



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA BAHIA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Um estudo dos números complexos e quaterniônicos
utilizando o *software GeoGebra*

JOÃO MATHEUS SANTOS ASSIS

VALENÇA
Dezembro de 2018

JOÃO MATHEUS SANTOS ASSIS

Um estudo dos números complexos e quaterniônicos
utilizando o *software GeoGebra*

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia - *Campus Valença* como parte dos requisitos para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Wilson José Ohl

Coorientadora: Profa. Ma. Elaine Santos Dias

VALENÇA

Dezembro de 2018

A848 Assis, João Matheus Santos

Um estudo dos números complexos e quaterniônicos
utilizando o software GeoGebra/ João Matheus Santos
Assis. - Valença-BA: IFBA, 2018
61f. :il.

Orientadora: Prof. Dr. Wilson José Ohl
Coorientadora: Profa. Ma. Elaine Santos Dias

Trabalho de conclusão de curso (Graduação)-
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia
da Bahia – Campus Valença, 2018.

1. Números complexos 2. Quatérnions 3. GeoGebra
4. Matemática. I. Ohl, Wilson José II. Dias, Elaine
Santos

CDD 23. ed. 510.76

Ficha Catalográfica elaborada pela bibliotecária do IFBA campus Valença/ Cátia Almeida de Andrade CRB1403-5



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA BAHIA

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Um estudo dos números complexos e quaterniônicos
utilizando o *software GeoGebra*

JOÃO MATHEUS SANTOS ASSIS

Monografia apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Trabalho aprovado. Valença, 06 de dezembro de 2018.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Wilson José Ohi (Orientador)

Profa. Ma. Elaine Santos Dias (Coorientadora)

Prof. Me. Diogo Soares Dórea da Silva

Profa. Dr. Jamille Vilas Bôas

Agradecimentos

Pater noster, qui es in caelis, obrigado por sempre abençoar minha vida. A ti sou grato por todas as vitórias alcançadas.

Minha mãe, Dalmares de Jesus Santos Assis, pelo amor incondicional e exemplo de pessoa batalhadora e professora dedicada.

Meu pai, José Carlos Luz de Assis.

Meu irmão, Mathias Santos Assis, que por ser mais velho me proporcionou o acesso a conhecimentos mais avançados, sobretudo em matemática.

A todos os docentes que contribuíram na minha formação acadêmica. Em especial:

- Ao professor Ademilton Santos, meu professor de matemática do Ensino Fundamental II, que me despertou o interesse pela matemática;
- Ao professor Wilson José Ohl (orientador), pelo empenho, credibilidade e confiança, incentivando-me a dar passos maiores. Obrigado por tudo.
- À professora Elaine Santos Dias (coorientadora), pelas dicas, conselhos e, sobretudo pelo apoio dado ao longo do curso.
- Aos professores Diogo Soares Dórea da Silva e Jamille Vilas Bôas, por terem aceitado o convite para compor a banca e realizar valiosas contribuições.

A todos os meus ex-alunos. Vocês contribuíram na minha formação docente.

A todos os amigos que fiz ao longo da minha caminhada acadêmica, no curso de graduação, especialmente Alexandre Visco, Caiqui Campos, Érica Fonseca, Rosane Pereira e Maria Antônia Nascimento.

*“Não é o conhecimento, mas o ato de aprender, não a posse mas o ato de chegar lá,
que concede a maior satisfação.”*

Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855).

Resumo

ASSIS, J. M. S. *Um estudo dos números complexos e quaterniônicos utilizando o software GeoGebra*. 2018. 61f. Monografia (Licenciatura em matemática). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia. Valença.

O presente trabalho explora os conjuntos dos números complexos e quaterniônicos utilizando uma abordagem histórica, algébrica e geométrica. Para realizar o estudo geométrico é utilizado o *software GeoGebra*, que é uma tecnologia com grandes potencialidades no ensino de matemática. Com o *GeoGebra*, o estudo de certas propriedades e operações foi facilitado, permitindo uma análise mais significativa e dinâmica dos conjuntos estudados. Em relação à história, foram abordadas as contribuições de Scipione Del Ferro (quem primeiro deduziu uma fórmula para as cúbicas) a Gibbs e Heaviside (que com seu sistema vetorial rivalizaram com os quatérnions de Hamilton). A metodologia utilizada foi a pesquisa bibliográfica. As principais fontes consultadas foram dissertações do Profmat e livros consagrados de matemática. No banco de dados consultado foram encontradas múltiplas propostas para o ensino dos números complexos. Já sobre os quatérnions, poucas são as dissertações que versam sobre a temática.

Palavras-chave: Números complexos. Quatérnions. *GeoGebra*.

Abstract

ASSIS, J. M. S. *A study of the complex and quaternionic numbers using GeoGebra software*. 2018. 61f. Undergraduate thesis (Licenciatura em matemática). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia. Valença.

The present work explores the complex and quaternionic number sets using a historical, algebraic and geometric approach. GeoGebra software is used to perform the geometric study, which is a technology with great potential in teaching mathematics. With GeoGebra, the study of certain properties and operations was facilitated, allowing a more significant and dynamic analysis of the studied sets. In relation to history, it were approached the contributions from Scipione Del Ferro (who first deduced a formula for the cubic ones) to Gibbs and Heaviside (that with its vectorial system rivaled the quaternions of Hamilton). The methodology used was the bibliographical research. The main sources consulted were Profmat's dissertations and consecrated books on mathematics. In the consulted database were found multiple proposals for the teaching of complex numbers. As for the quaternions, there are few dissertations on the subject.

Keywords: Complex numbers. Quaternions. GeoGebra.

Lista de ilustrações

Figura 1. Logotipo do <i>software GeoGebra</i> .	11
Figura 2. Plataformas computacionais compatíveis com o <i>software</i> .	12
Figura 3. Interface gráfica do <i>software</i> .	12
Figura 4. Imersão dos números reais nos números complexos.	18
Figura 5. Representação de alguns pontos no plano dos complexos.	19
Figura 6. Interpretação vetorial.	19
Figura 7. Representação geométrica da soma de dois números complexos na forma algébrica.	20
Figura 8. Interpretação geométrica do conjugado de um número complexo.	21
Figura 9. Forma polar de um número complexo.	22
Figura 10. Interpretação geométrica da multiplicação de dois números complexos.	23
Figura 11. Rotação de 90° dos números complexos z_1, z_2, z_3 e z_4 em torno da origem.	23
Figura 12. Potências de $z = 1 (\cos 45^\circ + i \sen 45^\circ)$.	26
Figura 13. Potências de $z = 1 (\cos 50^\circ + i \sen 50^\circ)$.	27
Figura 14. Potências de $z = 1,05 (\cos 20^\circ + i \sen 20^\circ)$.	28
Figura 15. Potências de $z = 0,98 (\cos 61^\circ + i \sen 61^\circ)$.	28
Figura 16. Potências de $z = 1 (\cos 50^\circ + i \sen 50^\circ)$ formada com semicírculos.	29
Figura 17. Potências de $z = 0,98 (\cos 33^\circ + i \sen 33^\circ)$.	29
Figura 18. Representação das enésimas raízes do complexo z .	30
Figura 19. Polígono regular formado pelas raízes enésimas de z .	31
Figura 20. Representação gráfica da regra mnemônica de multiplicações de quatérnions.	36
Figura 21. Estruturas algébricas isomorfas.	38
Figura 22. Vetor \vec{p} e eixo de rotação.	39
Figura 23. Rotação do vetor \vec{p} utilizando a álgebra de quatérnions.	39
Figura 24. Esboço da função $x^3 - 3x^2 + x + 5$.	49
Figura 25. Esboço da função $x^3 - 6x - 9$.	50

Sumário

0. Motivação	1
0.1. Dos Números Complexos.....	1
0.2. Dos Quatérnions.....	2
0.3. Do <i>software GeoGebra</i>	2
1. Introdução	4
1.1. Organização e estrutura do trabalho.....	7
2. Tecnologias da Comunicação e Informação	8
2.1. Uso das Tecnologias da Comunicação e Informação (TICs) na educação.	8
2.2. <i>GeoGebra</i>	11
3. Explorando os Números Complexos	13
3.1. Um pouco sobre a história dos Números Complexos.....	13
3.2. Corpo dos Números Complexos.....	17
3.3. Desenvolvimento matemático dos Números Complexos.....	19
3.3.1. Plano de Argand-Gauss.....	19
3.3.2. Forma algébrica.....	20
3.3.3. Forma trigonométrica.....	22
3.3.4. Potenciação e os fractais.....	25
3.3.5. Radiciação e os polígonos regulares.....	30
4. Quatérnions e as rotações em \mathbb{R}^3	32
4.1. E a história continua, mas com novos personagens.....	32
4.2. Desenvolvimento matemático dos quatérnions.....	36
5. Considerações finais	40
5.1. Trabalhos futuros.....	42
Referências	43
Apêndice A: Fórmula de Del Ferro-Tartaglia-Cardano.....	46

Capítulo 0

Motivação

0.1. Dos Números Complexos.

Quando terminei o primeiro ano do curso integrado de Aquicultura do IFBA, *campus* Valença, eu decidi que iria aproveitar minhas férias estudando todo o livro de Bonjorno, Giovanni e Giovanni JR (2002). E assim eu fiz. Passei três meses de pura dedicação ao saber matemático, aprendendo os conteúdos e resolvendo as questões propostas pelo referido livro.

Durante essa jornada pelo conhecimento matemático, tive meu primeiro contato com os números complexos. Obviamente, quando li que existia um conjunto que admitia raízes de números negativos, estranhei e questionei a seriedade do livro. Contudo, ao admitir como verdade a definição, continuei tranquilamente meus estudos. De fato, a parte mais delicada desse conteúdo é aceitar a validade da definição. A parte algébrica é de fácil operação.

Já como aluno do curso de Licenciatura em Matemática do IFBA, *campus* Valença, ao estagiar no Colégio Estadual João Leonardo da Silva, localizado no centro da cidade de Valença, em uma turma de 3º ano vespertina, um dos assuntos que lecionei foi números complexos e este foi um grande desafio pessoal. Mesmo lendo bastantes materiais que abordavam desde o surgimento até o desenvolvimento teórico que conhecemos atualmente, senti-me inseguro para ensinar essa temática.

De fato, não é nada simpático chegar a uma sala de aula, principalmente na condição de estagiário, e dizer algo do tipo: hoje iremos estudar os números complexos, que é um conjunto cujos elementos é a soma de um número real com um número imaginário. Certamente, os alunos, ao ouvirem esses novos vocábulos, irão, em algum momento, duvidar sobre a competência do professor. A fim de não proporcionar aos meus alunos esta apresentação tão formal e sucinta (e por que não aterrorizante?), busquei, na minha prática, contextualizar historicamente sua

importância e legitimidade. Porém, mesmo assim, questiono-me sobre a relevância que este assunto teve para eles e o que eu faria diferente hoje.

Duas colegas de curso, ao estagiarem no mesmo colégio, em paralelo comigo, nas turmas de terceiro ano matutinas, compartilharam das mesmas dificuldades para abordar esse assunto. Assim, ao longo dessa experiência de ensino, socializamos as metodologias, os desafios e as vitórias alcançadas no caminho. Apesar do término do meu estágio, uma grande inquietação permaneceu. Como ensinar números complexos de forma significativa para os alunos do Ensino Médio? Perguntas como essas não podem ser ignoradas, ainda mais que serei um futuro docente comprometido com a educação.

0.2. Dos Quatérnions.

Estudei, pela primeira vez, sobre os quatérnions ao cursar a disciplina de Álgebra II, em que a professora, minha coorientadora neste trabalho, solicitou à turma uma pesquisa sobre esse conjunto. Fiquei fascinado ao saber que os conjuntos numéricos não se limitam aos complexos. Pelo contrário, eles são infinitamente contidos. Assim, aprendi a grande importância que esse conjunto desempenhou para a Álgebra. Contudo, desde então, intrigava-me a sua aplicação nas rotações no espaço tridimensional. Afinal de contas, como realizá-las na prática utilizando a álgebra de quatérnions?

0.3. Do *software GeoGebra*.

Não lembro com exatidão quando conheci este recurso computacional, mas sei que foi durante meu Ensino Integrado. Porém, sempre utilizei o *software* de forma limitada, talvez por falta de interesse ou necessidade, somente o explorando no estudo de funções polinomiais do primeiro e segundo grau.

Foi somente na graduação, no 7º semestre, ao cursar a disciplina Informática Aplicada ao Ensino de Matemática, que descobri que o programa dispõe de recursos

para diversos campos da matemática. Isso me fez enxergar a grande potencialidade do *GeoGebra* no processo de ensino e aprendizagem.

Ao deslumbrar tamanhas vantagens, considero que não posso deixar de explorar as diversas possibilidades de uso no ensino de matemática. Em virtude disso, neste trabalho de conclusão de curso, irei explorar os números complexos e quaterniônicos utilizando o referido *software* a fim de oferecer para os educandos uma nova perspectiva e abordagem sobre a temática.

Capítulo 1

Introdução

“Deus criou os números naturais. O resto é obra dos homens.”

Leopold Kronecker (1823-1891)

De tempos em tempos, a matemática até então desenvolvida mostra-se insuficiente, necessitando ser estendida. Foi assim com o conjunto dos números naturais que, apesar de ter sido um grande desenvolvimento para a humanidade, se tornou limitado diante à evolução das tecnologias e a complexidade das relações comerciais. Com efeito, com o passar do tempo foram “surgindo” outros conjuntos numéricos como os inteiros, racionais, irracionais e reais. Cabe assinalar que não houve uma linearidade no surgimento desses conjuntos.

O conjunto dos números complexos surgiu em uma época em que ainda se questionava os números inteiros. Após um longo processo de aceitação dos complexos, surgiram os quatérnions, uma extensão deste último. Estes dois conjuntos têm grandes aplicabilidades tanto na matemática quanto em outras ciências. Os complexos são vistos geralmente no último ano do Ensino Médio, enquanto os quatérnions são estudados nos cursos superiores de ciências exatas na disciplina de Álgebra. Assim, a ampla maioria dos alunos que não prosseguem seus estudos na matemática acaba por não conhecer com mais profundidade os complexos nem a existência do conjunto dos quatérnions.

Desta forma, esta presente pesquisa visa realizar um estudo dos números complexos e quaterniônicos. Além disso, serão elaboradas ferramentas educacionais construídas no *GeoGebra* para o ensino desses conjuntos, apresentadas durante o texto em forma de figuras.

A metodologia predominante utilizada é a bibliográfica, que segundo Gil (2002, p. 44) “é desenvolvida a partir de material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos.”. A principal vantagem desta metodologia “reside no fato de permitir ao investigador a cobertura de uma gama de fenômenos muito mais

ampla do que aquela que poderia pesquisar diretamente.” (GIL, 2002, p. 45). De fato, a pesquisa bibliográfica oportuniza o pesquisador a expandir seu campo de visão, possibilitando produções acadêmicas mais completas e sólidas.

As principais fontes consultadas foram livros de matemática consagrados e, durante a etapa de levantamento de literatura, o repositório do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat). Nesse repositório, existe uma vasta produção acadêmica sobre o estudo dos números complexos, abrangendo diversas perspectivas. Até outubro de 2018, havia pouco mais de 80 dissertações envolvendo o estudo dos números complexos, o que indica sua importância.

Alguns desses trabalhos defendem propostas de sequências didáticas, outros apresentam um tratamento matricial dos complexos. Também há aqueles que buscam apresentar as aplicações dos complexos nos circuitos elétricos. Algumas dissertações serão brevemente apresentadas, bem como seus principais resultados.

Bernardi (2015) desenvolveu um material manipulável, chamado geoplexo, para auxiliar no processo de ensino e aprendizagem dos números complexos, com ênfase na interpretação geométrica da potenciação e radiação. O autor, além de ensinar o passo-a-passo da construção do material, também sugere no seu texto uma sequência didática utilizando sua ferramenta.

