que $\tan\theta = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$. Temos que:

$$\tan 3° = \frac{z}{r}$$

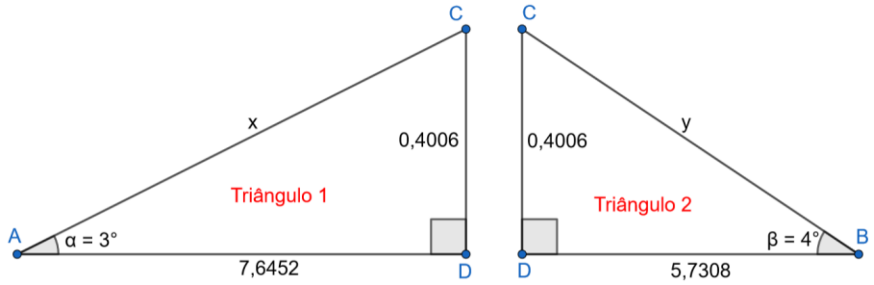
$$0{,}0524 \cdot r = z$$

$$z = 0{,}0524 \cdot 7{,}6452$$

$$z = 0{,}4006\ km\,.$$

Com o objetivo de facilitar a resolução do problema, iremos inserir no esboço os valores encontrados até o momento, logo, temos que:

Figura 20 - Separação de triângulo com dados



Fonte: Elaboração Própria.

Agora podemos encontrar os valores do cabos. Para isso, iremos resolver cada triângulo separadamente. Logo, temos que:

(i) Tomando o triângulo ACD, temos que:

Utilizando o Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$x^2 \cong 7{,}6452^2 + 0{,}4006^2$$

$$x^2 \cong 58{,}4491 + 0{,}1605$$

$$x^2 \cong 58{,}6096$$

$$x \cong 7{,}6557\ km\,.$$

(ii) Resolvendo o triângulo BCD, temos que:

Utilizando o Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$y^2 \cong 5{,}7308^2 + 0{,}4006^2$$

$$y^2 \cong 32{,}8421 + 0{,}1605$$

$$y^2 \cong 32{,}0026$$

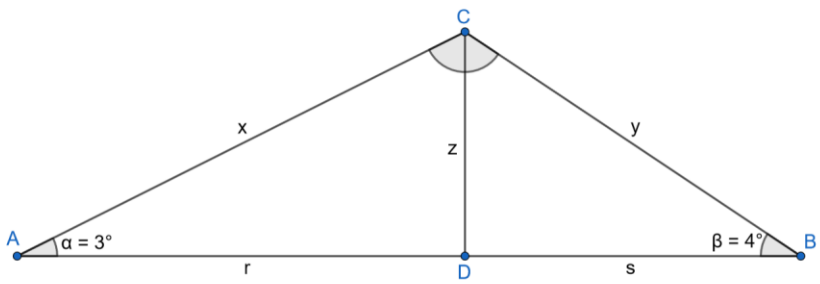
$$y \cong 5{,}7448\ km\ .$$

Portanto, o cabo $AC = 7{,}6557\ km$ e o cabo $BC = 5{,}7448\ km$.

Solução 02 – Através da LS:

Coletando todas as informações dadas pela questão, podemos construir a seguinte figura que nos auxiliará na resolução do problema.

Figura 21 - Problema gerador - Solução 02



Fonte: Elaboração Própria.

Através dos estudos obtidos nesse trabalho, sabemos que a LS é dada pela seguinte relação:

$$\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{b}{sen\ \hat{B}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}}\ .$$

Para que possamos resolver através de LS, devemos conhecer o ângulo $\hat{C}$. Para isso, devemos lembrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, logo:

$$180° = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$$

$$180° = 3° + 4° + \hat{C}$$

$$\hat{C} = 173°\ .$$

Agora, podemos calcular o valor dos cabos de sustentação. Temos que:

(i) Calculando o cabo BC:

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$$

$$\frac{y}{sen\,3°} = \frac{13{,}376}{sen\,173°}$$

$$\frac{y}{0{,}0523} \cong \frac{13{,}376}{0{,}1219}$$

$$0{,}1219 \cdot y \cong 0{,}6996$$

$$y \cong 5{,}7391\ km\ .$$

(ii) Calculando o cabo AC:

$$\frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$$

$$\frac{x}{sen\,4°} = \frac{13{,}376}{sen\,173°}$$

$$\frac{x}{0{,}0698} \cong \frac{13{,}376}{0{,}1219}$$

$$0{,}1219 \cdot x \cong 0{,}9336$$

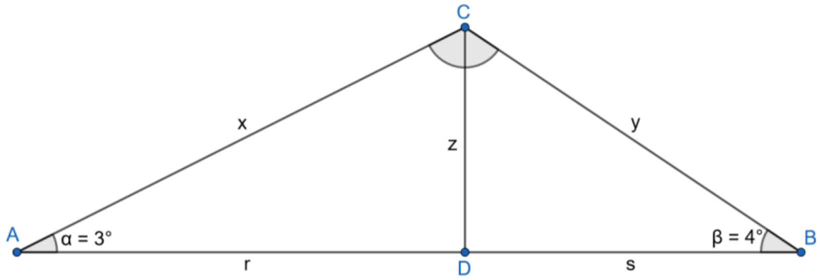
$$x \cong 7{,}6587\ km\ .$$

Portanto, o cabo $AC = 7{,}6587\ km$ e o cabo $BC = 5{,}7391\ km$.

Solução 03 – Através da LC:

Coletando todas as informações dadas pela questão, podemos construir a seguinte figura que nos auxiliará na resolução do problema.

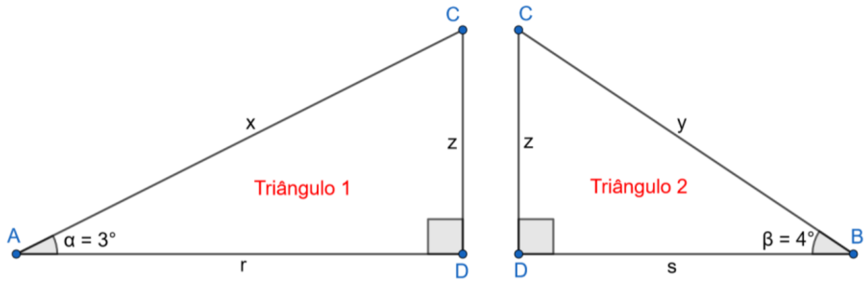
Figura 22 - Problema gerador - Solução 03



Fonte: Elaboração Própria.

Com o objetivo de facilitar a resolução da questão, podemos dividir o triângulo em dois triângulos ACD e BCD. Temos:

Figura 23 - Separação de triângulo – Solução 03



Fonte: Elaboração Própria.