Brum (2015) propõe abordar os números complexos de forma diluída durante os três anos do Ensino Médio regular, respeitando os pré-requisitos pertinentes a cada série. No 1º ano, o trabalho propõe uma introdução contextualizada através da história da matemática; um significado concreto para os complexos através de uma abordagem geométrica e a formalização da temática em questão através da forma algébrica. No 2º ano, é defendido o ensino da forma trigonométrica até a fórmula de De Moivre (pela afinidade existente entre a própria trigonometria e os números complexos). E no 3º ano acontecerá a “culminância” de todo o processo.

Chagas (2013) investigou a opinião de professores de matemática do Ensino Médio a respeito da relevância dos números complexos. Em sua pesquisa, os dados foram coletados através de questionários disponibilizados na internet. Sobre os docentes que responderam à pesquisa: a maioria era especialista e estudaram este conteúdo durante seu Ensino Médio. As aplicações mais conhecidas por eles, para esse

conjunto, eram: na resolução de equações polinomiais e operações com vetores no plano. Segundo a pesquisa, para 48% dos professores, o estudo dos números complexos no Ensino Médio é relevante e 20% consideram indispensáveis. Por outro lado, 29% veem pouca relevância e 3% o consideram irrelevante.

Oliveira, M. (2015) analisou os motivos pelos quais os livros didáticos sofrem tão poucas alterações na maneira de apresentar os conteúdos e realizou uma análise qualitativa destes livros. Por fim, o autor propôs uma maneira alternativa de trabalhar os números complexos, incluindo as equações cúbicas.

Muitas das dissertações analisadas criticam o tratamento excessivamente algébrico dado durante o Ensino Médio, obscurecendo, muitas vezes, o entendimento dos alunos. Há produções que discutem a não inclusão dos complexos no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e o desprestígio dado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) ao afirmar que:

Tradicionalmente, a Matemática do ensino médio trata da ampliação do conjunto numérico, introduzindo os números complexos. Como esse tema isolado da resolução de equações perde seu sentido para os que não continuarão seus estudos na área, ele pode ser tratado na parte flexível do currículo das escolas. (BRASIL, 2007, p.122).

Sobre o ENEM, Campos (2015) estudou a sua Matriz de Referência (documento oficial que lista as habilidades e competências exigidas do candidato) e as provas dos anos 2012 a 2014, tendo dentre outras conclusões que este exame exige mais conteúdos do Ensino Fundamental do que Médio. Os assuntos geralmente vistos no 3º ano do Ensino Médio são pouco cobrados, correndo assim o risco de serem eliminados do currículo escolar.

Já sobre os quatérnions, a literatura pesquisada não é tão vasta quanto os complexos. No repositório do Profmat foram encontradas cinco dissertações que têm enfoque nesse conjunto ((SANTOS, Marcos, 2013), (FREITAS, 2013), (OLIVEIRA, L., 2015), (SANTOS, Marcelo, 2015) e (SANTOS, D., 2016)). Freitas (2013) dissertou sobre equações algébricas, com foco nas quadráticas cujos coeficientes são números quaterniônicos, verificando que o número de raízes pode ser maior que o seu grau, e muitas vezes, pode até ser infinito.

1.1. Organização e estrutura do trabalho.

Além dessa introdução, o presente trabalho está estruturado em quatro capítulos.

No capítulo 2, *Tecnologias da Comunicação e Informação*, é discutido o uso das tecnologias com ênfase nas famosas TICs na educação. O *software GeoGebra* foi escolhido por suas diversas vantagens, que são elencadas em um subtópico.

No capítulo 3, *Explorando os Números Complexos*, é apresentada a história dos números complexos, evidenciando que sua origem partiu do estudo das equações cúbicas através de contribuições de matemáticos italianos. Além disso, é mostrado que o conjunto dos complexos é um corpo. O desenvolvimento matemático desse conjunto é apresentado logo em seguida.

No capítulo 4, *Quatérnions e as rotações em \mathbb{R}^3* , é apresentada a saga de Hamilton até a criação dos quatérnions, também conhecido por números hipercomplexos. É realizada a fundamentação matemática desse novo conjunto. No final do texto, é apresentada a rotação no espaço tridimensional.

No capítulo 5, *Considerações finais*, são sintetizados os principais argumentos do texto e é listado os possíveis trabalhos futuros a serem desenvolvidos pelo autor.

Capítulo 2

Tecnologias da Comunicação e Informação

“Os avanços científicos do mundo atual mostram que a visão puramente mecanicista do Universo é insustentável. O ser humano torna-se não mais uma engrenagem mecanicamente controlada dentro de uma máquina gigantesca, mas sim a manifestação de um impulso livre e criativo, ligado de maneira intrínseca ao Universo como um todo.”
(D'AMBRÓSIO, 1997, p. 52)

2.1. Uso das Tecnologias da Comunicação e Informação (TICs) na educação.

É comum expressões do tipo: cada vez a tecnologia torna-se indispensável na vida das pessoas. Frases como essas evidenciam sua importância, porém insinuam que a tecnologia é algo recente. Como define Kenski (2012, p. 22-23):

[...] a expressão “tecnologia” diz respeito a muitas outras coisas além de máquinas. O conceito de tecnologias engloba a totalidade de coisas que a engenhosidade do cérebro humano conseguiu criar em todas as épocas, suas formas de uso, suas aplicações.

Deveras, a tecnologia é imprescindível em diversas atividades da vida humana, sendo uma ferramenta vital para a nossa sobrevivência no planeta desde os tempos mais remotos da civilização. Quando uma pessoa pronuncia uma frase de efeito como apresentada anteriormente, certamente ela está se referindo às TICs, que, de fato, é um conceito relativamente novo e uma ferramenta que simboliza muito bem a era moderna. Cabe agora conceituar TICs.

As TICs resultam da fusão das tecnologias de informação, antes referenciadas como informática, e as tecnologias de comunicação, denominadas anteriormente como telecomunicações e mídia eletrônica. Elas envolvem a aquisição, o armazenamento, o processamento e a distribuição da informação por meios eletrônicos

e digitais, como rádio, televisão, telefone e computadores. (FIORENTINI; LORENZATO, 2012, p. 45).

Este tipo de tecnologia, quando inserido no ambiente escolar, pode auxiliar o docente a melhorar sua prática pedagógica, trazendo maior dinamismo e interatividade para suas aulas. Assim, as TICs, como outras metodologias de ensino, quando utilizadas adequadamente, proporcionam o protagonismo do aluno na construção do seu próprio conhecimento à medida que o professor assume o papel de mediador do processo de ensino-aprendizagem. Os PCNEM apresentam uma seção específica sobre o uso das TICs, afirmando que:

Não se pode negar o impacto provocado pela tecnologia de informação e comunicação na configuração da sociedade atual. Por um lado, tem-se a inserção dessa tecnologia no dia-a-dia da sociedade, a exigir indivíduos com capacitação para bem usá-la; por outro lado, tem-se nessa mesma tecnologia um recurso que pode subsidiar o processo de aprendizagem da Matemática. É importante contemplar uma formação escolar nesses dois sentidos, ou seja, a Matemática como ferramenta para entender a tecnologia, e a tecnologia como ferramenta para entender a Matemática. (BRASIL, 2006, p.87).

No entanto, a adoção de computadores, por exemplo, nas escolas, ainda é um grande entrave, pois muitas unidades de ensino não contam com uma infraestrutura adequada e com profissionais capacitados na área de informática para dar o suporte necessário ao docente. Em algumas situações, mesmo a escola possuindo um laboratório de informática equipado e com todo o apoio requerido, o docente é resistente a sua utilização, optando pelos recursos tradicionais, isto é, lousa, piloto, apagador e livro didático.

Alguns professores procuram caminhar numa *zona de conforto* onde quase tudo é conhecido, previsível e controlável. Conforto aqui está sendo utilizado no sentido de pouco movimento. Mesmo insatisfeitos, e em geral os professores se sentem assim, eles não se movimentam em direção a um território desconhecido. Muitos reconhecem que a forma como estão atuando não favorece a aprendizagem dos alunos e possuem um discurso que indica que gostariam que fosse diferente. Porém, no nível de sua prática, não conseguem se movimentar para mudar aquilo que não os agrada. (BORBA, 2015, p. 56).

Assim, ainda com base em Borba (2015), o professor deve estar disposto a assumir riscos para provocar mudanças em sua prática. Contudo, cabe ponderar que, ao utilizar um recurso diferente, as novas variáveis que este recurso traz deverão ser

analisadas cuidadosamente pelo docente, para que o mesmo tenha domínio e segurança em sala de aula. Estas variáveis são tão múltiplas quanto complexas.

No ensino de matemática, as TICs mais famosas são as calculadoras e computadores pessoais. Quando se deseja trabalhar com as funções elementares, os *softwares* que esboçam os gráficos são bastante requisitados. Já quando o assunto é tratamento da informação, as planilhas eletrônicas são as mais adequadas, por gerarem gráficos rapidamente e realizarem cálculos laboriosos, sobretudo ao se lidar com uma grande quantidade de dados. Ao estudar conjuntos numéricos, as calculadoras podem ser úteis no estudo do comportamento da parte decimal de uma fração, por exemplo, indicando periodicidade ou não. Tais ferramentas apresentam vantagens e limitações, que devem ser analisadas e gerenciadas para potencializar o ensino.

Borba (2015) apresenta uma situação em que uma professora, durante sua aula, ao utilizar de um determinado *software* para ensinar funções trigonométricas, ao inserir a função tangente, o programa esboçou o gráfico com as assíntotas. A mesma, porém, não sabia o que eram assíntotas nem por que o recurso computacional plotou tais retas. Esta é uma das surpresas que um professor pode se deparar ao utilizar um recurso em sala de aula, isto é, a configuração do *software*, o que gera insegurança ao docente e desconfiança aos discentes.

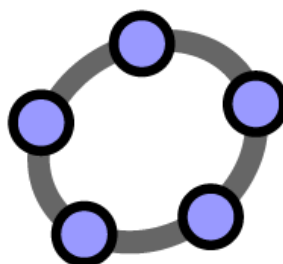
Este é um dos motivos que afastam o docente da experimentação. O desconhecido é muitas vezes desafiante e o professor, antes visto como uma fonte de verdade, passa, agora com o uso do computador, a ser questionado, pois “a imagem fornecida pelo computador tem um poder muito grande de convencimento. Para refutá-la é preciso uma discussão detalhada” (BORBA, 2015, p. 59).

Ademais, a inserção do computador ou outras TICs na escola pode mascarar um ensino tradicional. Se o recurso utilizado não desafia o aluno a pensar, questionar e argumentar, ele é apenas um recurso expositivo. Como corrobora Roque e Giraldo (2013), o uso da tecnologia a serviço da educação está associado a uma concepção ampla e integradora em que o aluno deve estar inserido na situação-problema, interagindo dessa forma como participante e não como simples observador. Cabe então ao docente conduzir um debate crítico acerca dos resultados obtidos pelas ferramentas, a fim de formar cidadãos críticos e emancipados.

2.2. GeoGebra.

O *software* educacional *GeoGebra* (junção das palavras Geometria e Álgebra) foi concebido pelo austríaco Markus Hohenwarter em sua dissertação de mestrado, pela Universidade de Salzburg, no ano de 2001. Desde então, a rede de colaboradores em diversos países vem crescendo consideravelmente. O *GeoGebra* já ganhou diversos prêmios na Europa e nos Estados Unidos.

Figura 1. Logotipo do *software GeoGebra*.



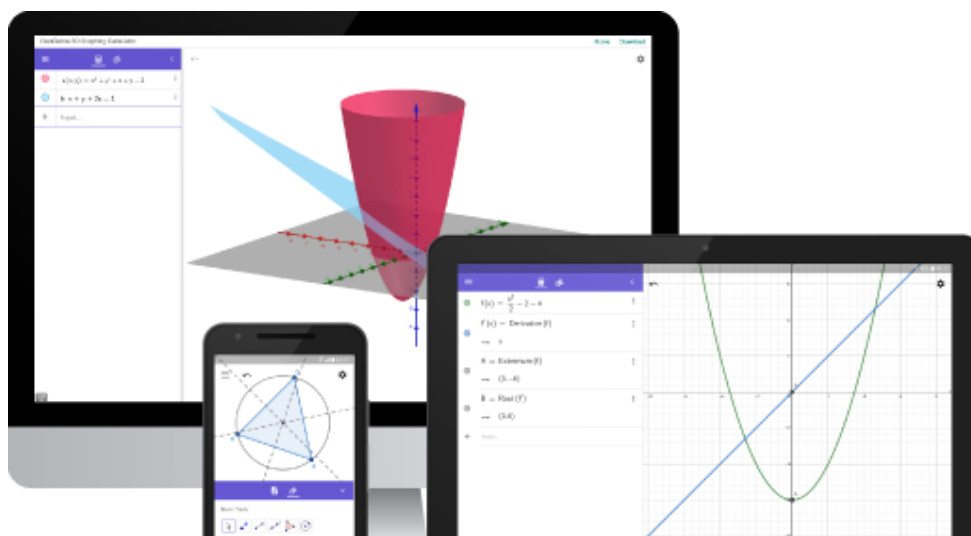
Fonte: GEOGEBRA, 2018.

O *GeoGebra* integra em um único sistema ferramentas de Geometria, Álgebra e Cálculo. É um *software* de geometria dinâmica, que proporciona ao usuário a manipulação interativa de diversos objetos matemáticos de forma lúdica.

O termo geometria dinâmica foi inicialmente usado por Nick Jakiw e Steve Rasmussen da Key Curriculum Press, Inc. com o objetivo de diferenciar este tipo de *software* dos demais softwares geométricos. Comumente ele é utilizado para designar programas interativos que permitem a criação e manipulação de figuras geométricas a partir de suas propriedades, não devendo ser visto como referência a uma nova geometria. (ALVES; SOARES, 2003, p. 4).

Este recurso computacional tem diversas vantagens que justificam sua grande popularidade. Foi desenvolvido na linguagem de programação Java, por isso é multiplataforma, ou seja, pode ser usado em diversos sistemas operacionais. O *software* é livre, isto é, pode ser executado, copiado, modificado e redistribuído pelos usuários gratuitamente. Está disponível em diversos idiomas, inclusive o português.

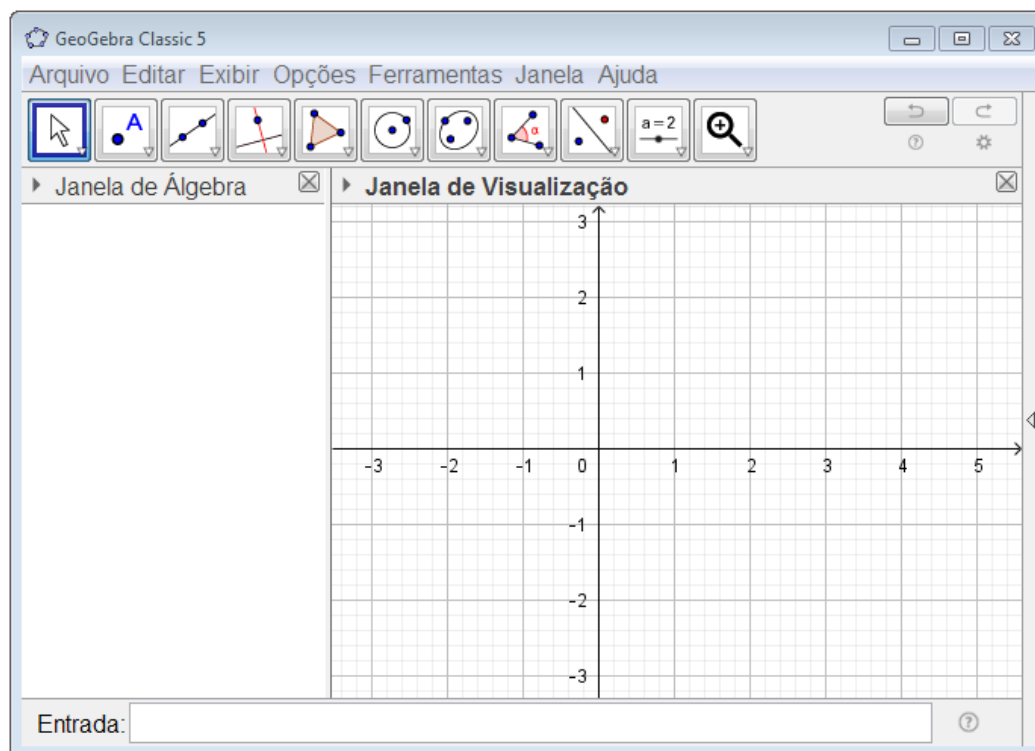
Figura 2. Plataformas computacionais compatíveis com o software.



Fonte: GEOGEBRA, 2018.

O programa pode ser baixado no endereço virtual: <https://www.geogebra.org/>. O site possui uma comunidade ativa, que colabora proativamente para o desenvolvimento da ferramenta. Conforme pode ser visualizado na figura 3, o programa dispõe, em sua tela inicial, da Janela de Álgebra, Janela de Visualização (\mathbb{R}^2) e o campo de entrada. Para acessar outras janelas, basta acessar o Exibir na barra de menu.

Figura 3. Interface gráfica do software.



Fonte: Print screen do software GeoGebra.

Capítulo 3

Explorando os Números Complexos

“O Espírito Divino expressou-se sublimemente nesta maravilha da análise, neste portento do mundo das ideias, este anfíbio entre o ser e o não ser, que chamamos de raiz imaginária da unidade negativa.”

Gottfried Leibniz (1646-1716)

3.1. Um pouco sobre a história dos Números Complexos.

Historicamente, os matemáticos ao se depararem com equações do segundo grau com discriminante negativo simplesmente afirmavam, sem grandes preocupações, que a referida equação não admitia solução. Isso era perfeitamente compreensível, visto que raízes quadradas de números negativos não tinham nenhuma interpretação geométrica. De fato, a matemática estava fortemente ligada, por influência dos gregos, à geometria.

Essa história começa a mudar graças às contribuições de matemáticos italianos, a partir do século XVI. Eles assumiram um papel de grande protagonismo no que diz respeito ao estudo das equações algébricas. Vale pontuar que, entre o século XV e XVI, a Europa foi marcada pelo Renascimento, movimento cultural que teve seu berço na Itália. Dentre as características desse movimento, destaca-se a valorização da cultura greco-romana e da razão.

O fascinante enredo dos números complexos, bem documentado em diversos livros e artigos, será apresentado sucintamente a fim de evidenciar que o desenvolvimento do conhecimento é fruto de um processo demorado, de ação e interação de sujeitos, sendo constantemente questionados e/ou validados. As obras consultadas foram (EVES, 2011), (BOYER; MERZBACH, 2012) e (Lima, 2012).

Scipione Del Ferro (1465-1526), professor de Matemática em Bolonha, encontrou um método para resolver equações cúbicas do tipo $x^3 + px + q = 0$, entretanto não o publicou. Contudo, antes de falecer, o confidenciou a seu aluno Antonio Maria Fior.

Em notação atual, a enigmática fórmula, para determinar uma das raízes de uma equação cúbica, pode ser escrita como segue:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Nesta época, era comum duelo entre matemáticos, pois, além de expor seus conhecimentos, esse era um meio de ganhar dinheiro. Desta forma, Fior, em busca de fama, decidiu desafiar Niccolo Fontana (1500-1557), também conhecido como Tartaglia (Gago), para resolver equações do terceiro grau.

Tartaglia era uma pessoa de origem bastante humilde, no entanto, habilidoso. Ele não só aceitou o desafio, como acabou vencendo de forma triunfal, acertando todas as 30 questões levantadas por Fior, enquanto este não obteve êxito em nenhum problema lançado por seu adversário. Tal feito deveu-se ao motivo de Tartaglia, poucos dias antes da disputa, além de deduzir o tipo particular da cúbica adquirida por Fior, também inferir um método resolutivo para equações da forma $x^3 + px^2 + q = 0$. Para compreender melhor o contexto histórico:

Hoje, pensamos em equações cúbicas como sendo essencialmente todas de um mesmo tipo e como podendo ser tratadas por um único método unificado de solução. Na época, porém, quando coeficientes negativos praticamente não eram usados, havia tantos tipos de cúbicas quantas são as possibilidades de coeficientes positivos e negativos. (BOYER; MERZBACH, 2012, p. 200).

De acordo com Lima (2012), o fato de Tartaglia desvendar a fórmula não diminui em nada o protagonismo de Del Ferro, pois o primeiro desconfiava pelas questões que lhe foram endereçadas que deveria existir uma fórmula, enquanto o segundo não tinha esta certeza. É válido pontuar que muitos matemáticos na época eram incrédulos a respeito da ideia de haver uma fórmula para as cúbicas.

Girolamo Cardano (1501-1576), personalidade de caráter controverso, ao saber do episódio, pediu, em súplica, a Tartaglia que revelasse a fórmula resolutiva da equação do 3º grau, objetivando publicar no livro que ele estava escrevendo. Após muito relutar, Tartaglia revelou a fórmula a Cardano, exigindo que ele a mantivesse em segredo, pois ele mesmo queria publicar a sua descoberta. É importante destacar que:

A resolução de equações cúbicas e quárticas não foi em nenhum sentido motivada por considerações práticas, nem tinham valor para os engenheiros ou praticantes de matemática. Soluções aproximadas de algumas equações cúbicas já eram conhecidas na antiguidade, e Al-Kashi, um século antes de Cardano, podia resolver com qualquer grau de aproximação qualquer equação cúbica resultante de um problema prático. A fórmula de Tartaglia-Cardano é de grande importância lógica, mas não é nem de longe tão útil para as aplicações quanto os métodos de aproximações sucessivas (BOYER; MERZBACH, 2012, p. 203).

Cardano quebrou sua promessa, publicando o algoritmo em 1545 no livro intitulado: *Artis Magnae Sive de Regulis Algebraicis*, amplamente conhecido por *Ars Magna* (A Grande Arte). Cabe ressaltar que ele deu o devido crédito a Tartaglia. É importante refletir que, apesar do ato desonesto, Cardano ao compartilhar a fórmula contribuiu decisivamente para o desenvolvimento do estudo dos números complexos. Conforme corrobora Boyer e Merzbach (2012, p. 203): “a mais importante consequência das descobertas publicadas na *Ars Magna* foi o enorme impulso que deram à pesquisa em álgebra em várias direções”.

A equação $x^3 - 15x = 4$ foi um problema que intrigou profundamente Cardano. Ao utilizar a fórmula, ele obteve: $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$, como uma das soluções. Ele sabia que 4 era raiz dessa equação cúbica, porém não conseguiu explicar o discriminante negativo, nem como x seria igual a 4. Esse fato o incomodou a ponto de chamar de sofisma, isto é, um argumento que parece verdadeiro, mas na realidade não é.

Cardano operou com números negativos em outras oportunidades, como no problema que pode ser enunciado por: divida um segmento com comprimento de 10 unidades em duas partes cujo produto seja 40. Esse problema pode ser escrito como $x^2 + 40 = 10x$. A solução é dada por $x_1 = 5 + \sqrt{-15}$ e $x_2 = 5 - \sqrt{-15}$. Mesmo sabendo que $\sqrt{-15}$ nada significa em \mathbb{R} , é possível perceber, com facilidade, que, de fato: $x_1 + x_2 = 10$ e $x_1 \cdot x_2 = 40$.

Rafael Bombelli (1523-1573), engenheiro hidráulico e grande admirador de *Ars Magna*, considerava a grande obra de Cardano de difícil compreensão. Então, decidiu escrever o livro *L'algebra, parte maggiore dell'aritmetica* (1572). Nesse livro Bombelli enfrentou o caso da equação $x^3 - 15x = 4$, mostrando, ao fazer algumas manipulações algébricas, que: $(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + \sqrt{-121}$. Assim, $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} =$

$\sqrt[3]{(2 + \sqrt{-1})^3} = 2 + \sqrt{-1}$. De modo análogo, $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}$. Portanto, $x = (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4$.

Uma das maiores contribuições de Bombelli, como já implícito acima, foi conceber, em notação atual, a representação $a + \sqrt{-b}$ e $a - \sqrt{-b}$ para os números complexos. Todavia, no lado prático:

Na época, a observação não ajudou no trabalho real de resolver equações cúbicas, pois Bombelli precisava saber antecipadamente o valor de uma das raízes. Neste caso, a equação já está resolvida, e não há necessidade de fórmula; sem tal conhecimento prévio, a abordagem de Bombelli falha. (BOYER; MERZBACH, 2012, p. 204).

René Descartes (França, 1596-1650), em 1637, na obra *La Géométrie*, foi quem introduziu os termos parte real e parte imaginária. A raiz quadrada de -1 só passou a ser representada pela letra *i* a partir de 1777, pelo suíço Leonhard Euler (1707-1783) e a expressão números complexos foi usada pela primeira vez por Carl Friedrich Gauss (Alemanha, 1777-1855) em 1831.

Os números complexos foram por muito tempo alvo de muita desconfiança. O matemático francês Albert Girard (1595-1632), por exemplo, teceu o seguinte comentário sobre o tema: “Pode-se perguntar: para que servem estas soluções impossíveis. Eu respondo: para três coisas – para a validade das regras gerais, devido à sua utilidade e por não haver outras soluções.”.

A legitimação dos números complexos veio somente com as contribuições de Caspar Wessel (Noruega, 1745-1818), Jean-Robert Argand (Suíça, 1786-1822) e Gauss. Os trabalhos desses matemáticos, realizados independentemente, levaram à interpretação geométrica dos complexos, afastando o grande desconforto em operar com esses números até então misteriosos. Atualmente, o plano utilizado para representar os números complexos é conhecido como plano de Argand-Gauss.

3.2. Corpo dos Números Complexos.

Esta seção está fundamentada em lezzi (2013).

O conjunto dos números complexos, denotado por \mathbb{C} , é definido por:

$$\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1\}$$

O número $i = \sqrt{-1}$ é chamado unidade imaginária.

Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$ dois elementos do conjunto dos números complexos.

- Igualdade: $z = w$ se, e somente se, $a = c$ e $b = d$;
- Adição: $z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$;
- Multiplicação: $zw = (a + bi) * (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

Com relação à adição, são válidas:

i. Associatividade.

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}.$$

ii. Comutatividade.

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

iii. Existência do elemento neutro.

$$\exists e_a \in \mathbb{C} \text{ tal que } z + e_a = z, \forall z \in \mathbb{C}. \text{ De fato, } e_a = 0 + 0i.$$

iv. Existência do inverso.

$$\forall z \in \mathbb{C}, \exists z' \in \mathbb{C} \text{ tal que } z + z' = e_a. \text{ Ou seja, } z' = -a - bi.$$

Com relação à multiplicação, são satisfeitas:

i. Associatividade.

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3), \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}.$$

ii. Comutatividade.

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

iii. Existência do elemento neutro.

$$\exists e_m \in \mathbb{C} \text{ tal que } z \cdot e_m = z, \forall z \in \mathbb{C}. \text{ Com efeito, } z = 1 + 0i.$$

iv. Existência do inverso.

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \exists z'' \in \mathbb{C} \text{ tal que } z \cdot z'' = e_m. \text{ Isto é, } z'' = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i.$$

Por fim, vale a propriedade que relaciona as operações de adição e multiplicação:

i. Distributividade.

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3, \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}.$$

Pelo fato do conjunto \mathbb{C} ser uma estrutura algébrica que goza das propriedades acima, ele é um corpo.

3.2.1. Reais: Um subconjunto dos Complexos

A função $f: \mathbb{R} \rightarrow R' = \{a + bi \mid a \in \mathbb{R} \text{ e } b = 0\}$ definida por $f(a) = (a, 0)$ é:

i. Bijetiva;

Prova: f é sobrejetora, pois $\forall (a, 0) \in R'$ é o correspondente, conforme f , de $x \in \mathbb{R}$. f é injetora, de fato, para todos $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, com $a_1 \neq a_2$, $f(a_1) \neq f(a_2)$, de acordo com a definição de igualdade.

ii. $f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2), \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}$;

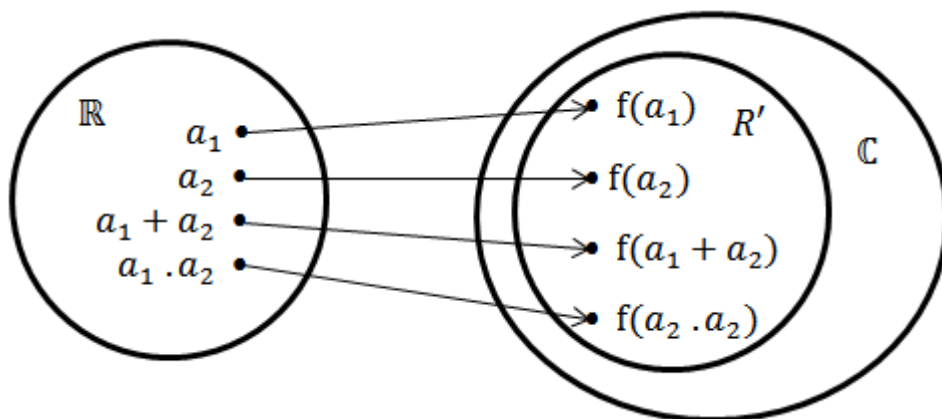
$$\textit{Prova: } f(a_1 + a_2) = (a_1 + a_2, 0) = (a_1, 0) + (a_2, 0) = f(a_1) + f(a_2).$$

iii. $f(a_1 \cdot a_2) = f(a_1) \cdot f(a_2), \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

$$\textit{Prova: } f(a_1 \cdot a_2) = (a_1 \cdot a_2, 0) = (a_1, 0) \cdot (a_2, 0) = f(a_1) \cdot f(a_2).$$

Devido ao fato de i, ii e iii, \mathbb{R} e R' são isomorfos. Outra conclusão, decorrente, é que o conjunto dos números reais é um subconjunto do corpo dos números complexos, em notação simbólica, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Figura 4. Imersão dos números reais nos números complexos.



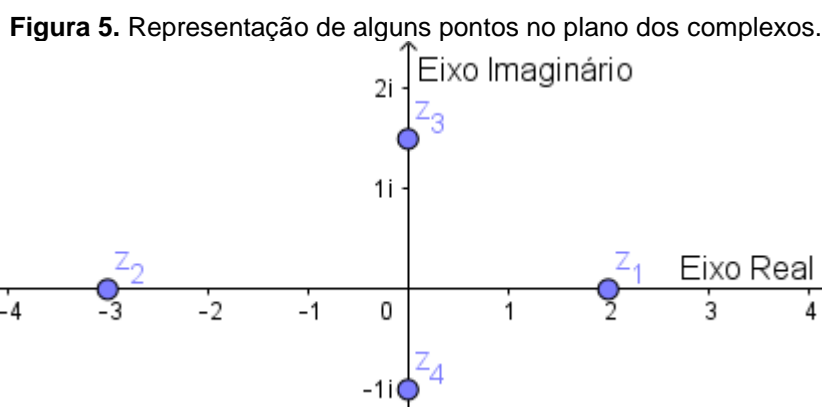
Fonte: O autor (2018).

3.3. Desenvolvimento matemático dos Números Complexos

Nesta seção é discutido o desenvolvimento matemático do conteúdo, sob a ótica algébrica e geométrica. O texto está alicerçado nas referências (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005), (IEZZI, 2013) e (LIMA *et al.*, 2006).