Podemos notar que a extensão da ponte é calculada através da adição das medidas de r e s. Logo, temos que:

$$r + s = 13{,}376\ km\,.$$

Para que possamos prosseguir com os cálculos, devemos descobrir quais são os valores de r e s. Utilizando conceitos previamente vistos em sala de aula que $\tan\theta = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$, e utilizando os dados da questão que $\tan 3° = 0{,}0524$ e $\tan 4° = 0{,}0699$ encontramos um sistema de equação que nos auxiliará na resolução do problema. Logo, temos que:

$$\frac{\tan 3°}{\tan 4°} = \frac{0{,}0524}{0{,}0699} = 0{,}7496$$

$$\frac{\tan 3°}{\tan 4°} = \frac{\frac{z}{r}}{\frac{z}{s}}$$

$$0{,}7496 = \frac{s}{r}$$

$$s = 0{,}7496 \cdot r\,.$$

Escrevendo o sistema de equação temos que:

$$\begin{cases} s = 0{,}7496 \cdot r \\ r + s = 13{,}376 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de equação, temos:

$$r + (0{,}7496 \cdot r) = 13{,}376$$

$$r \cdot (0{,}7496 + 1)$$

$$1{,}7496 \cdot r = 13{,}376$$

$$r = 7{,}6452\ km$$

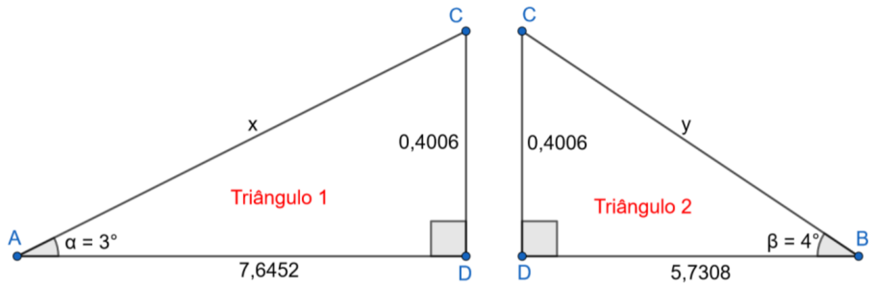
$$r + s = 13{,}376$$
$$s = 13{,}376 - 7{,}6452$$
$$s = 5{,}7308\ km\,.$$

Agora, devemos encontrar a medida do mastro. Para isso, utilizaremos a identidade trigonométrica vista anteriormente que $\tan\theta = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$. Temos que:

$$\tan 3° = \frac{z}{r}$$
$$0{,}0524 \cdot r = z$$
$$z = 0{,}0524 \cdot 7{,}6452$$
$$z = 0{,}4006\ km\,.$$

Com o objetivo de facilitar a resolução do problema, iremos inserir no esboço os valores encontrados até o momento, logo, temos que:

Figura 24 - Separação de triângulo com dados – Solução 03



Fonte: Elaboração Própria.

Através dos estudos obtidos nesse trabalho, sabemos que a LC é dada pelo seguinte teorema:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\hat{A}\,.$$

Agora podemos encontrar os valores do cabos. Para isso, iremos resolver cada triângulo separadamente. Aplicando a LC, temos que:

(i) Tomando o triângulo ACD, temos que:

$$x^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \widehat{D}$$
$$x^2 = 0{,}4006^2 + 7{,}6452^2 - 2 \cdot 0{,}4006 \cdot 7{,}6452 \cdot \cos 90°$$
$$x^2 = 0{,}1605 + 58{,}4491 - 2 \cdot 0{,}4006 \cdot 7{,}6452 \cdot 0$$
$$x^2 = 58{,}6096$$
$$x = 7{,}6557\ km\ .$$

(ii) Resolvendo o triângulo BCD, temos que:

$$y^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \widehat{D}$$
$$y^2 = 0{,}4006^2 + 5{,}7308^2 - 2 \cdot 0{,}4006 \cdot 5{,}7308 \cdot \cos 90°$$
$$y^2 = 0{,}1605 + 32{,}8421 - 2 \cdot 0{,}4006 \cdot 5{,}7308 \cdot 0$$
$$y^2 = 33{,}0026$$
$$y = 5{,}7448\ km\ .$$

Portanto, o cabo $AC = 7{,}6557\ km$ e o cabo $BC = 5{,}7448\ km$.

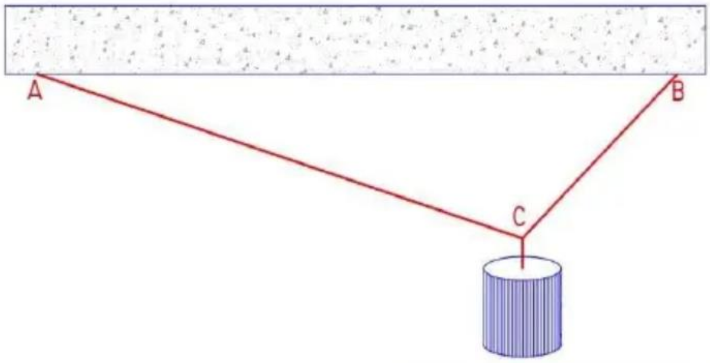
Aula 02:

Nessa aula faremos uso da metodologia RP com a perspectiva para a resolução de problema, uma vez que utilizaremos de exercícios contextualizados para contribuir com o desenvolvimento das habilidades e compreensões matemáticas dos estudantes. Será entregue uma lista com cinco problemas, com o objetivo de consolidar os conceitos matemáticos previamente ensinados, a atividade oferece aos estudantes a oportunidade de praticar e aplicar o que aprenderam, fortalecendo sua compreensão e habilidades. A lista deve ser realizada em sala de aula e de forma individual, afim de valorizar a experiência pessoal de cada aluno, e ao final da aula a atividade será recolhida.

A seguir veremos as questões com suas respectivas resoluções:

1) (ENRICONI, M. H. S.; LEDUR, B. S.; SEIBERT, T. E., 2001. Adaptada.) João trabalha com produção de festas e eventos. Um dia, um cliente pediu para que ele prendesse um objeto suspenso no teto através de dois cabos de aço. A distância entre os pontos de suspensão é de $18\ m$, e os cabos medem $13\ m$ e $6\ m$. Calcule o ângulo formado entre os dois cabos.

Figura 25 - Questão 01 dos exercícios propostos



Fonte: ENRICONI, M. H. S.; LEDUR, B. S.; SEIBERT, T. E. (2001)

Solução: Como visto anteriormente, para questões nos quais temos conhecimento de mais valores de lados do que de ângulos, devemos utilizar a LC.

Como já temos todos os dados para a resolução do problema, iremos utilizar diretamente o teorema. Logo:

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2 - 2 \cdot (AC) \cdot (BC) \cdot \cos \hat{C}$$

$$18^2 = 13^2 + 6^2 - 2 \cdot 13 \cdot 6 \cdot \cos \hat{C}$$

$$324 = 169 + 36 - 156 \cdot \cos \hat{C}$$

$$119 = -156 \cdot \cos \hat{C}$$

$$\cos \hat{C} = -\frac{119}{156}$$

$$\cos \hat{C} \cong -0{,}763\ .$$

Agora utilizaremos a função arco cosseno, com o objetivo de, uma vez que conhecemos o valor do cosseno, obter o ângulo correspondente.

$$\hat{C} \cong arc\cos\ (-0{,}763)$$

$$\hat{C} \cong 139{,}7°\ .$$

Portanto, o ângulo formado entre os dois cabos de aço é aproximadamente $139{,}7°$.

2) (SANTOS; MUNHOZ; QUARTIERI, 2015. Adaptada.) A Figura 26 mostra que existem duas embarcações atracadas nos portos B e C, respectivamente, na Ilha de Santana, localizada no Amapá. A distância uma da outra é de $100\ m$ e ambas ficam no mesmo lado do Rio Amazonas. Além disso, há o porto de Santana em A do outro lado do mesmo rio. Usando equipamentos apropriados, verificou-se que o ângulo $\hat{B}$ mede $45°$ e o $\hat{C}$, $105°$.

Determine (aproximadamente) a distância que separa a embarcação que está no porto C do porto de Santana A.

Figura 26 - Questão 02 dos exercícios propostos

Fonte: Google Earth (2014)

Solução: Como visto anteriormente, para questões nos quais temos conhecimento de mais valores de ângulos do que de lados, devemos utilizar a LS.

Para podermos utilizar a LS, devemos conhecer o ângulo $\hat{A}$, portanto, usaremos os conhecimentos sobre ângulos suplementares para descobri-lo, logo:

$$180° = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$$
$$\hat{A} = 180° - 45° - 105°$$
$$\hat{A} = 30°\,.$$

Como já temos todos os dados para a resolução do problema, iremos utilizar a LS. Logo:

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}}\,.$$

Tendo $a = BC$ e $b = AC$, temos:

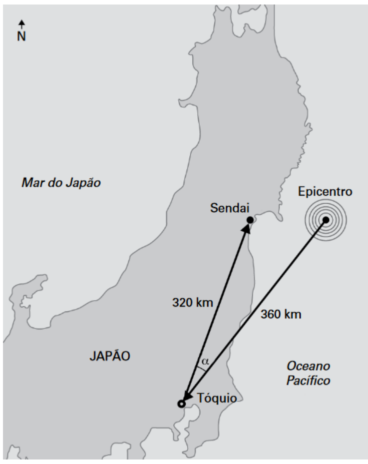
$$\frac{100}{sen\,30°} = \frac{b}{sen\,45°}$$
$$\frac{100}{0{,}5} = \frac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$
$$50\sqrt{2} = 0{,}5 \cdot b$$
$$b = 100\sqrt{2}\,m\,.$$

Portanto, a distância que separa a embarcação que está no ponto C do porto de Santana

A é $100\sqrt{2}\ m$, ou aproximadamente $141{,}42\ m$.

3) (UNESP 2012) No dia 11 de março de 2011, o Japão foi sacudido por terremoto com intensidade de 8,9 na Escala Richter, com o epicentro no Oceano Pacífico, a $360\ km$ de Tóquio, seguido de um tsunami. A cidade de Sendai, a $320\ km$ a nordeste de Tóquio, foi atingida pela primeira onda do tsunami após 13 $minutos$.

Figura 27 - Questão 03 dos exercícios propostos



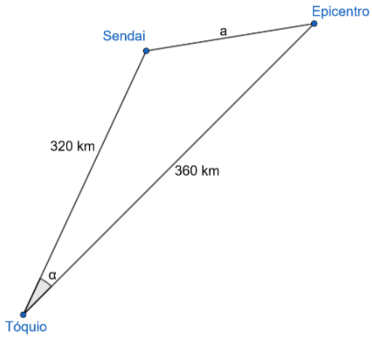
Fonte: O Estado de S. Paulo (2011)

Baseando-se nos dados fornecidos e sabendo que $\cos\alpha \cong 0{,}934$, onde α é o ângulo Epicentro-Tóquio-Sendai, e que $2^8 \cdot 3^2 \cdot 93{,}4 \cong 215100$, a velocidade média, em km/h, com que a 1ª onda do tsunami atingiu até a cidade de Sendai foi de:

a) 10
b) 50
c) 100
d) 250
e) 600

Solução: Coletando todas as informações dadas pela questão, podemos construir a seguinte figura que nos auxiliará na resolução do problema.

Figura 28 - Triângulo para resolução de questão 3



Fonte: Elaboração Própria.

Para encontrar a velocidade média com que a 1° onda atingiu Sendai, temos que saber a distância do Epicentro até Sendai, logo, para isso utilizaremos a LC, pois para questões nos quais temos conhecimento de mais valores de lados do que de ângulos, ela deve ser utilizada, logo, temos que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

Tendo: $a = distância\ do\ Epicentro\ até\ Sendai$

$$b = distância\ do\ Epicentro\ até\ Tóquio$$

$$c = distância\ de\ Tóquio\ até\ Sendai$$

$$a^2 = 360^2 + 320^2 - 2 \cdot 360 \cdot 320 \cdot \cos \alpha\ .$$

Aqui faremos uma simplificação do número $2 \cdot 360 \cdot 320$, para que os cálculos fiquem mais fáceis, e possamos utilizar a informação dada na questão. Logo, temos:

$$a^2 = 129600 + 102400 - 2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 10 \cdot 2^5 \cdot 10 \cdot 0{,}934$$

$$a^2 = 232000 - 2^8 \cdot 3^2 \cdot 93{,}4\ .$$

Utilizando $2^8 \cdot 3^2 \cdot 93{,}4 \cong 215100$, dada pela questão, temos que:

$$a^2 = 232000 - 215100$$

$$a^2 = 16900$$

$$a = 130\ km\ .$$

Do enunciado, temos que a primeira onda atingiu Sendai após $13\ minutos$. Para calcular a velocidade média em km/h, devemos converter os minutos em horas, logo, temos:

$$1\ h = 60\ min$$

$$x\ h = 13\ min$$

$$13 = 60 \cdot x$$

$$x = \frac{13}{60}\ h\ .$$

Por fim, calculando a velocidade média, temos que:

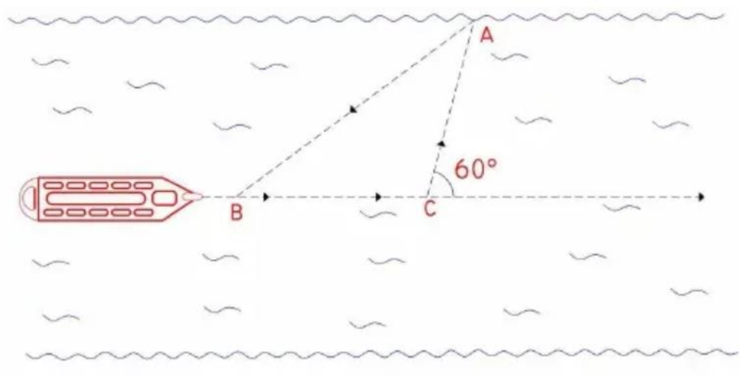
$$V = \frac{130\ km}{\frac{13}{60}\ h}$$

$$V = 600\frac{km}{h}.$$

Logo, a resposta é letra e) $600\ km/h$.