3.3.1. Plano de Argand-Gauss.

Observe o plano abaixo, bem como suas peculiaridades.

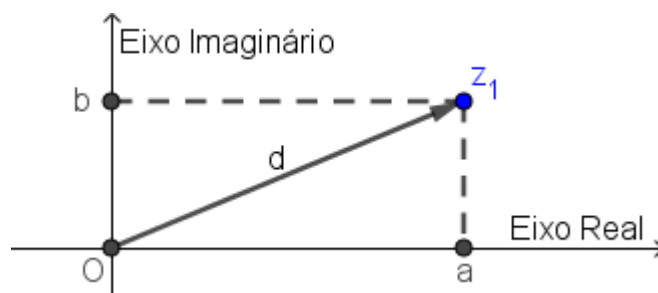


Fonte: O autor (2018).

Os números representados no eixo das abscissas são da forma $a + 0i$, ou seja, são números reais (z_1 e z_2). Desta forma, o eixo Ox é chamado de eixo real. Os complexos apresentados no eixo das ordenadas são da forma $0 + bi = bi$ (z_3 e z_4). Esse eixo é chamado imaginário.

Os números complexos admitem também a interpretação vetorial. Considerando $z_1 \in \mathbb{C}$, tem-se o vetor $\overrightarrow{OZ_1}$, de origem $(0,0)$ e extremidade z_1 , conforme a figura 6. Nesta representação a e b não ambos não nulos.

Figura 6. Interpretação vetorial de um número complexo.



Fonte: O autor (2018).

Portanto, todo número complexo pode ser representado neste plano.

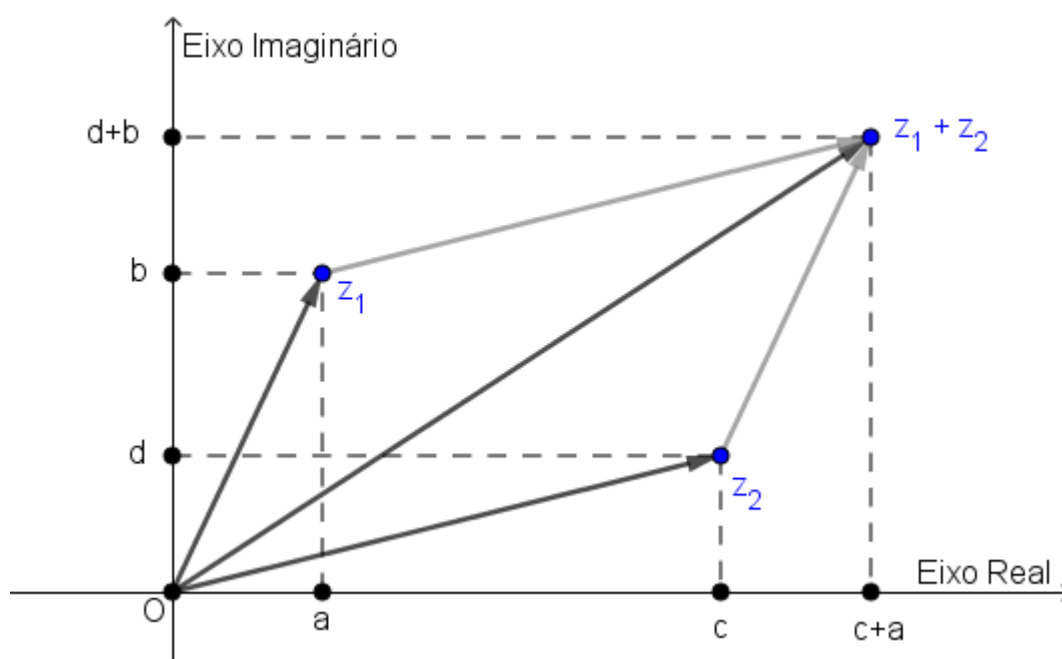
3.3.2. Forma algébrica.

Um número complexo qualquer está na forma algébrica quando é escrito na forma $a + bi$ com a e b reais. Seja $z = a + bi$. O número a é chamado de parte real de z , indicado por $\text{Re}(z) = a$. O número b é denotado parte imaginária, representado por $\text{Im}(z) = b$. Assim, $z = \text{Re}(z) + i.\text{Im}(z)$.

Vale destacar que se a parte imaginária for nula, o complexo é dito real ($z = a$). Se a parte real for nula e a imaginária não, o complexo é chamado imaginário puro ($z = bi$).

A interpretação geométrica da adição de dois números complexos é representada por um vetor cujas componentes são as somas das componentes dos vetores dados. Esse fato é conhecido como a regra do paralelogramo.

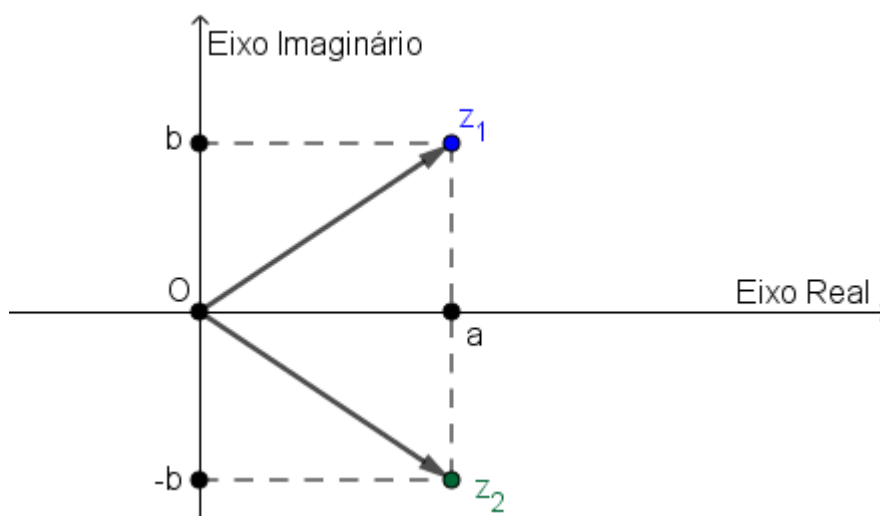
Figura 7. Representação geométrica da soma de dois números complexos na forma algébrica.



Fonte: O autor (2018).

O complexo conjugado de $z = a + bi$, denotado por \bar{z} , é definido como sendo $\bar{z} = \text{Re}(z) - i.\text{Im}(z)$, isto é, $\bar{z} = a - bi$. Considere a figura seguinte, z_2 é o conjugado de z_1 . É notório ainda que, geometricamente, z_2 é simétrico a z_1 em relação ao eixo real.

Figura 8. Interpretação geométrica do conjugado de um número complexo.



Fonte: O autor (2018).

Uma das aplicações do conjugado é no algoritmo da divisão de dois números complexos. Para dividir números complexos, basta multiplicar o divisor e o dividendo pelo conjugado do divisor. A forma genérica dessa operação é descrita abaixo:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}\right) + \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)i.$$

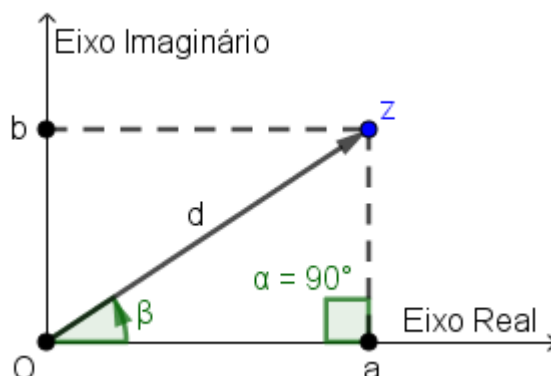
Em relação ao conjugado, considerando p e w complexos, demonstra-se facilmente que:

- i. $p + \bar{p} = 2 \cdot \text{Re}(p)$;
- ii. $p - \bar{p} = 2 \cdot \text{Im}(p) \cdot i$;
- iii. O conjugado da soma é a soma dos conjugados: $\overline{p + w} = \bar{p} + \bar{w}$;
- iv. O conjugado da diferença é a diferença dos conjugados: $\overline{p - w} = \bar{p} - \bar{w}$;
- v. O conjugado do produto é o produto dos conjugados: $\overline{p \cdot w} = \bar{p} \cdot \bar{w}$;
- vi. O conjugado de um quociente é o quociente entre os conjugados: $\overline{\left(\frac{p}{w}\right)} = \frac{\bar{p}}{\bar{w}}, w \neq 0$;
- vii. Se p é real, $p = \bar{p}$;
- viii. O conjugado do conjugado de um número complexo é o próprio número complexo: $\overline{\bar{z}} = z$;
- ix. Se n é um inteiro positivo, $\overline{(p)^n} = (\bar{p})^n$.

3.3.3. Forma trigonométrica.

Considere um número complexo $z = a + bi$, não nulo, em sua forma vetorial.

Figura 9. Forma polar de um número complexo.



Fonte: O autor (2018).

Pelo teorema de Pitágoras, $d^2 = a^2 + b^2$. O módulo ou valor absoluto de z é determinado pelo número não negativo $d = |z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Geometricamente, $|z|$ é a distância entre os pontos (a, b) e $(0, 0)$.

Um argumento de um complexo z não nulo é qualquer dos ângulos θ que o vetor \overrightarrow{OZ} forma com o eixo real positivo. Todos os ângulos congruentes a θ serão argumentos de z , ou seja, $\theta = \theta + 2k\pi$, em que k é um número inteiro. O argumento que pertence ao intervalo $[0, 2\pi[$ é chamado de argumento principal e é representado por $\theta = \arg z$. Na figura 9, $\beta = \theta = \arg z$.

Analisando o plano dos complexos, nota-se que:

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{b}{d} \quad \therefore \quad b = d \cdot \operatorname{sen} \beta \quad (\text{I})$$

$$\operatorname{cos} \beta = \frac{a}{d} \quad \therefore \quad a = d \cdot \operatorname{cos} \beta \quad (\text{II}).$$

Substituindo (I) e (II) na forma algébrica do número complexo, tem-se:

$$z = d \cdot \operatorname{cos} \beta + d \cdot \operatorname{sen} \beta \cdot i \quad , \text{ ou ainda, } \quad z = d(\operatorname{cos} \beta + i \cdot \operatorname{sen} \beta).$$

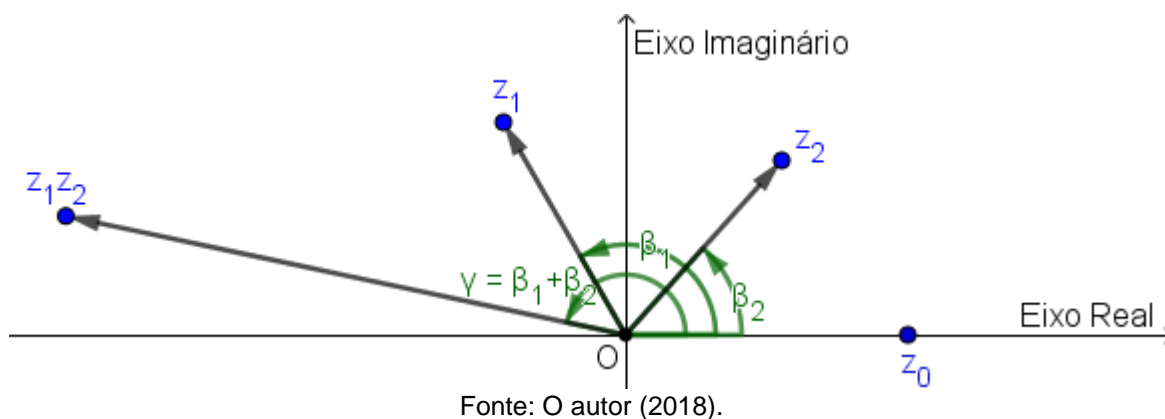
Essa nova representação do complexo z é chamada forma trigonométrica ou polar.

Sejam $z_1 = d_1 (\operatorname{cos} \beta_1 + i \operatorname{sen} \beta_1)$ e $z_2 = d_2 (\operatorname{cos} \beta_2 + i \operatorname{sen} \beta_2)$ dois números complexos na forma polar.

➤ O produto $z_1 \cdot z_2$ é dado por:

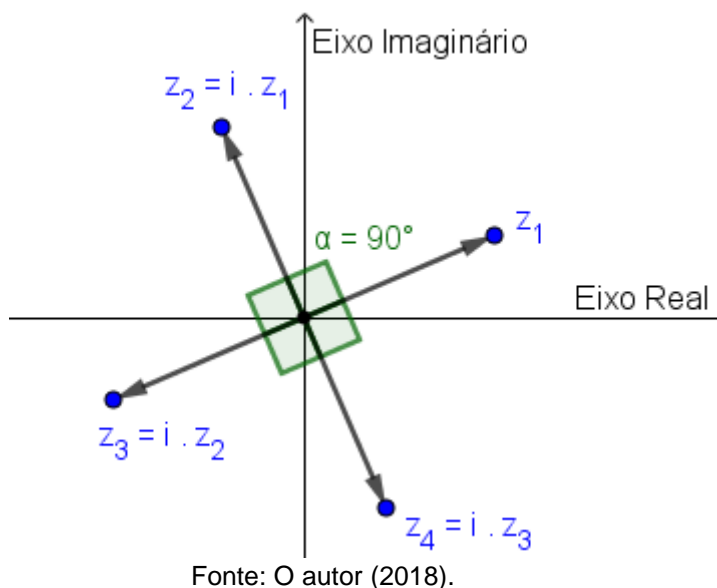
$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= d_1 (\cos \beta_1 + i \operatorname{sen} \beta_1) \cdot d_2 (\cos \beta_2 + i \operatorname{sen} \beta_2) \\ &= d_1 d_2 (\cos \beta_1 \cos \beta_2 + i \cos \beta_1 \operatorname{sen} \beta_2 + i \operatorname{sen} \beta_1 \cos \beta_2 + i^2 \operatorname{sen} \beta_1 \operatorname{sen} \beta_2) \\ &= d_1 d_2 [(\cos \beta_1 \cos \beta_2 + i^2 \operatorname{sen} \beta_1 \operatorname{sen} \beta_2) + i(\cos \beta_1 \operatorname{sen} \beta_2 + \operatorname{sen} \beta_1 \cos \beta_2)] \\ &= d_1 d_2 [\cos(\beta_1 + \beta_2) + i \operatorname{sen}(\beta_1 + \beta_2)]. \blacksquare \end{aligned}$$

Figura 10. Interpretação geométrica da multiplicação de dois números complexos.



Geometricamente, multiplicar dois vetores significa fazer uma rotação. O módulo do vetor $z_1 z_2$ é igual ao produto dos comprimentos de z_1 e z_2 . Já o seu argumento é dado pela soma dos argumentos z_1 e z_2 . Em particular, multiplicar um complexo z_1 por i (unidade imaginária) gera uma rotação de 90° no plano, no sentido anti-horário, mantendo o módulo constante.

Figura 11. Rotação de 90° dos números complexos z_1 , z_2 , z_3 e z_4 em torno da origem.



O quociente $\frac{z_1}{z_2}$ ($z_2 \neq 0$) é dado por:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{d_1 (\cos \beta_1 + i \operatorname{sen} \beta_1)}{d_2 (\cos \beta_2 + i \operatorname{sen} \beta_2)} \cdot \frac{d_2 (\cos \beta_2 - i \operatorname{sen} \beta_2)}{d_2 (\cos \beta_2 - i \operatorname{sen} \beta_2)} \\ &= \frac{d_1 d_2 (\cos \beta_1 \cos \beta_2 - i \cos \beta_1 \operatorname{sen} \beta_2 + i \operatorname{sen} \beta_1 \cos \beta_2 - i^2 \operatorname{sen} \beta_1 \operatorname{sen} \beta_2)}{d_2^2 (\cos^2 \beta_2 - i^2 \operatorname{sen}^2 \beta_2)} \\ &= \frac{d_1 [(\cos \beta_1 \cos \beta_2 + \operatorname{sen} \beta_1 \operatorname{sen} \beta_2) + i(\operatorname{sen} \beta_1 \cos \beta_2 - \cos \beta_1 \operatorname{sen} \beta_2)]}{d_2 (\cos^2 \beta_2 + \operatorname{sen}^2 \beta_2)} \\ &= \frac{d_1}{d_2} [\cos(\beta_1 - \beta_2) + i \operatorname{sen}(\beta_1 - \beta_2)]. \blacksquare \end{aligned}$$

O módulo do vetor $\frac{z_1}{z_2}$ é igual ao quociente dos comprimentos de z_1 e z_2 . Já o seu argumento é dado pela diferença dos argumentos do dividendo e do divisor.

3.3.4. Potenciação e os fractais.

Dado $z = d (\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)$ um número complexo não nulo e um número inteiro n , decorre que:

$$z^n = d^n (\cos n\beta + i \operatorname{sen} n\beta).$$

Essa demonstração pode ser dividida em duas partes.

1. Para n maior ou igual a zero:

$$\text{Se } n = 0, z^0 = d^0 (\cos 0 \cdot \beta + i \operatorname{sen} 0 \cdot \beta) = 1 (\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = 1 (1 + i \cdot 0) = 1.$$

$$\text{Se } n = 1, z^1 = d^1 (\cos 1 \cdot \beta + i \operatorname{sen} 1 \cdot \beta) = d (\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta).$$

$$\text{Se } n = 2, z^2 = d^2 (\cos 2\beta + i \operatorname{sen} 2\beta).$$

Se n maior que 2, a fórmula decorre da aplicação reiterada da fórmula da multiplicação.

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ fatores}} = d \cdot d \cdot \dots \cdot d [\cos(\beta + \beta + \dots + \beta) + i \operatorname{sen}(\beta + \beta + \dots + \beta)].$$

Também é possível fazer a demonstração usando o princípio da indução finita.

2. Para n menor que zero:

Por motivo de melhor visualização, seja $n = -m$, com $m \in \mathbb{Z}_+$, assim:

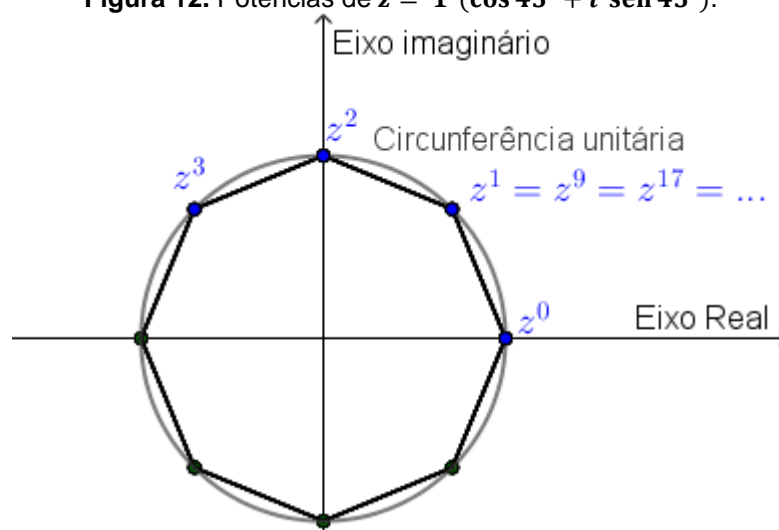
$$\begin{aligned} z^n &= [d (\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)]^n = [d (\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)]^{-m} = \frac{1}{[d (\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)]^m} \\ &= \frac{1 (\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)}{[d^m (\cos m\beta + i \operatorname{sen} m\beta)]} = \left(\frac{1}{d^m}\right) \frac{(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)}{(\cos m\beta + i \operatorname{sen} m\beta)} \\ &= d^{-m} [\cos(0 - m\beta) + i \operatorname{sen}(0 - m\beta)] = d^{-m} [\cos(-m\beta) + i \operatorname{sen}(-m\beta)] \\ &= d^n [\cos(n\beta) + i \operatorname{sen}(n\beta)]. \blacksquare \end{aligned}$$

Interpretando a fórmula, é possível perceber que a potência (z^n) está em função do módulo (d) e do argumento (β). Localizando no plano de Argand-Gauss as potências

de um número complexo e ligando cada ponto consecutivo por um segmento de reta resulta um fractal ou um polígono regular ou estrelado.

Se o módulo for unitário e o argumento um divisor de 360° , o resultado será um polígono regular. Por exemplo, para $\beta = 45^\circ$, tem-se um octógono ($360^\circ/45^\circ=8$) regular. Isto é, fazendo n variar entre zero e infinito obtém-se ângulos côngruos e pontos iguais periodicamente, como $z_0 = z_8 = z_{16} = \dots = z_{8k} = \dots$, com k inteiro.

Figura 12. Potências de $z = 1 (\cos 45^\circ + i \sen 45^\circ)$.



Fonte: O autor (2018).

Seguindo o mesmo raciocínio, tem-se um dodecágono regular para $\beta = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$ e $d = 1$. Caso $\beta \in \mathbb{Z}$ não seja divisor de 360° , os pontos obtidos são dispostos irregularmente sobre a circunferência, repetindo-se somente após $MMC(\beta, 360^\circ)$. Por exemplo, $\beta = 50^\circ$.

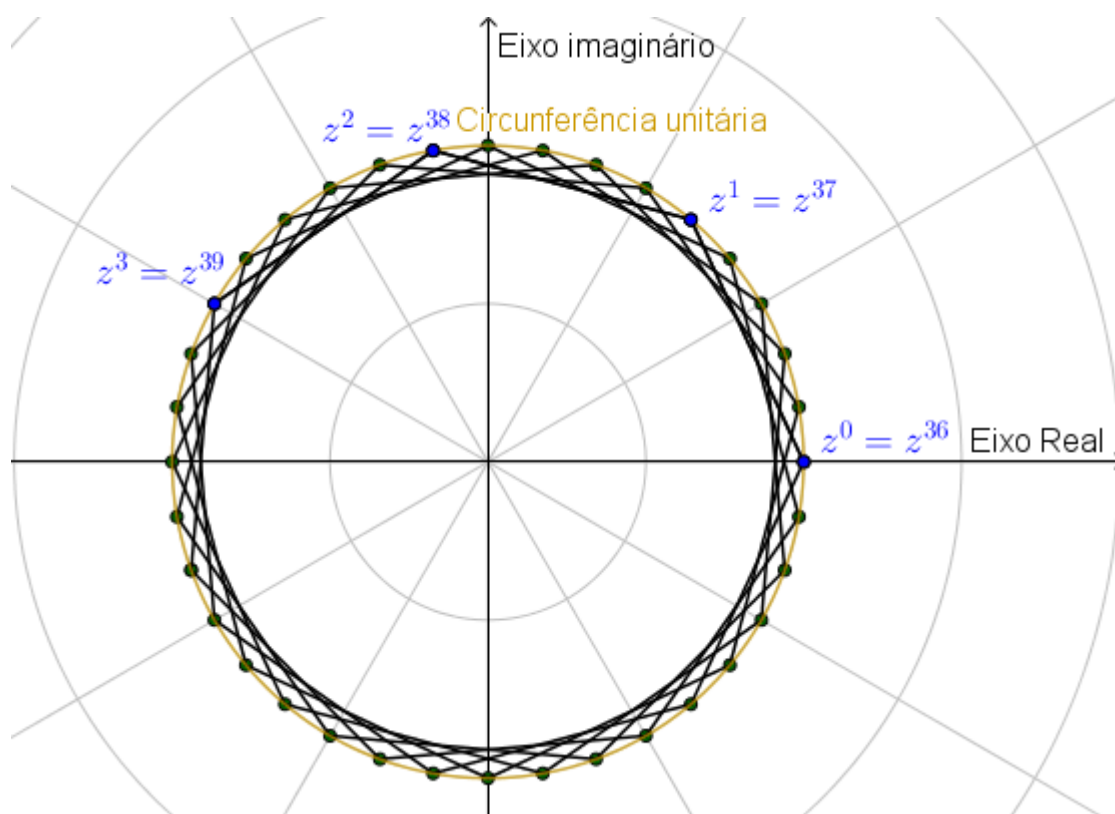
Tabela 1. Estudo dos arcos múltiplos de 50° realizado na janela planilha do GeoGebra.

	A	B	...	D	E	...	G	H
1	β	Arco côngruo		β	Arco côngruo		β	Arco côngruo
2	0	0		450	90		900	180
3	50	50		500	140		950	230
4	100	100		550	190		1000	280
5	150	150		600	240		1050	330
6	200	200		650	290		1800	0
7	250	250		700	340		1850	50
8	300	300		750	30		1900	100
9	350	350		800	80		1950	150
10	400	40		850	130		2000	200

Fonte: O autor (2018).

Com o teste numérico realizado na tabela acima, percebe-se que o complexo $z^1 = 1 (\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ) = z^{37}$. Isto porque $MMC(50^\circ, 360^\circ) + 50^\circ = 1800^\circ + 50^\circ = 1850^\circ$, que tem a mesma extremidade do arco 50° após 5 voltas completas no sentido anti-horário, e $\frac{1850^\circ}{50^\circ} = 37$. A figura a seguir, com a malha em coordenadas polares¹, proporciona a visualização desse estudo. A ligação dos pontos consecutivos forma um polígono estrelado.

Figura 13. Potências de $z = 1 (\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ)$.



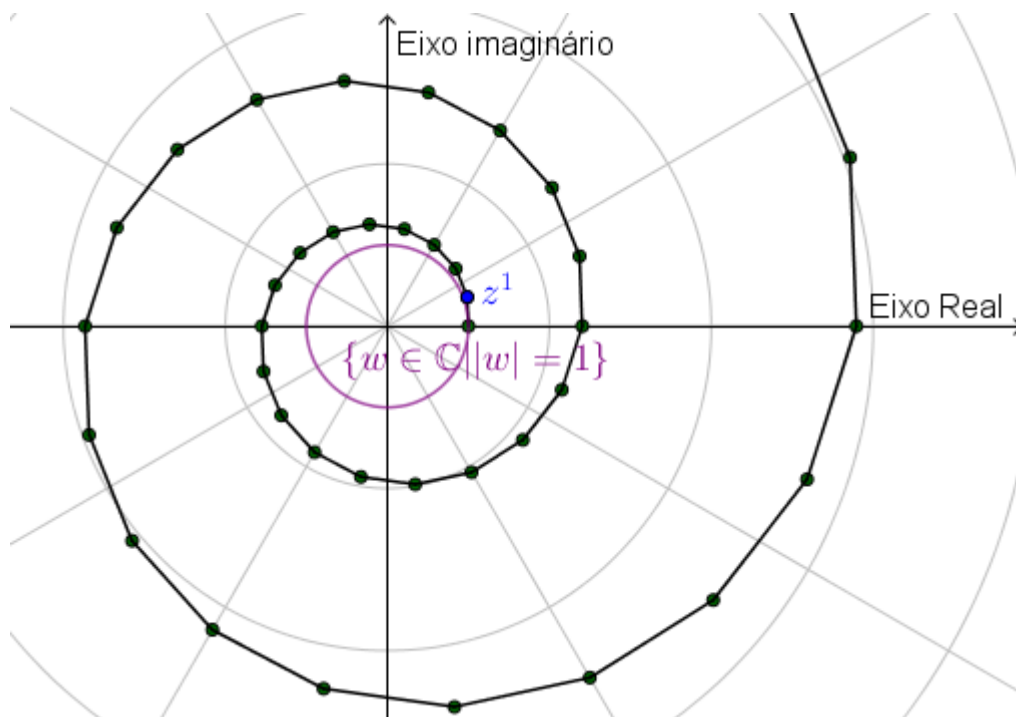
Fonte: O autor (2018).

Caso o módulo seja maior que um, têm-se figuras pouco expressivas à percepção humana, visto que à medida que n cresce, d^n assume valores cada vez maiores já que o crescimento é exponencial. O comportamento dos pontos é de uma espiral², como se pode notar na figura 14.

¹ É um sistema de coordenadas bidimensional em que cada ponto no plano é determinado por uma distância (d) e um ângulo (β) em relação a um ponto fixo de referência. Assim, um ponto P é dado por (d, β) . É uma representação apropriada para um número complexo na forma polar.

² Conforme o dicionário Aurélio, Ferreira (2011, p. 392), “Curva plana gerada por um ponto móvel que gira em torno de um ponto fixo, ao mesmo tempo que dele se afasta ou se aproxima.”.

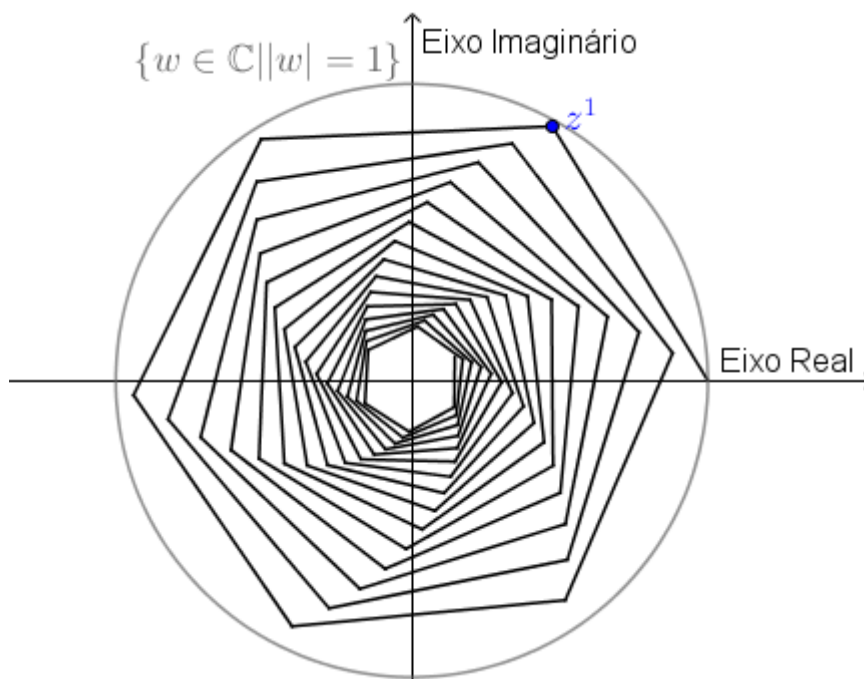
Figura 14. Potências de $z = 1,05 (\cos 20^\circ + i \operatorname{sen} 20^\circ)$.



Fonte: O autor (2018).

A última análise a se fazer é o comportamento do gráfico quando $d < 1$. É imediato que à medida que n cresce, d^n assume valores cada vez menores, como o exemplo da figura a seguir.

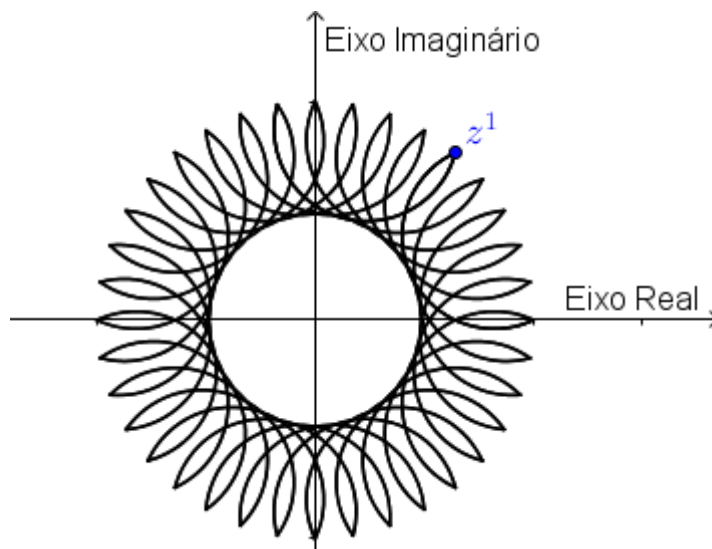
Figura 15. Potências de $z = 0,98 (\cos 61^\circ + i \operatorname{sen} 61^\circ)$.