4) (ENRICONI, M. H. S.; LEDUR, B. S.; SEIBERT, T. E., 2001. Adaptado.) Partindo do ponto B, um navio deve fazer o percurso BCA de forma linear, retomando ao seu ponto de partida, percorrendo AB. A distância percorrida de B até C é de 7 km. Ao mudar de rumo em C, sob um ângulo de $60°$, ele percorre mais 8 km até chegar em A. Determine a distância do ponto A ao ponto de partida B.

Figura 29 - Questão 04 dos exercícios propostos



Fonte: ENRICONI, M. H. S.; LEDUR, B. S.; SEIBERT, T. E. (2001)

Solução: Este problema será resolvido utilizando a LC, pois para questões nos quais temos conhecimento de mais valores de lados do que de ângulos, ela deve ser utilizada.

Para podermos utilizar a LC, devemos conhecer o ângulo $B\hat{C}A$, portanto, usaremos os conhecimentos sobre ângulos suplementares para descobri-lo, logo:

$$180° = 60° + B\hat{C}A$$

$$B\hat{C}A = 120°\ .$$

Agora, podemos aplicar a LC.

$$(AB)^2 = (BC)^2 + (CA)^2 - 2 \cdot (BC) \cdot (CA) \cdot \cos\ (B\hat{C}A)$$

$$(AB)^2 = 7^2 + 8^2 - 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \cos 120°$$

$$(AB)^2 = 49 + 64 - 112 \cdot (-0{,}5)$$

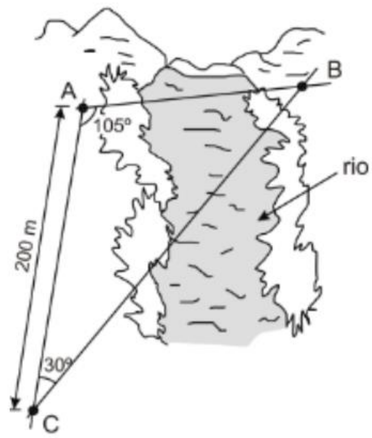
$$(AB)^2 = 169$$

$$AB = 13\ km\ .$$

Portanto, a distância do ponto A até o ponto B é de 13 km.

5) (UFPB - 2010) A prefeitura de certa cidade vai construir, sobre um rio que corta essa cidade, uma ponte que deve ser reta e ligar dois pontos A e B, localizados nas margens opostas do rio. Para medir a distância entre esses pontos, um topógrafo localizou um terceiro ponto C, distante $200\ m$ do ponto A e na mesma margem do rio onde se encontra o ponto A. Usando um teodolito (instrumento de precisão para medir ângulos horizontais e ângulos verticais, muito empregado em trabalhos topográficos), o topógrafo observou que os ângulos $B\hat{C}A$ e $C\hat{A}B$ mediam, respectivamente, $30°$ e $105°$, conforme ilustrado na figura a seguir.

Figura 30 - Questão 05 dos exercícios propostos



Fonte: UFPB (2010)

Com base nessas informações, é correto afirmar que a distância, em metros, do ponto A ao ponto B é de:

a) $200\sqrt{2}$

b) $180\sqrt{2}$

c) $150\sqrt{2}$

d) $100\sqrt{2}$

e) $50\sqrt{2}$

Solução: Como visto anteriormente, para questões nos quais temos conhecimento de mais valores de ângulos do que de lados, devemos utilizar a LS.

Para que possamos resolver através de LS, devemos conhecer o ângulo $\hat{B}$. Para isso, devemos lembrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, logo:

$$180° = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$$

$$180° = 105° + \hat{B} + 30°$$

$$\hat{B} = 45°\ .$$

Como já temos todos os dados para a resolução do problema, iremos utilizar agora a LS. Logo:

$$\frac{b}{sen\ \hat{B}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}}\ .$$

Tendo $b = AC$ e $c = AB$, temos:

$$\frac{200}{sen\ 45°} = \frac{c}{sen\ 30°}$$

$$0{,}5 \cdot 200 = c \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$100 = c \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{100}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = c$$

$$\frac{200}{\sqrt{2}} = c$$

$$\frac{200\sqrt{2}}{2} = c$$

$$c = 100\sqrt{2}\ m\ .$$

Logo, a resposta é letra $d)\ 100\sqrt{2}\ m$.

Aulas 03 e 04:

Nesse momento, o professor fará a devolutiva das atividades aos alunos. Logo após a entrega, será explicado o assunto com mais detalhes, o docente deve demonstrar um dos três casos da LS, e um caso da LC, sendo o caso do triângulo acutângulo ou obtusângulo, vistos anteriormente nas seções 6.1 e 6.2 respectivamente. Após a demonstração, deverá pedir aos alunos para fazerem a demonstração da LC no triângulo retângulo para que eles notem que o Teorema de Pitágoras é uma variação da LC.

Posteriormente, será exposta a história do surgimento das teorias, e para finalizar será exemplificada algumas aplicações nas quais as leis podem ser utilizadas. Podemos citar exemplos como:

- Segundo Kavanagh e Mastin (2012), a LC pode ser aplicada em levantamentos topográficos e agrimensura para calcular distâncias e alturas inacessíveis, utilizando ângulos medidos em diferentes pontos;
- De acordo com Hibbeller (2015), na engenharia estrutural a LC pode ser utilizada para calcular forças e tensões em estruturas. Por exemplo, ao projetar uma ponte suspensa, é necessário determinar as tensões nos cabos de suspensão. A LC pode ser aplicada para relacionar as forças aplicadas aos cabos com os ângulos entre eles;
- Segundo Torge e Muller (2012), na Geodésia, que é a ciência que estuda a forma e a medição da Terra, a LC pode ser aplicada na determinação de distâncias entre pontos na superfície terrestre, levando em consideração a curvatura do planeta.

Após isso, começaremos a correção coletiva em sala de aula.