Fonte: O autor (2018).

Ligando cada ponto consecutivo por um semicírculo também é possível obter belas figuras como a que é apresentada logo abaixo.

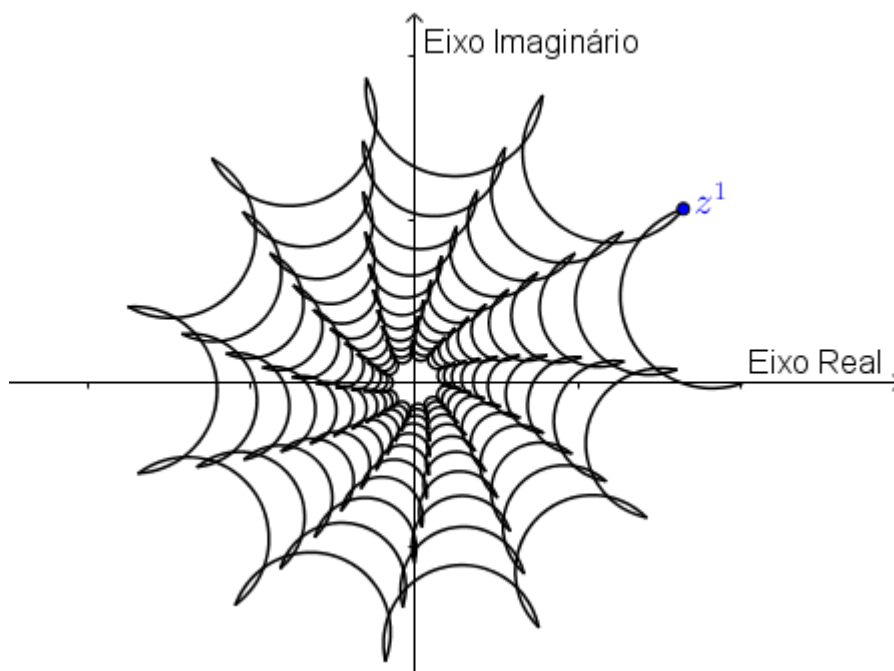
Figura 16. Potências de $z = 1 (\cos 50^\circ + i \operatorname{sen} 50^\circ)$ formada com semicírculos.



Fonte: O autor (2018).

Logo abaixo é apresentada outra figura formada a partir de semicírculos, que lembra uma teia de aranha. O módulo é menor que um e foram utilizados 120 pontos.

Figura 17. Potências de $z = 0,98 (\cos 33^\circ + i \operatorname{sen} 33^\circ)$ formada com semicírculos.



Fonte: O autor (2018).

3.3.5. Radiciação e os polígonos regulares.

Dado $z = d (\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)$ um número complexo não nulo e um número natural n tal que $n \geq 2$, denomina-se raiz enésima de z todo número complexo $z_k = \sqrt[n]{z}$.

$$(z_k)^n = z = d (\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta).$$

Seja $z_k = r (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$.

Pela fórmula da potenciação, $(z_k)^n = r^n (\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi)$. Daí,

$$r^n (\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi) = d (\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta).$$

Como complexos iguais têm módulos iguais e argumentos congruentes:

$$(I) \quad r^n = d \therefore r = \sqrt[n]{d}$$

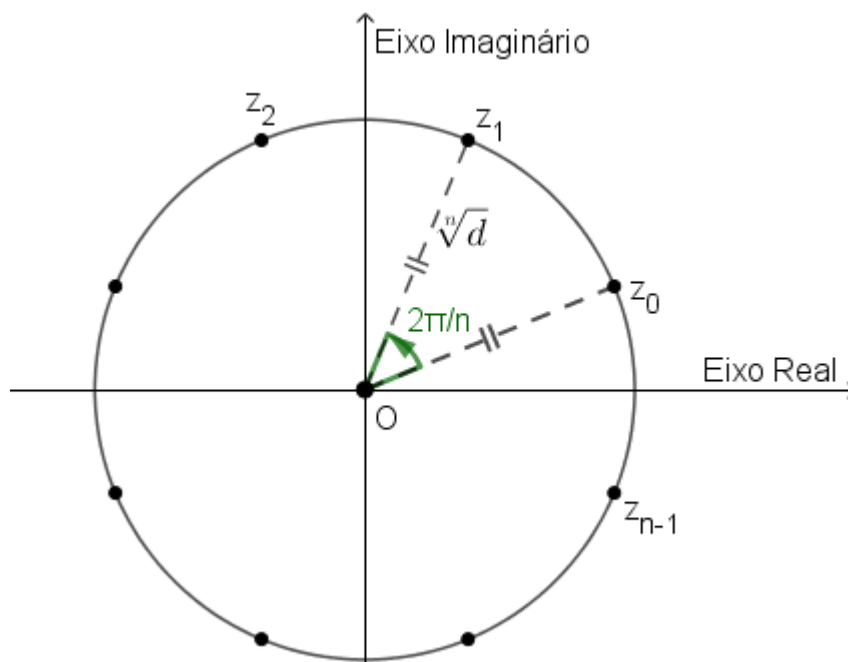
$$(II) \quad \begin{cases} \cos n\varphi = \cos \beta \\ \operatorname{sen} n\varphi = \operatorname{sen} \beta \end{cases} \rightarrow n\varphi = \beta + 2k\pi \therefore \varphi = \frac{\beta}{n} + k \frac{2\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}.$$

Portanto,

$$z_k = \sqrt[n]{d} \left[\cos \left(\frac{\beta}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\beta}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) \right], \text{ em que } k \in \mathbb{Z}. \blacksquare$$

Algumas considerações a respeito da fórmula da radiciação:

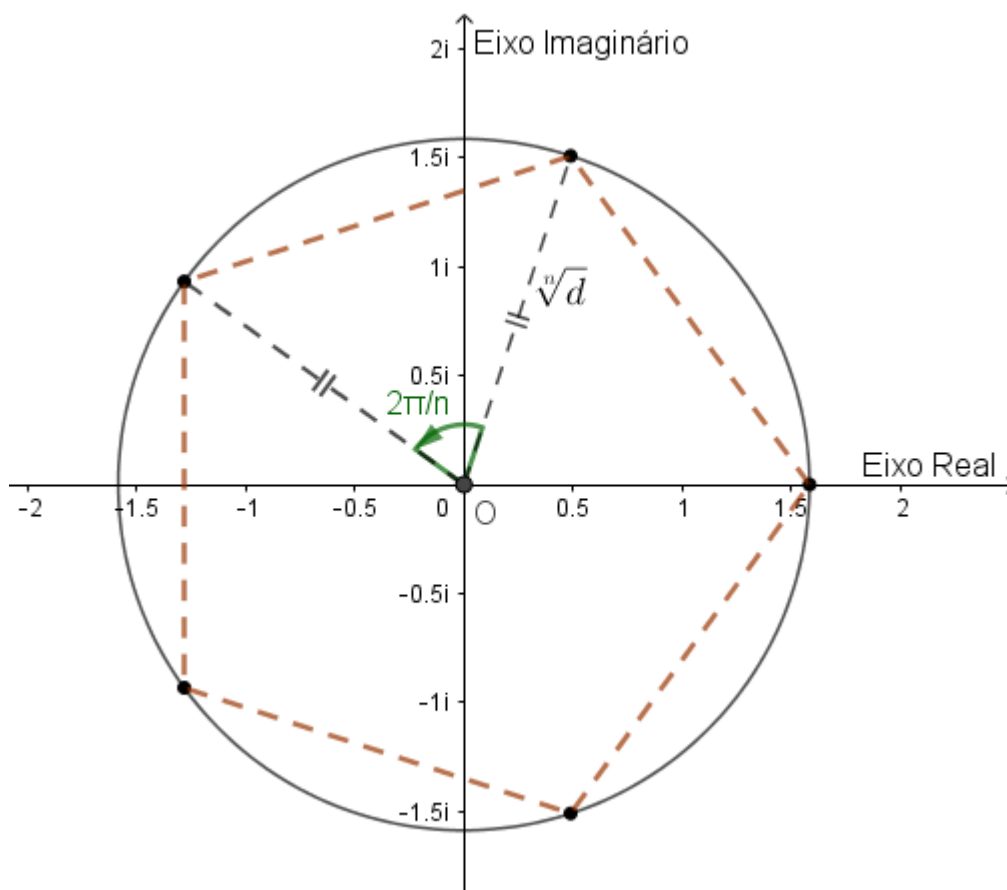
Figura 18. Representação das enésimas raízes do complexo z .



Fonte: O autor (2018).

1. Todas as raízes têm o mesmo módulo, pois $\sqrt[n]{d}$ é constante;
2. Para $k \in [0, n - 1]$, z_k são todos distintos, pois $\frac{\beta}{n} + k \frac{2\pi}{n}$;
3. Por causa de 2, existem n raízes enésimas de z ;
4. Os argumentos principais de $\sqrt[n]{z}$ formam uma progressão aritmética, em que $a_1 = \frac{\beta}{n}$ e $r = \frac{2\pi}{n}$.
5. As raízes enésimas de z , para $n \geq 3$, dividem a circunferência de centro na origem e raio $\sqrt[n]{d}$ em partes congruentes, isto é, são vértices de um polígono regular de n lados.

Figura 19. Polígono regular formado pelas raízes enésimas de z .



Fonte: O autor (2018).

Capítulo 4

Quatérnions e as rotações em \mathbb{R}^3

“A invenção dos quatérnions é um passo para o conhecimento das quantidades relacionadas ao espaço que só pode ser comparado em importância com a invenção das coordenadas triplas de Descartes”

James Clerk Maxwell (1831 - 1879)

4.1. E a história continua, mas com novos personagens.

O irlandês William Rowan Hamilton (1805-1865) desde criança mostrou-se bastante talentoso. Ficou órfão de pai e mãe muito cedo e sua educação foi confiada a seu tio. Por influência do seu tutor, aprendeu diversos idiomas, porém quando, certa vez, assistiu a apresentação de um calculista relâmpago inclinou para a matemática, campo esse que fez muitas contribuições, em destaque a criação dos quatérnions.

Hamilton colaborou proativamente para a legitimação dos Números Complexos. Como já discutido, multiplicar dois números complexos implica na rotação de vetores no \mathbb{R}^2 . Hamilton buscava uma estrutura algébrica que desempenhasse a mesma função no espaço tridimensional. Primeiramente, ele pensou em acrescentar somente uma componente ao complexo, obtendo triplas ordenadas. Por exemplo, $t = t_0 + t_1i + t_2j$, em que $t_0, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $i^2 = j^2 = -1$.

Para a adição, essa representação não oferecia problemas. Porém, nesse sistema, a operação de multiplicação não é fechada. Com efeito, a multiplicação ij não pode ser expressa na forma apresentada, como é evidenciado a seguir.

$$ij = t_0 + t_1i + t_2j$$

$$i(ij) = i(t_0 + t_1i + t_2j)$$

$$i^2j = it_0 + it_1i + it_2j$$

$$-j = t_0i + i^2t_1 + ijt_2$$

$$\begin{aligned}
 -j &= t_0i - t_1 + (t_0 + t_1i + t_2j)t_2 \\
 -j &= t_0i - t_1 + (t_0t_2 + t_1t_2i + t_2^2j) \\
 -j &= (t_0t_2 - t_1) + (t_0 + t_1t_2)i + (t_2^2)j \\
 0 &= (t_0t_2 - t_1) + (t_0 + t_1t_2)i + (t_2^2 + 1)j.
 \end{aligned}$$

Decorre que: $t_0t_2 - t_1 = 0$, $t_0 + t_1t_2 = 0$ e $t_2^2 + 1 = 0$. A última equação é um absurdo, pois, conforme definido anteriormente, t_2 é real.

Depois de anos de muito trabalho, Hamilton concebeu uma estrutura algébrica com quádruplas ordenadas. Nascia assim, o conjunto dos quatérnions, também conhecido como hipercomplexo, denotado por \mathbb{H} , em homenagem ao seu idealizador.

Hamilton contava a história de que a ideia de abandonar a lei comutativa da multiplicação ocorreu-lhe num átimo, após 15 anos de cogitações infrutíferas, enquanto caminhava com a esposa ao longo do Royal Canal perto de Dublin, pouco antes do escurecer. Essa ideia tão pouco ortodoxa impressionou-o tanto que pegou de seu canivete e com ele gravou a parte fundamental da tábua de multiplicação de quatérnions numa das pedras da Ponte Broughm. (EVES, 2011, p. 551).

Na referida ponte encontra-se uma placa que descreve a citada parte fundamental:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Um dia depois de sua descoberta, Hamilton enviou uma carta ao seu amigo John Thomas Graves (1806-1870), obtendo como resposta, Carter (2010) *apud* (OLIVEIRA, L., 2015, p. 28):

Ainda há algo no sistema que me atormenta. Eu ainda não tenho uma clara visão de até que ponto temos a liberdade de criar imaginários e dotá-los de propriedades sobrenaturais. (...) Se com sua alquimia você pode fazer três potes de ouro, por que parar por aí?

Passado alguns meses, Graves enviou uma nova carta a Hamilton o apresentando um novo sistema numérico: os Octônios, uma extensão dos quatérnions. Hamilton estava muito fascinado e empenhado em desenvolver sua álgebra que não deu o devido reconhecimento a essa descoberta. Poucos anos depois, o prolífero matemático britânico Arthur Cayley (1821-1895) publicou um artigo sobre os Octônios, atualmente, também conhecido como números de Cayley.

Os Octônios, denotados por \mathbb{O} , assim como os quatérnions, não satisfazem todas as leis da aritmética. Os números de Cayley “falham”, na operação de multiplicação, tanto na associatividade quanto na comutatividade. Por esse motivo, \mathbb{H} e \mathbb{O} não são um corpo. O alemão Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897) demonstrou, em 1863, que os números complexos são a única extensão dos reais que gozam de todas as propriedades da aritmética.

O polímata alemão Hermann Günther Grassmann (1809-1877) generalizou os quatérnions para n dimensões, em 1844. Como explica Eves (2011, p. 551), “a cada conjunto (x_1, x_2, \dots, x_n) considerado Grassmann associou um número hipercomplexo da forma $x_1e_1, x_2e_2, \dots, x_ne_n$, onde e_1, e_2, \dots, e_n são as unidades fundamentais de sua álgebra”. Dessa forma, os quatérnions e os números de Cayley, tornaram-se casos particulares da álgebra mais robusta de Grassmann.

A álgebra vetorial foi desenvolvida independentemente pelo físico norte-americano Josiah Willard Gibbs e pelo engenheiro inglês Oliver Heaviside. As notas de aula de Gibbs que continham a sua álgebra se popularizaram bastante entre os estudantes e na comunidade científica. Essa nova álgebra rivalizou com a teoria dos quatérnions de Hamilton, que por sua vez contava com alguns apoiadores e divulgadores tanto na Matemática quanto na Física.

No final do século XIX, mais precisamente na década de 1890, a revista *Nature* foi palco de uma emocionante disputa entre dois sistemas matemáticos para descrever grandezas vetoriais [...]. De um lado estavam Peter Guthrie Tait (1831-1901), Cargill Knott, Alexander MacFarlane e outros; do outro lado, Josiah Willard Gibbs (1839-1903) e Oliver Heaviside (1850-1925). Um dos principais fatores que torna este debate interessante é o fato de os debatedores serem físicos importantes e respeitados na época com interesses em matemática. (SILVA, 2002, p. 56).