4) **Objetivos gerais**: seguindo a competência específica 3 da BNCC, a qual visa:

> Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Os objetivos gerais da SD exposta serão:

- Introduzir e definir a LS e a LC;
- Apresentar as relações matemáticas, propriedades e operações das LS e LC;
- Solidificar e aprofundar os conceitos essenciais da Trigonometria e suas aplicações.

5) **Objetivos específicos**: seguindo a habilidade EM13MAT306 da BNCC, a qual busca:

> Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

Os objetivos específicos da SD serão:

- Revisar as relações trigonométricas já vistas (seno, cosseno e tangente) e reforçar algumas características destas;
- Utilizar o cálculo de distâncias na Topografia para demonstrar a presença da LS e LC em situações práticas, como o cálculo da extensão de pontes, represas e viadutos, por exemplo;
- Resolver problemas que envolvam as medidas dos lados e dos ângulos de triângulos quaisquer.

6) **Conteúdos**: os objetos de conhecimentos (conteúdos) principais abordados nessa proposta são a LS e a LC, que são as relações métricas em triângulos quaisquer, porém existem alguns outros conteúdos que os permeiam, como as relações métricas no triângulo retângulo que servem como pré-requisitos. E existem também aqueles conteúdos nos quais há a necessidade de terem sido apresentados previamente aos alunos para que haja uma construção gradativa;

7) **Dinâmica**: como esse trabalho visa o estudo sobre a RP, essa será a metodologia empregada para promover a participação ativa dos alunos no processo de aprendizagem. A principal perspectiva empregada nesse trabalho foi a de ensinar Matemática através da Resolução de Problemas, porém como vimos nesse trabalho, quando passamos a propor novas atividades que não exigiam novas habilidades do alunos, acabamos gerando um ciclo que tende ao viés do ensino para a Resolução de Problemas.

Devemos lembrar que o objetivo das aulas é alcançar o maior número de alunos, então se faz importante o emprego de diversas metodologias;

8) **Avaliação**: O método de avaliação será escolha do professor, ou seja, de acordo com o seu

olhar, ele poderá escolher um tipo de avaliação para qualificar alguma característica que ele julgue necessário para o aluno, lembrando que deve estar de acordo com as diretrizes da escola. Para a SD em questão, iremos avaliar de acordo com as realizações das atividades, a participação ativa e as suas contribuições diante do desenvolvimento das atividades propostas.

9) **Referencial bibliográfico**: as referências utilizadas para a confecção dessa SD foram:

- PERETTI, L.; COSTA, G. M. T. Sequência didática na matemática. **REI – Revista de Educação do Ideau**, v. 8, n. 17, p. 1–14, 2013.
- SANTOS, V. J. **Matemática IFBA**: Trigonometria em triângulos quaisquer, 2012.
- CABRAL, N. F. **Sequências didáticas**: estrutura e elaboração. Belém: SBEM, 2017.

10) **Bibliografia consultada**: a bibliografia consultada para a criação da SD e das aulas foram:

- PERETTI, L.; COSTA, G. M. T. Sequência didática na matemática. **REI – Revista de Educação do Ideau**, v. 8, n. 17, p. 1–14, 2013.
- SANTOS, V. J. **Matemática IFBA**: Trigonometria em triângulos quaisquer, 2012.
- CABRAL, N. F. **Sequências didáticas**: estrutura e elaboração. Belém: SBEM, 2017.
- COSTA, N. M. L. **Funções seno e cosseno**: uma sequência de ensino a partir dos contextos do “mundo experimental” e do computador, 1997.
- MAIA, R. D. **Um estudo sobre lei dos senos, lei dos cossenos e suas aplicações**, 2015.

7 Considerações Finais

De acordo com os estudos realizados em torno das aplicabilidades da Trigonometria e visando melhorias no ensino da Matemática citadas nessa pesquisa, tornou-se possível desenvolver propostas que desmitifiquem o ensino da Matemática e facilite a compreensão desta disciplina. Sabe-se que a Matemática é de fundamental importância, pois ela se faz presente no nosso cotidiano, mesmo que às vezes pareça imperceptível.

Ao analisar os estudos realizados neste trabalho, ficou evidente que as dificuldades enfrentadas pelos alunos, conforme exposto anteriormente, podem ser mitigadas por meio da aplicação da metodologia RP em conjunto com atividades diversificadas. Essa combinação demonstrou um potencial significativo para superar as dificuldades apresentadas pelos estudantes. A abordagem da RP proporciona aos alunos um ambiente de aprendizado mais envolvente e interativo, estimulando o desenvolvimento do pensamento crítico, da criatividade e da resolução de problemas.

A RP pode contribuir com a melhora no ensino da Matemática, permite que os alunos apliquem conceitos e habilidades em situações reais e contextualizadas. Isso ajuda a tornar a Matemática mais significativa, mostrando aos alunos como ela se aplica no mundo ao seu redor. Ao resolver problemas reais, os alunos podem perceber a importância e a utilidade dos conceitos matemáticos, o que aumenta sua motivação e engajamento.

A RP estimula o desenvolvimento do pensamento crítico e criativo dos alunos. Ao enfrentarem problemas complexos, os alunos são desafiados a analisar, interpretar e pensar de forma crítica para encontrar soluções. Eles são incentivados a explorar diferentes estratégias, experimentar abordagens alternativas e tomar decisões fundamentadas, desenvolvendo assim sua capacidade de resolver problemas de maneira independente. A RP promove uma abordagem ativa e participativa na sala de aula. Em vez de serem meros receptores de informações, os alunos se tornam protagonistas de seu próprio aprendizado, eles são encorajados a formular perguntas, levantar hipóteses, colaborar com os colegas e comunicar suas ideias matemáticas.

Ao longo do estudo, observamos que a Trigonometria possui aplicações práticas no cotidiano, seja na Agricultura, Astronomia ou em diversas outras áreas. No entanto, muitas vezes os estudantes não têm uma experiência aprofundada com esse conteúdo, o que pode levar à falta de conexão entre a Matemática e a vida real. Portanto, é fundamental que o educador apresente mecanismos que estabeleçam essa ligação, permitindo que a Matemática faça sentido e favoreça o desenvolvimento do raciocínio dos alunos.

Ser professor não significa somente ensinar conteúdos, mas, sobretudo, ser um educador comprometido com as transformações da sociedade, proporcionando oportunidades aos alunos no exercício dos direitos básicos à cidadania. É importante que o aluno enxergue a Matemática como elemento que favorece o desenvolvimento do raciocínio, porém, para que isso ocorra é importante que o educador apresente mecanismos que conectam a Matemática à realidade, para que ela apresente sentido lógico. Para isso, o processo de ensino está relacionado a técnicas e materiais adequados utilizados pelo professor de modo que o aluno possa compreender os conceitos expostos e, assim, organizar as ideias enxergando uma solução para aquele problema.

Buscamos mostrar com essa pesquisa que a RP junto com a SD é uma alternativa viável para o ensino de Matemática, sobretudo o ensino de LS e LC. Demonstramos aqui que existe um método diferente de abordar tais conceitos, além do método tradicional ao qual costumávamos ver.

A aplicação de uma SD sobre Trigonometria pode enfrentar diversos desafios. É importante estar ciente deles e buscar maneiras de superá-los para garantir uma experiência de aprendizagem efetiva para os alunos. Alguns dos desafios que podem aparecer são a dificuldade de visualização e compreensão de ideias abstratas, uma vez que os conceitos de seno, cosseno, tangente, ângulos, entre outros, envolvem conceitos abstratos, por isso, é essencial utilizar estratégias de ensino que tornem esses conceitos mais concretos e aplicáveis ao mundo real, outro desafio são as dificuldades prévias, pois os alunos podem apresentar dificuldades prévias em conceitos matemáticos fundamentais que são pré-requisitos para a trigonometria, sendo assim, é essencial fazer uma revisão adequada dos conceitos básicos antes de introduzir a trigonometria para garantir que todos os alunos estejam preparados.

A RP é uma tendência metodológica que se concentra em desenvolver a capacidade dos alunos de aplicar o conhecimento adquirido para resolver situações desafiadoras da vida real. A relação entre SD e RP é bastante relevante para o ensino da Matemática, ao projetar uma SD que inclua tal metodologia, o professor cria oportunidades para que os alunos apliquem os conceitos teóricos em contextos concretos, tornando o aprendizado mais significativo e relevante. Dessa forma, a RP se torna um elemento chave para promover o desenvolvimento do pensamento crítico e da habilidade de transferir o conhecimento para situações reais.

Com base nos resultados desta pesquisa, sugere-se que estudos futuros sejam conduzidos para investigar como os outros tipos de tendências metodológicas podem extrair em conjunto com a SD, benefícios em diferentes perfis de alunos, considerando as suas diversidades cognitivas, culturais e sociais. Estudos que explorem a eficácia de combinações metodológicas, levando em consideração fatores como o engajamento dos alunos, a melhoria da compreensão conceitual e a transferência de conhecimentos para situações do mundo real, poderiam contribuir significativamente para o aprimoramento do ensino da Matemática.

8 Referências

ALLEVATO, N. S. G. **Associando o computador à resolução de problemas fechados**: análise de uma experiência. 2005. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/102164/allevato_nsg_dr_rcla.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em 25 set. 2022.

ANDRADE, M. M. **Introdução à metodologia do trabalho científico**: elaboração de trabalhos na graduação. São Paulo, SP: Atlas, 2010.

ARGENTO, C.; MOUTINHO, I. **Aula 10 – Trigonometria**. Três Rios: CEDERJ, 2019.

ARMSTRONG, T. **Inteligências múltiplas na sala de aula**. Tradução: Maria Adriana Veríssimo Veronese. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2001.

AUSUBEL, D. **Aquisição e retenção de conhecimentos**: uma perspectiva cognitiva. Lisboa: Editora Plátano, 2003.

BARBOSA, C. E. G. **Yogaforum.org**: o que é o sânscrito, 2008. Disponível em: https://yogaforum.org/06/2008/o-que-e-o-sanscrito/. Acesso em: 30 mar. 2023.

BASTOS, C. L; KELLER, V. **Aprendendo a aprender**. Petrópolis: Vozes, 1995.

BERGMANN, T. S; FRAQUELLI, H. A. Construção de um gnomon e de um relógio solar. **Instituto de Física - UFRGS**. Disponível em: https://www.if.ufrgs.br/~riffel/notas_aula/ensino_astro/roteiros/Roteiro_Relogiosolar_Gnomon.htm. Acesso em: 18 nov. 2022.

BORGES, D. Escrita cuneiforme: O que era, quando surgiu e suas características. **Conhecimento Científico**, 2022. Disponível em: https://conhecimentocientifico.com/escrita-cuneiforme/. Acesso em: 18 nov. 2022.

BOYER, C. B. **História da matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 1974.

BRAGA, H. F. et al. Resolução de problemas. **Temas & Conexões Revista do Departamento de Matemática do Colégio Pedro II**, 2017. Disponível em: https://cp2.g12.br/index.php. Acesso em 25 set. 2022.

BRANDT, C. F.; MORETTI, M. T. **Ensinar e aprender matemática**: possibilidades para a prática educativa. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2016.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum para a formação inicial de professores da Educação Básica**. Brasília: MEC, 2019.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs)**: Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.
BRITO, M. R. F. Alguns aspectos teóricos e conceituais da solução de problemas matemáticos. In: BRITO, M. R. F. (Org.). **Solução de problemas e a matemática escolar**. Campinas, Alínea, p. 13-53, 2006.

CABRAL, N. F. **Sequências didáticas**: estrutura e elaboração. Belém: SBEM, 2017.

COBRA, R. Q. **Cobra pages**: vultos e episódios da Época Moderna, 1997. Disponível em: https://www.cobra.pages.nom.br/filmod/wallis/. Acesso em: 02 nov. 2022.

COLLING, A. P. S. **O ensino da geometria através de um projeto interdisciplinar**: uma estratégia de ensino na matemática do Ensino Médio. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2008.

CONCEIÇÃO, M. A. C. **Geometria fractal:** uma sequência didática para a educação básica. 2019. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia, Valença, 2019.

CONTRERAS, L. C. La resolución de problemas, uma panacea metodológica? **Enseñanza de las Ciencias**, 1987, p. 49-52.

CORRÊA, S. S. **Uma sequência didática para o ensino e aprendizagem de proporcionalidade no ensino médio**. 2019. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Rio de Janeiro, 2019.

COSTA, N. M. L. **Funções seno e cosseno**: uma sequência de ensino a partir dos contextos do “mundo experimental” e do computador. 1997. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

CUNLIFFE, T. **The Complete Yachtmaster:** Sailing, Seamanship and Navigation for the Modern Yacht Skipper. 10. ed. London: Adlard Coles, 2022.

DANTE, L. R. **Formulação e resolução de problemas de matemática**: teoria e prática. São Paulo: Ática, 2011.

Devido a não-divulgação de microdados, Anuário da Educação Básica não terá edição pela primeira vez em 10 anos. **Todos pela Educação**, 2022. Disponível em: https://todospelaeducacao.org.br/noticias/devido-a-nao-divulgacao-de-microdados-anuario-da-educacao-basica-nao-tera-edicao-pela-primeira-vez-em-10-anos/ Acesso em: 18 jul. 2023.

DINIZ, M. I. Resolução de Problemas e Comunicação. In: SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. (org.). **Ler, escrever e resolver problemas**: habilidades básicas para aprender matemática. São Paulo: Artmed, 2001.