No sistema de Gibbs-Heaviside, os quatérnions puros tornam-se um elemento do espaço euclidiano e as unidades imaginárias são interpretadas como vetores unitários. Outra característica notável da álgebra vetorial é a existência de dois produtos: escalar e vetorial, enquanto nos quatérnions só é definida um. O produto escalar é comutativo e não associativo e o produto vetorial não é comutativo nem associativo. O cálculo vetorial, apesar de ser limitado ao espaço tridimensional, por ser uma simplificação dos quatérnions, ganhou a disputa.

Apesar dos fatos que secundarizaram a álgebra hamiltoniana, essa ainda é fruto de estudos atualmente, por exemplo, na área da computação gráfica por sua aplicabilidade nas rotações tridimensionais. “A grande importância dos quatérnions na história da matemática reside no fato de que sua criação por Hamilton em 1843 libertou a álgebra de suas amarras com a aritmética dos números reais, abrindo assim as comportas da álgebra abstrata”. (EVES, 2011, p. 555).

4.2. Desenvolvimento matemático dos quatérnions.

O conjunto dos quatérnions é definido por:

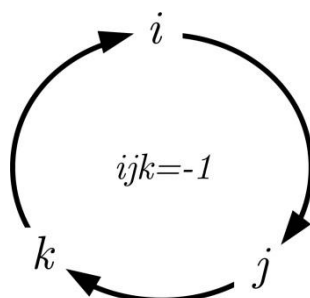
$$\mathbb{H} = \{ a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = j^2 = k^2 = -1 \}.$$

Seja $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$. Identificam-se duas partes em um quatérnio q . Estas são chamadas de parte escalar $E(q) = q_0$ e parte vetorial $V(q) = q_1i + q_2j + q_3k = \vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$. Dessa forma, o quatérnio q pode ser escrito como segue: $q = q_0 + \vec{q}$.

O quatérnio q é chamado escalar quando a parte vetorial é nula, ou seja, $q = E(q) = q_0$. Por outro lado, q é puramente vetorial quando a parte escalar é nula e a vetorial não, isto é, $q = V(q) = \vec{q} \neq (0, 0, 0)$. Este último subconjunto de q também é denotado por \mathbb{H}^0 .

As regras operativas podem ser facilmente visualizadas na figura abaixo. A seta indica o sentido positivo, desta forma $ij = k$, enquanto, $ji = -k$. Logo, $ij \neq ji$. Isso ressalta que a comutatividade não se aplica ao estudo dos quatérnions.

Figura 20. Representação gráfica da regra mnemônica de multiplicações de quatérnions.



Fonte: (JAMBERSI; SILVA, 2016, p. 4).

A tabela abaixo apresenta todas as combinações possíveis para a multiplicação de dois quatérnions.

Tabela 2. Tábua de multiplicação.

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	$i^2 = -1$	$ij = k$	$ik = -j$
j	j	$ji = -k$	$j^2 = -1$	$jk = i$
k	k	$ki = j$	$kj = -i$	$k^2 = -1$

Fonte: O autor (2018).

Considerando $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ e $w = w_0 + w_1i + w_2j + w_3k$. Os Quatérnions q e w são iguais se, e somente se, $q_0 = w_0$, $q_1 = w_1$, $q_2 = w_2$, $q_3 = w_3$. As operações estão definidas como segue:

- Adição: $q + w = (q_0 + w_0) + (q_1 + w_1)i + (q_2 + w_2)j + (q_3 + w_3)k$
- Multiplicação: $qw = (q_0w_0 - q_1w_1 - q_2w_2 - q_3w_3) + (q_0w_1 + q_1w_0 + q_2w_3 - q_3w_2)i + (q_0w_2 + q_2w_0 + q_3w_1 - q_1w_3)j + (q_0w_3 + q_3w_0 + q_1w_2 - q_2w_1)k$

A distribuição da multiplicação é de difícil visualização. Uma forma mais elegante e compacta de apresentar a multiplicação de quatérnions é em termo de produto escalar e produto vetorial de vetores do \mathbb{R}^3 .

$$\vec{q} \cdot \vec{w} = q_1w_1 + q_2w_2 + q_3w_3.$$

$$\vec{q} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = (q_2w_3 - q_3w_2)i + (q_3w_1 - q_1w_3)j + (q_1w_2 - q_2w_1)k.$$

Assim, $qw = (q_0w_0 - \vec{q} \cdot \vec{w}) + (q_0\vec{w} + w_0\vec{q} + \vec{q} \times \vec{w})$. Se q e w são quatérnions puros é imediato que $qw = -\vec{q} \cdot \vec{w} + \vec{q} \times \vec{w}$.

O produto também pode ser escrito na forma matricial. Cabe lembrar que as matrizes também não comutam em relação à multiplicação.

$$\begin{aligned} qw &= (1 \quad i \quad j \quad k) \begin{pmatrix} q_0w_0 - q_1w_1 - q_2w_2 - q_3w_3 \\ q_1w_0 + q_0w_1 - q_3w_2 + q_2w_3 \\ q_2w_0 + q_3w_1 + q_0w_2 - q_1w_3 \\ q_3w_0 - q_2w_1 + q_1w_2 + q_0w_3 \end{pmatrix} \\ &= (1 \quad i \quad j \quad k) \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

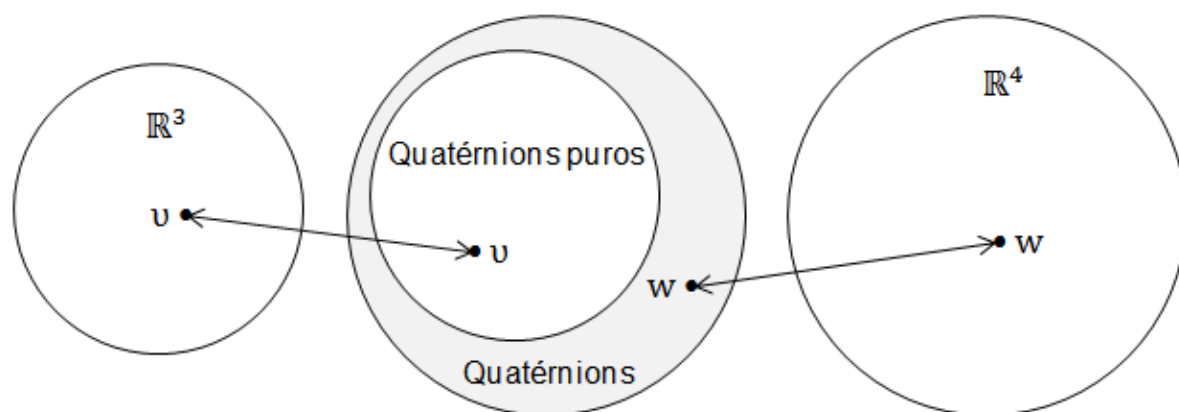
Para os quatérnions está definido:

- Conjugado: $\bar{q} = q_0 - \vec{q} = q_0 - q_1i - q_2j - q_3k$;
- Módulo: $|q| = \sqrt{q_0^2 + (\vec{q})^2} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$;
- Inverso multiplicativo: $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}, q \neq 0$.

Em particular se $|q| = |\bar{q}| = 1$, o quatérnion q é dito unitário.

Os quatérnions são isomorfos ao \mathbb{R}^4 , possuindo um eixo real e três imaginários. Isso implica em uma pergunta instantânea: como realizar rotação em três dimensões com uma estrutura de quatro dimensões? Para tal, é necessário operar com os quatérnions puros. Por sua vez, os quatérnions puros são isomorfos ao \mathbb{R}^3 . A imagem seguinte ajuda a sintetizar essa discussão.

Figura 21. Estruturas algébricas isomorfas.



Fonte: O autor (2018).

Para realizar uma rotação ϕ de um quatérnion puro p (sob a ótica da álgebra vetorial, um vetor do \mathbb{R}^3), em torno de um eixo de rotação com vetor diretor \vec{r} , é necessário preservar seu módulo. Por isso, para essa transformação linear de p é utilizado um quatérnion unitário:

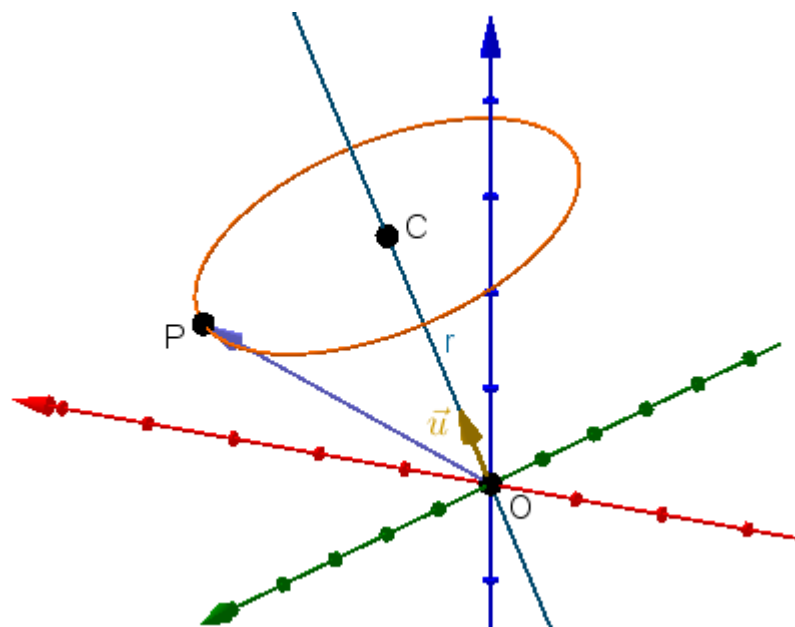
$$q = \left(\cos \frac{\phi}{2} \right) + \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \left(\text{sen} \frac{\phi}{2} \right).$$

O operador de rotação de p , denotado por $R(p)$, é dado por:

$$R(p) = qp\bar{q} = (q_0^2 - |\vec{q}|^2)\vec{p} + 2(\vec{q} \cdot \vec{p})\vec{q} + 2q_0(\vec{q} \times \vec{p}).$$

Observando a figura 22, construída no *GeoGebra* 3D, para realizar a rotação de $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$, no espaço tridimensional, escolhe-se um vetor unitário \vec{u} , que será o vetor diretor da reta r (eixo de rotação).

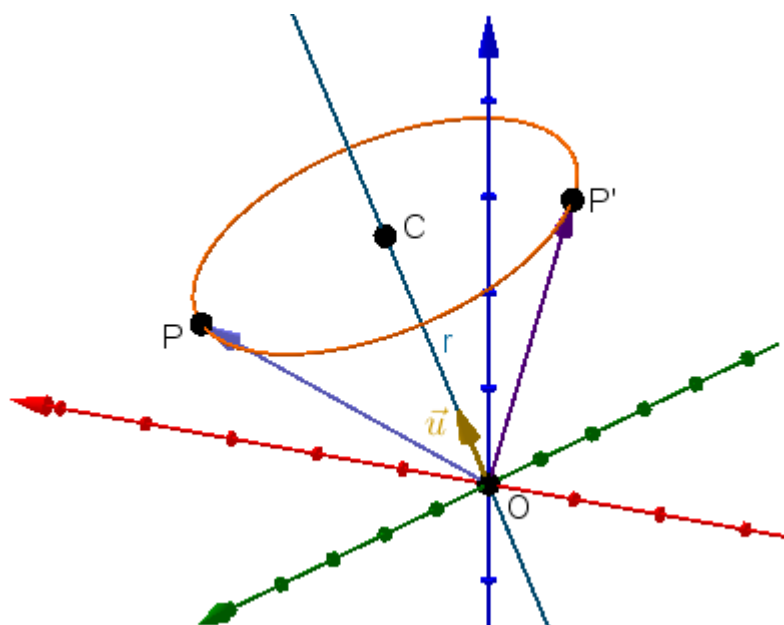
Figura 22. Vetor \vec{p} e eixo de rotação.



Fonte: O autor (2018).

Na figura 23, é apresentado o vetor resultante $\vec{p}' = \overrightarrow{OP'}$, após a rotação $\phi = P\hat{C}P'$, em que o ponto C é o centro da circunferência de eixo r e que passa por P . O vetor \vec{p}' tem o mesmo módulo de \vec{p} , conforme desejado.

Figura 23. Rotação do vetor \vec{p} utilizando a álgebra de quatérnions.



Fonte: O autor (2018).

Capítulo 5

Considerações finais

“Não há ramo da matemática, por abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real”.

Nicolai Lobachevski (1793-1856)

O presente trabalho partiu de uma inquietação pessoal do autor sobre o ensino dos números complexos e, ao longo das pesquisas, se associou a outra, o estudo dos quatérnions. No levantamento de literatura foi possível constatar que existe uma vasta produção acadêmica sobre os números complexos, possivelmente por integrar o currículo de matemática no Ensino Médio. Já sobre os quatérnions, há ainda uma escassez de materiais na fonte pesquisada, isto é, o repositório do Profmat.

Assim, esta monografia ofereceu uma abordagem histórica, algébrica e geométrica dos números complexos e quaterniônicos, fazendo uso do *GeoGebra*, um *software* gratuito e multiplataforma. Constatamos que o referido programa é útil e viável para a representação geométrica desses conjuntos, podendo trazer dinamismo e interatividade para a sala de aula quando utilizado adequadamente.

Com o *software* supracitado foi possível realizar estudos que sem a ferramenta não seria tão simples. Como exemplo, podemos citar a análise das potências e radiciação de um número complexo. As rotações utilizando a álgebra de quatérnions é outro caso notável. Os gráficos obtidos permitiram ressignificar o estudo algébrico.

O contexto histórico nos revelou as contribuições que muitos matemáticos, a maioria pouco conhecidos (como Scipione Del Ferro, Bombelli, Argand e Graves), deram a álgebra. Assim, a contextualização da álgebra através da história da matemática apresentou tanto o lado humano dos personagens envolvidos quanto suas contribuições no desenvolvimento da matemática.

A história da matemática e as TICs são interessantes tendências na educação matemática, que se utilizado pelo docente em sua ação pedagógica pode facilitar o ensino dos números complexos e quaterniônicos e despertar a curiosidade e engajamento dos alunos, possibilitando atitudes positivas em relação ao conhecimento matemático, como se verificou ao longo das discussões.

Portanto, os objetivos do presente trabalho foram alcançados, pois conseguimos realizar o estudo dos números complexos e quaterniônicos com suas interpretações geométricas utilizando os recursos do *software GeoGebra*. Desse modo, conceitos mais sensíveis de serem trabalhos utilizando-se de recursos tradicionais como lousa e piloto foram apresentados de forma mais dinâmica e rápida, proporcionando ao leitor a visualização das propriedades matemáticas geralmente apresentadas pelos livros didáticos somente sob a ótica algébrica.

5.1. Trabalhos futuros.

A presente monografia não pretendeu esgotar o estudo dos números complexos e quaterniônicos. Com efeito, “o que sabemos é uma gota; o que ignoramos é um oceano” (Isaac Newton). Assim, como possíveis trabalhos futuros, pode-se apontar:

- i. Estudar com mais profundidade a história dos números complexos e quaterniônicos;
- ii. Aperfeiçoar as ferramentas desenvolvidas no *GeoGebra* a fim de torná-las mais intuitivas e didáticas;
- iii. Investigar uma aplicação dos números complexos para o Ensino Médio ou Superior (com ênfase nas licenciaturas de ciências exatas);
- iv. Aplicar, em uma turma do Ensino Médio ou do Ensino Superior, uma sequência didática ou uma metodologia diferenciada utilizando as ferramentas desenvolvidas neste presente trabalho.