ENRICONI, M. H. S.; LEDUR, B. S.; SEIBERT, T. E. **A trigonometria por meio da construção de conceitos**. rev. ed. São Leopoldo: UNISINOS, 2001.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: 5. ed. Editora da UNICAMP, 2011.

FELIX, D. D. **História da trigonometria**: um levantamento dos trabalhos produzidos nos cursos de especialização e graduação do Departamento de Matemática. 2011. Monografia (Licenciatura plena em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2011.

FIORENTINI, Dário. Alguns modos de ver e conceber o ensino da Matemática no Brasil. **Revista Zetetike**. São Paulo, ano 3, 1995.

FONSECA, J. J. S. **Metodologia da pesquisa científica**. Fortaleza: UEC, 2002.

FUNDAÇÃO VICTOR CIVITA (São Paulo) (org.). **Boas práticas docentes no ensino da matemática**. Cotia: Brasilform Editora Indústria Gráfica, 2012.

GOMES, A. N. **Proposta de Sequência Didática com Secção Áurea**: Geometria dinâmica e arquitetura. 2009. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2009.

GOOGLE. (2023). **Baía de Todos os Santos**. Disponível em: https://www.google.pt/maps/place/Ba%C3%ADa+de+Todos+os+Santos/@-12.9828505,-38.6526881,54982m/data=!3m1!1e3!4m6!3m5!1s0x7160a3f210ea585:0x12002e9065ae5740!8m2!3d-12.847793!4d-38.6320086!16zL20vMDNsY21f?hl=pt-PT&entry=ttu. Acesso em: 03 jun. 2023.

GUIMARÃES, Y. A.; GIORDAN, M. Instrumento para construção e validação de sequências didáticas em um curso a distância de formação continuada de professores. **VIIII ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS**. Campinas, 2011.

HIBBELER, R. C. **Engineering Mechanics:** Statics & Dynamics. 14. ed. London: Pearson, 2015.

IME-USP (Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo). **E-Calculo**: Um pouco da História da Trigonometria, 2009. Disponível em: http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_trigonometria.htm. Acesso em: 02 nov. 2022.

INÁCIO, L. **Página pessoal de Liete Inácio**: Fibonacci, 2012. Disponível em: http://www.mat.uc.pt/~mat0717/fibo.html. Acesso em: 02 nov. 2022.

KAVANAGH, B.; MASTIN, T. **Surveying:** principles and applications. 9. ed. London: Pearson, 2012.

KOBASHIGAWA, A. H.; ATHAYDE, B. A. C.; MATOS, K. F.; CAMELO, M.H.; FALCONI, S. Estação ciência: formação de educadores para o ensino de ciências nas séries iniciais do ensino fundamental. In: **IV Seminário Nacional ABC na Educação Científica**. São Paulo, 2008. p. 212-217. Disponível em: https://repositorio.usp.br/. Acesso em: 03 abr. 2023.

LIMA, L. S.; COSME, A. Avaliar através da resolução de problemas: articulação entre investigação, teoria e prática. In: **Atas do XXVIII Seminário de Investigação em Educação**

Matemática. Disponível em: https://repositorioaberto.up.pt/bitstream/10216/125867/2/381715.pdf. Acesso em: 29 jul. 2023.

MAIA, R. D. **Um estudo sobre lei dos senos, lei dos cossenos e suas aplicações**. 2015. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Caicó, 2015.

MARTINS, K. N. **A pesquisa brasileira em resolução de problemas na educação matemática**: um estudo a partir de teses e dissertações (2016-2020). 2022. Dissertação (Mestrado em educação em ciências e matemática) – Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2022.

MARTINS, K. N.; BÔAS, J. V. Um cenário de estudos envolvendo o ensino de matemática através da resolução de problemas em periódicos. **Revista PUC-SP**, São Paulo, v. 22, n. 2. p. 252-280, 2020.

MARTINS, K. N. et al. Resolução de problemas e formação de professores: um mapeamento de teses brasileiras no campo da educação matemática (2014-2019). **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Paraná, v. 10, n. 21, p. 418-439, 2021.

MARTINS, V. **Como desenvolver a capacidade de aprender?** Entrevista concedida a Luciane Mari Deschamps. Recanto das Letras, p. 1-4, 22 ago. 2011. Disponível em: https://www.recantodasletras.com.br/trabalhos-academicos-de-pedagogia/3175035. Acesso em: 25 set. 2022.

MATECA, P. **Blog do Professor Mateca**: Teorema de Ptolomeu, 2019. Disponível em: https://professormateca.com.br/blog/. Acesso em: 25 nov. 2022

MELO, L. A. L. et al. **Resolução de problemas segundo George Pólya**: uma abordagem metodológica para solucionar problemas matemáticos. In: Anais X EPBEM e V ECMAT, 2018, Campina Grande. **Anais**, Campina Grande: Realize Editora, 2018. p. 1-9.

MINAYO, M. C. S. (org.). **Pesquisa social**: teoria, método e criatividade. Petrópolis: Vozes, 2009.

MIRANDA, A. S. M. S. **Resolução de problemas como metodologia de ensino:** uma análise das repercussões de uma formação continuada. 2015. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

MIYASCHITA, W. Y. **Sistema de numeração**: como funcionam e como são estruturados os números. Bauru, 2002.

MORAIS FILHO, D. C. **Manual de redação matemática**: com um dicionário etimológico de palavras usadas na Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

OLIVEIRA, C. A. M. et al. A influência da língua portuguesa para interpretar e compreender situações-problemas de raciocínio lógico na matemática. **Anais VI CONEDU**. Campina

Grande: Realize Editora, 2019. Disponível em: https://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/58552. Acesso em: 28 set. 2022.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em educação matemática**. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 199-220.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema** - Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, SP, v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

PARANÁ (Estado). Secretaria de educação. **Resolução de problemas nas escolas indígenas**: Formações gerais e encaminhamentos. Paraná: Formação e ação, 2016. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/formacao_acao/2semestre2016/fa_dedi_indigena_roteiro.pdf. Acesso em: 25 set. 2022.

PERETTI, L.; COSTA, G. M. T. Sequência didática na matemática. **REI - Revista de educação do Ideau**, v. 8, n. 17, p. 1–14, 2013.

PIRONEL, M.; VALLILO, S. A. M. **O papel da avaliação na metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas**. São Paulo: Livraria da Física, 2017.

PORTO EDITORA. **Zodíaco na infopédia**. Porto: Porto Editora. Disponível em: https://www.infopedia.pt/$zodiaco. Acesso em: 18 nov. 2022.

POZO, J. I. (Org.). A Solução de Problemas - Aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Editora Artmed, 1998.

REDLING, J. P. **A metodologia de Resolução de Problemas**: concepções e práticas pedagógicas de professores de Matemática do Ensino Fundamental. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência) - Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2011.

RODRIGUES, C. **Efdeportes**: A percepção das relações entre o ser humano e o mundo sobre o olhar da experiência, 2008. Disponível em: https://efdeportes.com/efd127/o-ser-humano-e-o-mundo-sobre-o-olhar-da-experiencia.htm. Acesso em: 20 out. 2022

ROMANATTO, M. C. **O livro didático**: alcances e limites, 2008.

SANTOS, I. M. N.; MUNHOZ, A. V.; QUARTIERI, M. T. **Proposta de atividades de trigonometria em triângulos quaisquer para alunos do 2º ano do ensino médio utilizando a engenharia didática**. 2015. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade do Vale do Taquari, Lajeado, 2015.

SANTOS, M. P. **Expectativas neurocognitivas da atenção em uma sequência de ensino para a habilitação do raciocínio axiomático durante a aprendizagem da demonstração da lei dos senos**. 2019. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2019.

SANTOS, V. J. **Matemática IFBA**: Trigonometria em triângulos quaisquer, 2012. Disponível em: https://waldexifba.files.wordpress.com/2012/03/trigonometria-completo.pdf. Acesso em: 23 maio 2023

SCHROEDER, T. L., LESTER JR., F. K. Developing understanding in mathematics via problem solving. In: TRAFTON, P.R.; SHULTE, A.P. (Ed.). **New directions for elementary school mathematics.** Reston: NCTM, 1989 (Year Book).

SEVERIANO A. Ponte Rio Negro ganha nome do jornalista Phelippe Daou, em Manaus. **G1 Amazonas**, Amazonas, 21 fev. 2017. Disponível em: https://g1.globo.com/am/amazonas/noticia/2017/02/ponte-rio-negro-ganha-nome-do-jornalista-phelippe-daou-em-manaus.html. Acesso em: 22 maio 2023.

SILVA, D. N. **Papiro**. Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/historiag/papiro.htm. Acesso em: 18 nov. 2022.

SILVA, J. M.; SANTANA, A. L. R. Formação continuada para professores: Matemática: plano de trabalho: trigonometria na circunferência - 1ªsérie/3ºbimestre/2012. **Canal CECIERJ**, Rio de Janeiro, p. 1-11, 2014. Disponível em: https://canal.cecierj.edu.br/recurso/12319. Acesso em: 10 out. 2022.

SILVA, R. R. R. **Concepções de professores de matemática e as metodologias alternativas para o ensino de 5ª a 8ª séries**. 2010. Monografia (Licenciatura Plena em Matemática) – Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2010.

SILVEIRA, M. R. A. A Dificuldade da matemática no dizer do aluno: ressonâncias de sentido de um discurso. **Educação & amp; Realidade**, [S. l.], v. 36, n. 3, 2011. Disponível em: https://seer.ufrgs.br/index.php/educacaoerealidade/article/view/18480. Acesso em: 28 set. 2022.

SOARES, M. T. C.; PINTO, N. B. Resolução de problemas nas escolas indígenas. **Formação em ação**. Paraná: Portal dia a dia educação, 2013. 1-9. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/modules/mydownloads_01/singlefile.php?cid=46&lid=7048. Acesso em: 28 set. 2022.

SOUSA, A. S.; OLIVEIRA, G. S.; ALVES, L. H. A pesquisa bibliográfica: princípios e fundamentos. **Cadernos da Fucamp**, Monte Carmelo, v. 20, n. 43, p. 64-83, 2021.

SOUZA, A. C. P. **Análise combinatória no ensino médio apoiada na metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas**. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010.

SOUZA, A. T. **Uma análise do tratamento dado à trigonometria em livros didáticos do ensino médio publicados no brasil em diferentes décadas do século XX.** 2015. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Santa Maria, Rio Grande do Sul, 2015.

SOUZA, W. S. **Relações trigonométricas em triângulos quaisquer com o auxílio de triângulos retângulos**. 2016. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Vale do São Francisco, Juazeiro, 2016.

TODOS PELA EDUCAÇÃO (Brasil) (org.). **Anuário Brasileiro da Educação Básica de 2021**. São Paulo: Moderna, 2021. 188 p.

TORGE, W.; MULLER, J. **Geodesy**. 4. ed. Berlin: de Gruyter, 2012.

UBERTI, G. L. **Uma abordagem das aplicações trigonométricas**. 2003. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003.

VIGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**: o desenvolvimento social da mente. 7. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

VILA, A.; CALLEJO, M. L. **Matemática para aprender a pensar**: o papel das crenças na resolução de problemas. Porto Alegre: Artmed, 2006.

VYGOTSKI, L. S. **Teoria e método em Psicologia**. 1. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1996.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**: O desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. 5. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1996.

ZABALA, A. **A prática educativa como ensinar**. Tradução: Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: Artmed, 1998.

INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Bahia

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA BAHIA
Rua Vereador Romeu Agrário Martins, s/n - Bairro Tento - CEP 45400-000 - Valença - BA - www.portal.ifba.edu.br

Joerbert dos Santos Sena

A Resolução de Problemas como abordagem metodológica para o ensino de Matemática: Uma proposta de Sequência Didática sobre Lei dos Senos e Lei dos Cossenos

Monografia apresentada à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia, Campus Valença, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Trabalho de Conclusão de Curso aprovado pela banca examinadora em 13/07/2023.

BANCA EXAMINADORA

____
Profa. Me. Marcelo de Araújo Lino (Orientador)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

____
Prof. Dr. Diogo Soares Dórea da Silva (Coorientador)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

____
Profa. Ms. Eliete da Silva Barros
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

____
Prof. Me. Roque da Silva Lyrio
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

Em 06 de agosto de 2023.

---

sei! assinatura eletrônica — Documento assinado eletronicamente por **DIOGO SOARES DÓREA DA SILVA**, **Professor Efetivo**, em 06/08/2023, às 20:15, conforme decreto nº 8.539/2015.

---

sei! assinatura eletrônica — Documento assinado eletronicamente por **MARCELO DE ARAUJO LINO**, **Professor Efetivo**, em 07/08/2023, às 14:21, conforme decreto nº 8.539/2015.

Documento assinado eletronicamente por **ROQUE DA SILVA LYRIO**, **Professor Efetivo**, em 07/08/2023, às 16:35, conforme decreto nº 8.539/2015.

Documento assinado eletronicamente por **ELIETE DA SILVA BARROS**, **Professor Efetivo**, em 07/08/2023, às 20:04, conforme decreto nº 8.539/2015.

A autenticidade do documento pode ser conferida no site http://sei.ifba.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&acao_origem=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0 informando o código verificador **3046495** e o código CRC **BAED66EE**.

23280.001374/2022-62 3046495v4