Referências

- ALVES, G. de S.; SOARES, A. B. *Um estudo sobre os recursos, as potencialidades e as limitações dos softwares de geometria dinâmica*. Rio de Janeiro: NCE, UFRJ, 2004. 13 p. (Relatório Técnico, 10/04).
- BERNARDI, A. A. *GeoPlexo: um material manipulável para o ensino dos números complexos*. 2015. 122f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco.
- BONJORNO, J. R.; GIOVANNI, J. R.; GIOVANNI JR, J. R. *Matemática fundamental: uma nova abordagem*. São Paulo: FTD, 2002. Volume único.
- BORBA, M. de C.; PENTEADO, M. G. *Informática e Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.
- BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da Matemática*. São Paulo: Blucher, 2012.
- BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília (DF), 2007. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>>. Acesso em: 12 nov. 2018.
- _____. Ministério da Educação. Secretaria da Educação. *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília: Brasília (DF), 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 12 nov. 2018.
- BRUM, M. L. S. *A distribuição do ensino dos Números Complexos nas séries do Ensino Médio: uma proposta na contramão do ensino tradicional*. 2015. 62f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora.
- CARMO, M.P.; MORGADO, A.C; WAGNER, E. *Trigonometria e números complexos*. 3ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.
- CAMPOS, R. B. L. *Análise técnica da matriz de referência do ENEM e estatística dos itens de matemática das edições de 2012 a 2014*. 2015. 86f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal Rural de Pernambuco. Recife.
- CHAGAS, J. S. B. *A Relevância do Ensino de Números Complexos no Ensino Médio na Opinião dos Professores de Matemática*. 2013. 104f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Estadual do Norte Fluminense. Campos dos Goytacazes.

D'AMBROSIO, U. *Transdisciplinaridade*. 1ª ed. São Paulo: Palas Athena, 1997.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Trad. Higyno H. Domingues. 5ª ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

FERREIRA, A. B. de H. *Aurélio Júnior*. 2ª ed. Curitiba: Editora positivo, 2011.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. *Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos*. Campinas: Autores associados, 2006.

FREITAS, J. R. *Equações algébricas nos quatérnions de Hamilton*. 2013. 39f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba.

GEOGEBRA. *GeoGebra - aplicativos matemáticos*. Disponível em <<https://www.geogebra.org/?lang=pt>>. Acesso em: 10 set. 2018.

GIL, A. C. *Como elaborar projetos de pesquisa*. 4ª ed. São Paulo: Editora Atlas, 2002.

IEZZI, G. *Fundamentos de Matemática Elementar*. 8ª ed. São Paulo: Editora Atual, 2013. v.6.

JAMBERSI, A. B.; SILVA, S. da. *A Sutileza dos Quatérnions no Movimento de Rotação de Corpos Rígidos*. Revista Brasileira de Ensino de Física, São Paulo, v. 38, nº 2, e2313, 2016.

KENSKI, V. M. *Educação e tecnologias: o novo ritmo da informação*. 8ª ed. Campinas, São Paulo: Papyrus, 2012.

LIMA, E. L. *Meu Professor de Matemática e outras histórias*. Coleção do Professor de Matemática. 6ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

LIMA, E. L. *et al. A Matemática do Ensino Médio*. 6ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. v.3.

OLIVEIRA, L. S. A. de. *Evolução das ideias sobre números imaginários*. 2015. 52f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa.

OLIVEIRA, M. P. de. *Números complexos: uma abordagem investigativa na sala de aula*. 2015. 86f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Estadual do Norte Fluminense. Campos dos Goytacazes.

ROQUE, T.; GIRALDO, V. *O saber do professor de matemática: ultrapassando a dicotomia entre a didática e conteúdo*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2014.

Santos, D. J. dos. *A álgebra dos complexos/quatérnios/octônios e a construção de Cayley-Dickson*. 2016. 103f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal de Goiás. Catalão.

Santos, M. de J. *Extensões do conceito de números com ênfase nos complexos e quatérnios*. 2015. 69f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal de Sergipe. São Cristóvão.

Santos, M. A. dos. *Dos números complexos aos quatérnios: desenvolvimento algébrico, interpretação geométrica e aplicações*. 2013. 102f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba.

Silva, C. C. *Da força ao tensor: evolução do conceito físico e da representação matemática do campo eletromagnético*. 2002. 258f. Tese de Doutorado. Universidade Estadual de Campinas. Campinas.

Apêndice A

Fórmula de Del Ferro-Tartaglia-Cardano

Dada uma equação do terceiro grau na forma completa:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \text{ com coeficientes reais e } a \neq 0.$$

Ela também pode ser escrita:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0.$$

Substituindo x por $y + m$:

$$(y + m)^3 + \frac{b}{a}(y + m)^2 + \frac{c}{a}(y + m) + \frac{d}{a} = 0$$

$$(y^3 + 3my^2 + 3m^2y + m^3) + \frac{b}{a}(y^2 + 2my + m^2) + \frac{c}{a}(y + m) + \frac{d}{a} = 0.$$

Reorganizando a equação de incógnita y :

$$y^3 + \left(3m + \frac{b}{a}\right)y^2 + \left(3m^2 + \frac{2mb}{a} + \frac{c}{a}\right)y + \left(m^3 + \frac{bm^2}{a} + \frac{cm}{a} + \frac{d}{a}\right) = 0.$$

Para eliminar o termo quadrático, basta $m = \frac{-b}{3a}$. Daí,

$$y^3 + 0 \cdot y^2 + \left(\frac{-b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}\right)y + \left(\frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}\right) = 0.$$

Fazendo

$$p = \left(\frac{-b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}\right) \text{ e } q = \left(\frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}\right),$$

resulta em

$$y^3 + py + q = 0.$$

A incógnita y pode ser escrita como uma soma de A e B :

$$(A + B)^3 + p(A + B) + q = 0$$

$$(A^3 + 3BA^2 + 3B^2A + B^3) + p(A + B) + q = 0$$

$$(A^3 + B^3) + 3AB(A + B) + p(A + B) + q = 0$$

$$(A^3 + B^3) + (3AB + p)(A + B) + q = 0$$

$$(A^3 + B^3) + (3AB + p)(A + B) = -q.$$

Fazendo $3AB + p = 0$ e $A^3 + B^3 = -q$ e montando o sistema, segue que

$$\begin{cases} 3AB + p = 0 \\ A^3 + B^3 = -q \end{cases} \rightarrow \begin{cases} AB = \frac{-p}{3} \\ A^3 + B^3 = -q \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A^3 B^3 = \frac{-p^3}{27} \\ A^3 + B^3 = -q \end{cases}.$$

Da famosa relação de Girard para equações do 2º grau

$$k^2 + qk + \frac{-p^3}{27} = 0.$$

Aplicando a fórmula de Sridhara:

$$\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27}, \quad \text{ou ainda,} \quad \Delta = 4\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)$$

$$k = \frac{-q \pm \sqrt{4\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}}{2} = \frac{-q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Como A^3 e B^3 são raízes dessa equação, então

$$A^3 = \frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad \therefore A = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \text{ e}$$

$$B^3 = \frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad \therefore B = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Como $y = A + B$, segue a famosa fórmula descoberta por Scipione Del Ferro:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \blacksquare$$

Para ilustrar a aplicação da Fórmula de Del Ferro, considere a equação cúbica:

$$x^3 - 3x^2 + x + 5 = 0.$$

O primeiro passo é substituir x de forma a eliminar o termo quadrático:

$$x = y - \frac{b}{3a} = y - \left(\frac{-3}{3 \cdot 1}\right) \therefore x = y + 1.$$

Seque que:

$$p = \frac{-b^2}{3a^2} + \frac{c}{a} = \frac{-(-3)^2}{3 \cdot 1^2} + \frac{1}{1} = \frac{-9}{3} + 1 = -3 + 1 \therefore p = -2, e$$

$$q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} = \frac{2(-3)^3}{27(1)^3} - \frac{(-3) \cdot 1}{3(1)^2} + \frac{5}{1} = -2 + 1 + 5 \therefore q = 4.$$

Assim,

$$y^3 + py + q = 0 \rightarrow y^3 - 2y + 4 = 0.$$

Calculando o discriminante:

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{4^2}{4} + \frac{(-2)^3}{27} = 4 + \frac{-8}{27} \therefore D = \frac{100}{27}.$$

Cabe agora determinar

$$\sqrt{D} = \sqrt{\frac{100}{27}} = \frac{10}{3\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{9}.$$

$$y = \sqrt[3]{-2 + \frac{10\sqrt{3}}{9}} + \sqrt[3]{-2 - \frac{10\sqrt{3}}{9}}$$

$$\therefore y = \sqrt[3]{\frac{-18 + 10\sqrt{3}}{9}} + \sqrt[3]{\frac{-18 - 10\sqrt{3}}{9}}.$$

Portanto, uma das raízes da equação cúbica $x^3 - 3x^2 + x + 5 = 0$, é dada por

$$x = 1 + \sqrt[3]{\frac{-18 + 10\sqrt{3}}{9}} + \sqrt[3]{\frac{-18 - 10\sqrt{3}}{9}}.$$

Este é o lado embaraçoso da fórmula. Além de laboriosa, às vezes, resulta em resultados pouco expressivos. Um dos métodos para estudar as possíveis raízes é testar os divisores do termo independente ($d = 5$) da equação. Neste caso, $\{\pm 1, \pm 5\}$. Por inspeção, -1 é uma raiz. Pelo teorema fundamental da álgebra, existem outras duas.

Utilizando o método Briot-Ruffini, segue a fatoração:

$$x^3 - 3x^2 + x + 5 = (x + 1)(x^2 - 4x + 5).$$

Assim, as raízes de $x^3 - 3x^2 + x + 5 = 0$ formam o conjunto solução

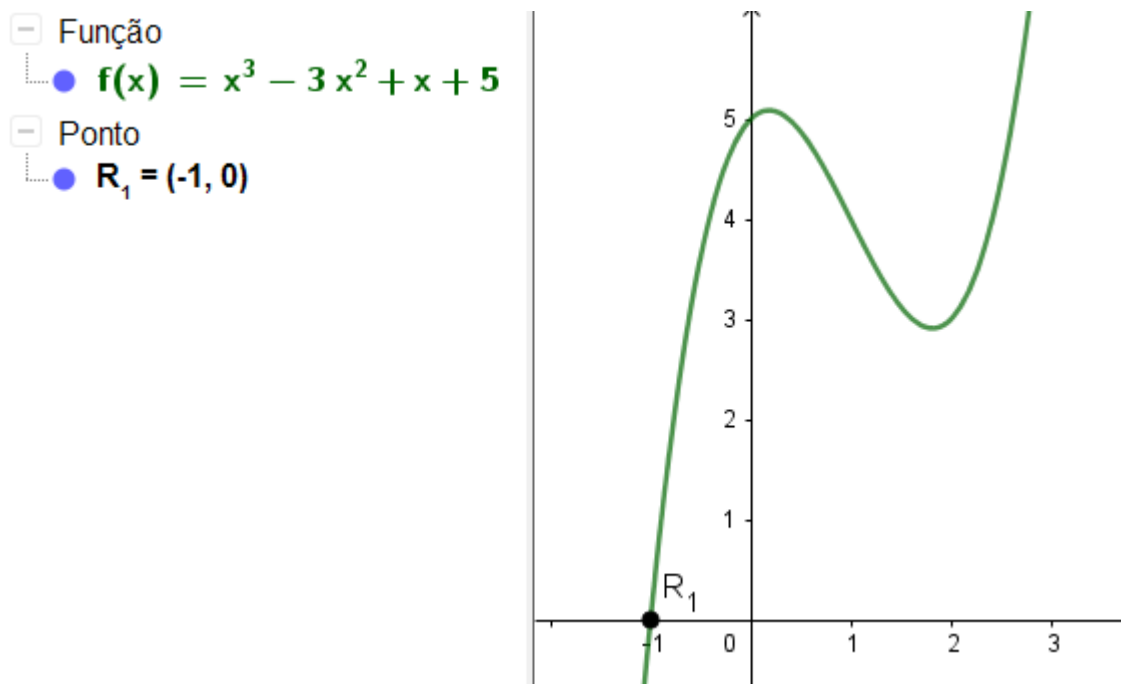
$$S = \{-1, 2 + i, 2 - i\}.$$

Como só há um número real no conjunto S , é imediato que

$$\sqrt[3]{\frac{-18 + 10\sqrt{3}}{9}} + \sqrt[3]{\frac{-18 - 10\sqrt{3}}{9}} = -2.$$

Uma igualdade, no mínimo, curiosa!

Figura 24. Esboço da função $x^3 - 3x^2 + x + 5$.



Fonte: O autor (2018).

Aplicação da fórmula na equação $x^3 - 6x - 9 = 0$.

Nesse caso, $x = y \therefore y^3 - 6y - 9 = 0$. Ou seja, $p = -6$ e $q = -9$.

Calculando o valor de D:

$$\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = \sqrt{\frac{(-9)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}} = \sqrt{\frac{81}{4} + \frac{(-2.3)^3}{27}} = \sqrt{\frac{81}{4} - 8} = \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{7}{2}.$$

Substituindo D na Fórmula de Del Ferro,

$$y = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{7}{2}} = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2}{2}} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} = 2 + 1 = 3.$$

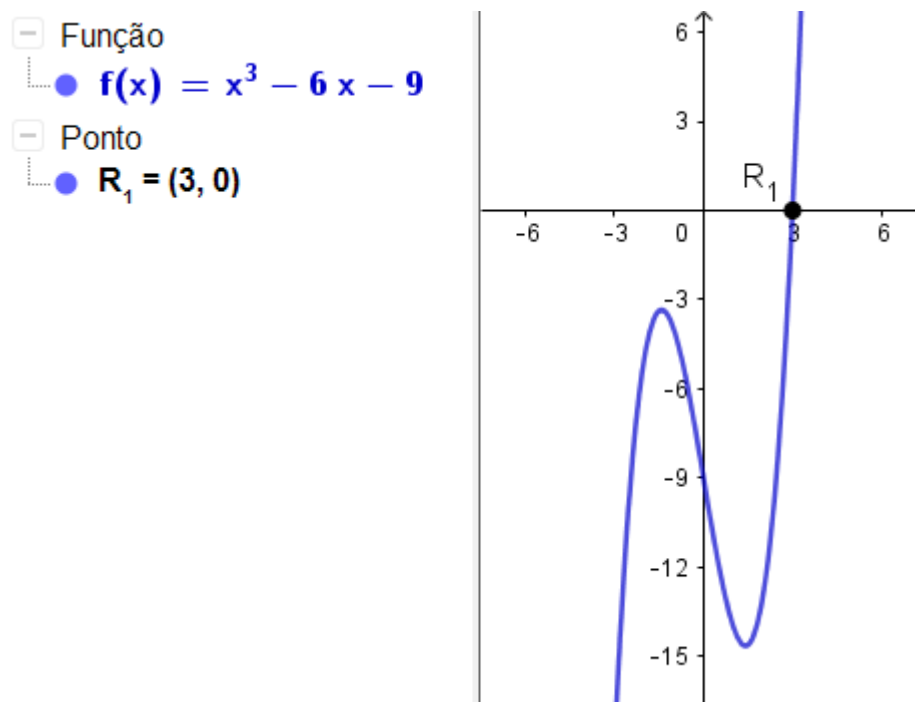
Portanto, $x = 3$ é uma das soluções. Decorre que

$$x^3 - 6x - 9 = (x - 3)(x^2 + 3x + 3).$$

O conjunto solução é dado por

$$S = \left\{ 3, \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-3 - i\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

Figura 25. Esboço da função $x^3 - 6x - 9$.



Fonte: O autor (2018).

Este foi mais um caso em que o simples estudo dos divisores do termo independente da equação já ajudaria na resolução. Mesmo assim, esta análise não deixou de ser interessante, pois, conforme observado, a fórmula também retornou uma solução real quando $D > 0$. É possível provar (LIMA, 2012), utilizando a aplicabilidade do cálculo, mais especificamente limite e derivada, que quando:

1. $D > 0$, a equação possui uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas;
2. $D = 0$, a equação possui três raízes reais, sendo uma de multiplicidade dois;
3. $D < 0$, a equação possui três raízes reais distintas um das outras.